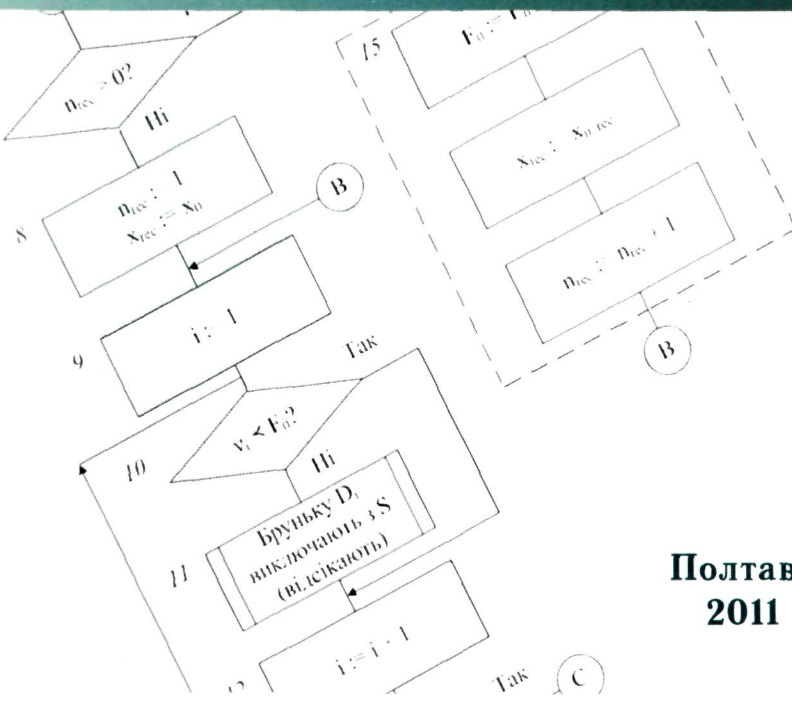
Олег Ємець
Олександра Ємець

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Монографія



Полтава
2011

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)

Присвячується 50-й річниці
освітньої діяльності університету

О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Монографія

Полтава
ПУЕТ
2011

УДК 519.85
ББК 22.18
Є60

Рекомендовано до видання, розміщення в електронній бібліотеці та використання в навчальному процесі вченою радою університету, протокол № 10 від 16 листопада 2011 р.

Автори:
О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

Рецензенти: ***Г. П. Донець,*** д.ф.-м.н., с.н.с., завідувач відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова Національної академії наук України; ***І. В. Гребеннік,*** д.т.н., професор кафедри системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки; ***М. В. Новожилова,*** д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій Харківського національного університету будівництва та архітектури.

Ємець О. О.
Є60 Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с.
ISBN 978-966-184-144-3

Розвинуто апарат нечітких множин; введено поняття: нечіткі переставлення, розміщення, розбиття. Запропоновано підхід до розв'язування задач геометричного проектування з нечіткими множинами; формалізовано поняття взаємного розташування нечітких прямокутників. Запропоновані поліноміальні евристичні методи розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Розвинуто застосування методу гілок та меж для задачі мінімізації в нечіткій та чіткій постановці. Для спеціалістів у галузі математичного моделювання, інформатики.

УДК 519.85
ББК 22.18

ISBN 978-966-184-144-3

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Позначення, термін	Пояснення позначення, терміну
$A=\{(a_1 \mid \mu_1),\ldots,(a_k \mid \mu_k)\}$	нечітка множина A
$A_n^k(G)$	множина k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел
$\bar{A}_n^k(G)$	множина k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел
$A_{\eta n}^k(G)$	загальна множина k-розміщень
$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$	носій нечіткої множини
$a=\{(\alpha \vert 1,0)\}$	звичайне число α записане у вигляді нечіткого числа
$[G]$	первинна специфікація мультимножини G
$\vert G \vert$	потужність (кількість елементів) множини або мультимножини G
J_n	множина n перших натуральних чисел
J_n^0	$J_n \bigcup \{0\}$
$K_G(a)$	кратність (число повторень) елемента a в мультимножині G
k-вибірка	підмультимножина заданої мультимножини, яка містить k елементів
$P_k(G)$	множина переставлень без повторення з k різних дійсних чисел мультимножини G
$P_{kn}(G)$	множина переставлень з повтореннями з k дійсних чисел, з яких n різні
$S(G)=(a, b, \ldots)$	основа мультимножини G
T	час роботи алгоритму

Θ	асимптотично точна оцінка алгоритму
μ_A	функція належності нечіткій множині *A*
$\mu_A(x)$	ступінь належності елемента *x* нечіткій множині *A*
$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}$	множина значень функції належності
e-задача	евклідова задача комбінаторної оптимізації
e-множина	евклідова комбінаторна множина
$\prec$	порядок на множині нечітких чисел

ВСТУП

Дослідження і аналіз складних явищ, об'єктів, процесів та систем, необхідність врахування нових вимог практики, прагнення будувати більш адекватні моделі для них приводить, зокрема, до розвитку теорії і методів комбінаторної оптимізації з бажанням врахувати різні види невизначеності, що наявна в даних та параметрах, які використовуються в моделях. Останні десятиліття ознаменовані широким розвитком теорії комбінаторної оптимізації [1–60]. Як правило, моделі та методи комбінаторної оптимізації є детермінованими та не враховують невизначеності, яка може бути в явищі, моделі, системі, об'єкті, що моделюється.

Відомі поодинокі роботи [29, 43, 45, 49–53, 59, 60, 62] в яких розглядаються задачі комбінаторної оптимізації з урахуванням тієї чи іншої невизначеності: інтервальної [29, 45, 48, 49, 52, 53], стохастичної [49, 51], вираженої за допомогою нечітких множин [49, 59, 60, 62], параметричної [43, 49, 50] тощо. В зв'язку з бурхливим розвитком теорії нечітких множин та її застосувань [59–95] актуальним вбачається дослідження, які б розвинули можливості застосування апарату нечітких множин при врахуванні невизначеності в оптимізаційних проблемах, що мають ті чи інші комбінаторні властивості. Таким чином, тематика досліджень пов'язана з розв'язуванням задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах є вельми актуальною.

В **першому розділі** йде мова про необхідні для подальшого використання терміни, поняття та основні факти комбінаторної оптимізації та теорії комбінаторних множин. Розглянуті основні необхідні поняття теорії нечітких множин, які можуть використовуватися при моделюванні оптимізаційних задач. Обґрунтована актуальність досліджень задач комбінаторної оптимізації, що враховують невизначеність параметрів, яка задана за допомогою нечітких множин, а також розробки методів розв'язування таких задач з подальшим дослідженням ефективності цих методів

В **другому розділі** введенні необхідні для побудови моделей та розв'язування комбінаторних задач на нечітких множинах означення суми, різниці, ділення, лінійного порядку нечітких чисел, характеристичного порівнювача нечіткого числа, знаходження максимального, мінімального з нечітких чисел.

Обґрунтовані властивості введених операцій та відношень з нечіткими числами. А саме:

– обґрунтовано комутативність та асоціативність суми нечітких чисел;

– доведено, що введений порядок є лінійним;

– доведено, що, якщо число є звичайним, не нечітким, то, значення характеристичного порівнювача цього числа дорівнює самому числу;

– доведено, що характеристичний порівнювач суми нечітких чисел дорівнює сумі характеристичних порівнювачів цих чисел;

– доведено, що для будь-яких трьох нечітких чисел (таких, що їх функції належності у сумі дають одиницю), справджується: якщо одне нечітке число передує іншому нечіткому числу, то сума першого числа з третім буде передувати сумі другого числа з третім;

– обґрунтовано твердження про те, що одне нечітке число передує іншому нечіткому числу тоді і тільки тоді, коли характеристичний порівнювача першого числа не більше характеристичного порівнювача другого числа;

– доведено, що сума значень функцій належності нечіткого числа, яке є сумою двох інших нечітких чисел, завжди буде дорівнювати одиниці;

– доведено, що якщо одно нечітке число передує іншому, то перше нечітке число буде перебувати сумі другого та третього чисел, за умови, що елементи носія третього числа невід'ємні.

Знайдена оцінка складності виконання введених операцій над нечіткими числами.

В **третьому розділі** наведено означення нечітких комбінаторних множин: нечітких переставлень, множини нечітких розбиттів, множини нечітких розміщень.

Також означено розташування прямокутників з нечіткими розмірами у смузі: дотикання, перетинання, не перетинання. Означено розташування прямокутників з нечіткими розмірами у смузі нечіткого розміру: попадання в смугу, дотикання, перетинання, не перетинання.

Введені множини нечітких переставлень, розбиттів та розміщень розширюють апарат математичного моделювання задачами комбінаторної оптимізації.

В **четвертому розділі** на прикладі однієї задачі евклідової комбінаторної оптимізації як задачі на нечітких переставленнях та як задачі на нечітких розбиттях показано застосування апарату нечітких чисел.

Запропоновано і здійснено розв'язування задачі методом гілок і меж. Дані верхні оцінки складності задачі на основі повного перебору, а також оцінки розв'язування методом гілок та меж.

Наведено ілюстративні приклади роботи методів.

Проведені числові експерименти, на основі яких зроблено висновок про практичну ефективність запропонованих методів.

В **п'ятому розділі** запропоновано один евристичний алгоритм для розв'язування задачі упакування прямокутників, довжини яких задаються нечіткими множинами. Отримана поліноміальна оцінка складності алгоритму. Проведені числові експерименти, які показали, що алгоритм є ефективним для знаходження наближеного розв'язку практичних задач як з точки зору часових затрат, так і з точки зору точності, що отримуємо.

Сформульована задача про ранець в умовах невизначеності, яка задається нечіткими множинами. Побудована математична модель цієї задачі. Запропонований евристичний метод для знаходження наближеного розв'язку. Отримана поліноміальна оцінка алгоритму. Проведені числові експерименти, які підтвердили, ефективність запропонованого алгоритму як з точки зору часових затрат, так і з точки зору близькості значення цільової функції, що отримуємо, до оптимального.

В **шостому розділі** запропоновано алгоритм методу гілок та меж для задачі мінімізації в нечіткій постановці. Проілюстровано застосування методу гілок та меж до комбінаторної транспортної задачі на переставленнях з нечіткими даними.

В **сьомому розділі** для задач на множині розміщень зі сталою їх сумою мінімізації лінійної цільової функції для методу гілок та меж запропоновано правила галуження та оцінку допустимих підмножин. Доведено дві властивості оцінок, що дозволяють значно зменшувати кількість допустимих підмножин, що аналізується.

В **восьмому розділі** для задачі мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів запропоновано та реалізовано метод гілок та меж. При цьому запропоновано правило галуження допустимої множини на підмножини, а також запропонована і обґрунтована оцінка допустимої підмножини. Розглянуто ілюстративний приклад.

Автори будуть вдячні читачам за зауваження до змісту та за помічені друкарські помилки.

РОЗДІЛ 1. НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА З ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

1.1. Необхідні відомості теорії комбінаторної оптимізації

При викладі цього матеріалу притримуємось термінології з [15, 17].

Наведемо постановку основної задачі комбінаторної оптимізації.

Нехай є скінчена комбінаторна множина Q. Позначимо q довільний елемент, а $|Q|$ – кількість елементів Q. Нехай визначено функціонал F на множині Q. *Основною задачею комбінаторної оптимізації* називають задачу знаходження екстремуму

$$F\left(q^*\right) = \underset{q \in Q}{extr}\, F(q) \tag{1.1}$$

і екстремалі

$$q^* = arg\, \underset{q \in Q}{extr}\, F(q). \tag{1.2}$$

Розв'язком задачі (1.1), (1.2) називають пару $< F\left(q^*\right), q^* >$. Задачі (1.1), (1.2) можуть ставитися та розв'язуватися як разом, так і незалежно одна від одної. Під розв'язком розуміють відповідно $F\left(q^*\right)$, q^*, коли розв'язують (1.1) та (1.2).

Основною задачею мінімізації на комбінаторній множині називають задачу визначення

$$F\left(q^*\right) = \underset{q \in Q}{min}\, F(q),$$

$$q^* = arg\, \underset{q \in Q}{min}\, F(q),$$

а *основною задачею комбінаторної максимізації* – задачу знаходження

$$F\left(q^*\right) = \underset{q \in Q}{max}\, F(q),$$

$$q^* = \arg\max_{q \in Q} F(q).$$

Як і в [17] будемо позначимо через J_n множину перших n натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, \ldots, n\}$, позначимо $J_n^0 = J_n \bigcup \{0\}$, нехай $J_0 = \emptyset$. Дамо означення необхідних далі понять, користуючись [1.1–1.3].

Під *мультимножиною*, як і в [9, 17], будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Мультимножина, у якої всі елементи різні, є множиною.

Мультимножину A можна також задати її *основою* $S(A)$ – множиною всіх її різних елементів, і *кратністю* – числом повторення кожного елементу основи в мультимножині. Способи задання мультимножини аналогічні способам задання множини. Наприклад, мультимножина $A = \{a, a, a, b, b, c\}$ має основу $S(A) = (a, b, c)$ – упорядковану якимось порядком множину і кратності $K(a) = \eta_1 = 3$, $K(b) = \eta_2 = 2$, $K(c) = \eta_3 = 1$. Кратності елементів основи мультимножини записують також у вигляді «показника степеня». Тоді можна записати $A = \{a^3, b^2, c^1\}$. Вектор кратностей мультимножини $A = \{a^v, b^w, \ldots\}$ називають її *первинною специфікацією* і позначають $[A] = (v, w, \ldots)$, зазначимо, що v – кратність першого елемента основи $S(A)$ і т. д. *Вторинною специфікацією* мультимножини $A = \{a^v, b^w, \ldots\}$ називається первинна специфікація її первинної специфікації, тобто $[[A]] = [(v, w, \ldots)]$. Таким чином, якщо A – множина, що складається з m (різних) елементів a_i, $i \in J_m$, то $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $[A] = (1^m)$, $[[A]] = (m)$. Якщо ж $B = \{a^m\}$, то $[B] = (m)$, $[[B]] = (1)$. При $C = \{a^m, b\}$ маємо $S(C) = (a, b)$, $[C] = (m, 1)$, $[[C]] = (1^2)$.

Розглянемо дії з мультимножинами. *Додавання мультимножин* визначається так. Нехай A – мультимножина з основою

$S(A)=(x,y,z,\dots)$ і кратностями $\{K_A(x), K_A(y), K_A(z),\dots\}$, а B мультимножина з основою $S(B)=(x,y,z,\dots)$ і кратностями $\{K_B(x), K_B(y), K_B(z),\dots\}$, де $K_A(x)\ge 0$, $K_A(y)\ge 0$, $K_A(z)\ge 0$, $K_B(x)\ge 0$, $K_B(y)\ge 0$, $K_B(z)\ge 0$, тощо. Сумою $A+B$ мультимножин A та B називають мультимножину з основою $S(A+B)=S(A)\bigcup S(B)$ і кратностями $\{K_{A+B}(x), K_{A+B}(y), K_{A+B}(z),\dots\}=\{K_A(x)+K_B(x), K_A(y)+K_B(y), K_A(z)+K_B(z),\dots\}$. Тобто при додаванні мультимножин їх основи об'єднуються, а кратності однакових елементів додаються. Суму n мультимножин A_i будемо позначати $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

Об'єднанням мультимножин A і B є мультимножина $C=A\bigcup B$, основою якої є множина $S(A\bigcup B)=S(A)\bigcup S(B)$, а кратність будь-якого елемента a основи визначається як $max(K_A(a), K_B(a))$.

Перерізом мультимножин A і B є мультимножина $C=A\bigcap B$, основою якої є множина $S(A\bigcap B)=S(A)\bigcap S(B)$, а кратність будь-якого елемента a основи визначається як $min(K_A(a), K_B(a))$.

Мультимножину B з основою $S(B)$ називають *підмультимножиною* мультимножини A з основою $S(A)$, якщо $S(B)\subset S(A)$ і для кожного елемента $a\in S(B)$ виконується нерівність $K_B(a)\le K_A(a)$. Позначається це таким же знаком $\subset$, що і для множин, тобто $B\subset A$.

Як і в [17] назвемо k-елементну підмультимножину в мультимножині A *k-вибіркою*, тобто B – k-вибірка, якщо $B\subset A$, $|B|=k$. Наприклад, якщо $A=\{a^2,b^2\}$, $k=3$, то 3-вибірки – це

$\{a^2, b\}$, $\{a, b^2\}$. Більш глибоке знайомство з поняттями мультимножини та діями над ними можна зробити, наприклад, за [9].

Нехай *k, n, η* – натуральні константи, g_j, e_i – дійсні числа $\forall j \in J_\eta$, $\forall i \in J_n$, а $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G) = (e_1, \ldots, e_n)$, первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, де $\eta_i = K_G(e_i)$, $\eta_i \geq 1$, $\forall i \in J_n$, $\eta_1 + \ldots + \eta_n = \eta$, $\eta \geq k$. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\eta_i \leq k \quad \forall i \in J_n$. Зазначимо, що за означенням основи мультимножини $e_i \neq e_j$ $\forall i \neq j$, $i, j \in J_n$. Очевидно, що з такого означення мультимножини *G* випливає, що $\eta \leq nk$. Оскільки *G* – мультимножина, то існує принаймні одне $i \in J_n$, що $\eta_i > 1$, а з цього випливає, що $\eta > n$.

Розглянемо упорядковану *k*-вибірку

$$e = \left(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}\right) \tag{1.3}$$

з мультимножини *G*, тобто $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_k$.

Означення 1.1. [9]. Множину *E*, елементами якої є *k*-вибірки $\overline{e} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k)$, $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ вигляду (1.3) з мультимножини *G* назвемо *евклідовою комбінаторною множиною*, якщо з умов $\overline{e}_j = \overline{e}_m$, $\overline{e}_m = \tilde{e}_j$, $j, m \in J_k$ випливає $\overline{e} \neq \tilde{e}$.

Іншими словами, множина *E* має таку властивість: два елементи $\overline{e}$, $\tilde{e}$, що належать множині *E*, відмінні один від одного, коли вони незалежно від інших відмінностей відрізняються порядком слідування символів, що їх утворюють.

Для стислості викладу будемо надалі інколи називати евклідову комбінаторну множину *е-комбінаторною множиною* або просто *е-множиною*. Розглянемо деякі е-комбінаторні множини.

Множина переставлень без повторень з k різних дійсних чисел. Розглянемо упорядковані *k*-вибірки вигляду (1.3) з мультимножини *G* при умові, що $\eta = n = k$. Це означає, що $[G] = (1^n)$, тобто мультимножина *G* є множиною. При цьому *k*-вибірки будуть відрізнятися одна від одної тільки порядком слідування чисел, бо $\eta = k$. Таку k-вибірку називають переставленням без повторення. Сукупність всіх таких переставлень утворює *множину переставлень без повторення k різних дійсних чисел* множини G. Позначають її $P_k(G)$.

Множина переставлень з повтореннями з k дійсних чисел, з яких n різні. Розглянемо упорядковані k-вибірки вигляду (1.3) з мультимножини G при умові, що $k = \eta$. Очевидно, що з цієї умови випливає, що такі k-вибірки будуть відрізнятися одна від одної тільки порядком слідування чисел. Такі k-вибірки називають переставленнями з повтореннями. Сукупність всіх таких переставлень утворює множину *переставлень з повтореннями з k дійсних чисел* мультимножини $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, серед яких n різних. Позначають цю сукупність $P_{kn}(G)$. Очевидно, що $P_{kk}(G) = P_k(G)$, тому множину $P_{kn}(G)$ також називають загальною множиною переставлень.

Виділення з усіх комбінаторних множин саме e-множин пов'язано з можливістю їх занурення в евклідовий простір R^n, тобто з розглядом їх елементів як точок з R^n.

Множина k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел. Нехай $[G] = (1^n)$, тобто G – множина $\eta = n$, $G = S(G)$. За такої умови множину всіх упорядкованих k-вибірок вигляду (1.3) з множини G називають *множиною k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел* множини G. Позначають $A_n^k(G)$. При $k < n$ маємо множину розміщень, а при $k = n$ $A_n^k(G) = P_k(G)$.

Множина k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел. Нехай $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ та первинною специфікацією $[G] = (k^n)$, тобто $\eta = nk$, а кратності η_i елементів e_i однакові і дорівнюють k $\forall i \in J_n$. Тоді множину всіх упорядкованих k-вибірок вигляду (1.3) з мультимножини G називають *множиною k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел*. Позначають $\overline{A}_n^k(G)$.

Загальна множина k-розміщень. Нехай $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G)=\{e_1,\ldots,e_n\}$ і первинною специфікацією $[G]=(k^n)$, де $\eta_i \le k \quad \forall i\in J_n$. Сукупність всіх упорядкованих k-вибірок вигляду (1.3) з мультимножини G називають *загальною множина k-розміщень* і позначають $A^k_{\eta n}(G)$.

Нехай N – натуральне число. Розіб'ємо його на доданки:

$$N=n_1+n_2+\ldots+n_j+\ldots+n_s, n_j\ge 0, j\in J_s.$$

Тоді $(n_1,n_2,\ldots,n_s)$ називається *розбиттям числа* N на s частин (див., наприклад, [9]). Зазначимо, що розбиття не є елементом евклідової комбінаторної множини.

Означення 1.2. [15]. Нехай E – евклідова комбінаторна множина, а e в зображенні (1.3) – елемент E. Тоді відображення $f: E\to E_f \subset R^k$ будемо називати зануренням E в арифметичний евклідовий простір, якщо f ставить множину E у взаємно однозначну відповідність множині E_f за таким правилом: для $e=(g_{i_1},g_{i_2},\ldots,g_{i_k})\in E$, $\quad x=f(e)$, $\quad x=(x_1,\ldots,x_k)\in E_f$ маємо $x_j=g_{i_j} \quad \forall j\in J_k$.

Образ множини E в R^k (тобто множину E_f) називають [15, 17] *спеціальною комбінаторною множиною.*

Спеціальні комбінаторні множини для e-комбінаторних множин, розглянутих раніше, позначають так: $E_k(G)=f(P_k(G))$, $E_{kn}(G)=f(P_{kn}(G))$.

Введення поняття e-комбінаторна множина дозволяє виділити з множини задач оптимізації комбінаторного типу, що описуються основною задачею комбінаторної оптимізації (1.1), (1.2), ті задачі, в яких як множина Q розглядаються е-множини E (або їх підмножини). А саме, розглянути задачі, в яких треба визначити:

$$F(g^*)=\underset{g\in E}{extr}\, F(g); \tag{1.4}$$

$$g^* = arg\,\underset{g\in E}{extr}\, F(g). \tag{1.5}$$

Введення відображення f дає можливість замінити розв'язок задачі (1.4), (1.5) розв'язком такої задачі: знайти

$$\Phi(x^*) = \underset{x\in E_f}{extr}\, \Phi(x); \tag{1.6}$$

$$x^* = arg\,\underset{x\in E_f}{extr}\, \Phi(x), \tag{1.7}$$

де $\Phi(x)$ – функція k змінних, що означена на множині E_f, $\Phi : E_f \to R^1$, яка відповідає функціоналу $F(g)$, $g \in E$.

Під відповідністю функції $\Phi(x)$ функціоналу $F(g)$, $g \in E$, і $\varphi(g)$ розуміється наступне: $F(g) = \Phi(\varphi(g))$ $\forall g \in E$. Функція $\Phi(x)$ може бути означена на множині $E_\varphi \supset E_f$, $E_\psi \subset R^k$. Якщо в задачі (1.6), (1.7) функція $\Phi(x)$ задана у вигляді єдиного аналітичного виразу, то природно вважати, що E_ψ область означення цього виразу при $x \in R^k$ або її частина.

Означення 1.3. [17]. Задачу (1.6), (1.7) називають *евклідовою задачею комбінаторної оптимізації* або коротко *е-задачею оптимізації* чи просто *е-задачею*.

Часто буває зручно задачу (1.6), (1.7) зобразити в такому вигляді: знайти

$$\Phi(x^*) = \underset{x\in E_\psi}{extr}\, \Phi(x); \tag{1.8}$$

$$x^* = arg\,\underset{x\in E_\psi}{extr}\, \Phi(x), \tag{1.9}$$

за обмежень

$$\psi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r \tag{1.10}$$

$$\psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i \in J_s \tag{1.11}$$

де r, s – деякі цілі невід'ємні константи, $J_0=\emptyset$, а множина $E_\psi \subset R^k$ і функції ψ^i: $E_\psi \to R^1$ $\forall i \in J_{r+s}$ такі, що $E_\varphi=\left\{x \middle| x \in E_\psi,\ \psi^i(x) \le 0\ \forall i \in J_r:\ \psi^{i+r}(x)=0 \quad \forall i \in J_s\right\}$.

Іноді зручно таке зображення (1.6), (1.7):
знайти

$$H\left(y^*\right)=\underset{x \in E_\phi}{extr}\, H(y) \tag{1.12}$$

$$y^*=arg\, \underset{x \in E_\phi}{extr}\, H(y) \tag{1.13}$$

за обмежень

$$\varphi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r; \tag{1.14}$$

$$\varphi^{r+i}(x)=0 \quad \forall i \in J_s, \tag{1.15}$$

де $x=(x_1,\ldots,x_k)$, $y=(x_1,\ldots,x_k,y_{k+1},\ldots,y_m)\in R^m$, де m – деяка натуральна константна ($m \ge k$), а $H(y)$, $\varphi^i(x) \le 0$ $\forall i \in J_{r+s}$ – функції m змінних.

Обмеження (1.10), (1.11), (1.14), (1.15) називають *додатковими обмеженнями* е-задачі. E-задачу в зображенні (1.12)–(1.15) при $m=k$ називають *повністю комбінаторною е-задачею*, а при $m>k$ – *частково-комбінаторною*. При цьому змінні $y_{k+1},\ldots,y_m$ називають *неперервними*, а $x_1,\ldots,x_k$ – *комбінаторними*. Якщо $r+s=0$, тобто додаткових обмежень немає, то е-задачу (1.12)–(1.15) назвемо *евклідовою безумовною задачею комбінаторної оптимізації*, у противному разі – *умовною е-задачею*. Якщо функції $H(y)$, $\varphi^i(x) \le 0$ $\forall i \in J_{r+s}$ лінійні, то задачу (1.12)–(1.15) називають *лінійною* е-задачею. Аналогічно по вигляду цільової функції і (або) вигляду додаткових обмежень е-задачу (1.12)–(1.15) називають відповідно *е-задачею опуклої, квадратичної, нелінійної, недиференційовної оптимізації* тощо [17].

1.2. Необхідні відомості теорії нечітких множин

Наведемо означення нечіткої множини. Для того, щоб краще його зрозуміти, зазначимо, що будь-яка множина A може бути описана характеристичною функцією належності $\mu_A(x)$, яка визначає, чи належить елемент x множині A:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \text{якщо } x\in A,\\ 0, \text{якщо } x\notin A.\end{cases}$$

Нечітка множина є розширенням поняття множини, для неї характеристична функція може приймати будь-яке значення з інтервалу $[0,1]$.

Наведемо таке означення нечіткої множини.

Означення 1.4. [80] *Нечіткою множиною* C в X називається сукупність пар виду $(x,\mu_C(x))$, де $x\in X$, а μ_C – функція $X\to[0,1]$, яка називається *функцією належності* нечіткій множині C. Значення $\mu_C(x)$ цієї функції для конкретного x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій множині μ_C.

Означення 1.5. [69] *Носієм* нечіткої множини C називається множина таких точок в X, для яких величина $\mu_C(x)$ є додатною.

Коли в задачах виникає потреба розширити область визначення X заданого відображення або відношення, використовують *принцип узагальнення Заде*, який можна сформулювати так.

Означення 1.6. [80] Образом L нечіткої множини A, заданої на області визначення X, при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X\times Y\to[0,1]$ називається нечітка множина з функцією належності виду

$$\mu_L(y)=\sup_{x\in X} \min\{\mu_A(x),\mu_\varphi(x,y)\}.$$

Приклад 1.1. [69] Задані нечіткі множини $A=\{(1|0{,}6),(2|1),(3|0{,}8)\}$ та $B=\{(5|0{,}8),(6|1),(7|0{,}7)\}$. Знайти добуток згідно принципу узагальнення Заде.

Отримуємо,

$$A\times B=\{(1\times 5|min[0{,}6;\ 0{,}8]),\ (1\times 6|min[0{,}6;\ 1]),\ (1\times 7|min[0{,}6;\ 0{,}7]),$$

$$(2\times 5|min[1;\ 0{,}8]),(2\times 6|min[1;\ 1]),(2\times 7|min[1;\ 0{,}7]),(3\times 5|min[0{,}8;\ 0{,}8]),$$

$$(3\times 6|min[0{,}8;\ 1]),(3\times 7|min[0{,}8;\ 0{,}7])\}=$$

$$=\{(5|0{,}6),(6|0{,}6),(7|0{,}6),(10|0{,}8),(12|1),(14|0{,}7),(15|0{,}8),(18|0{,}8),(21|0{,}7)\}.$$

Означення 1.7. Згідно принципу узагальнення Заде, добутком числа $\lambda=\{(\lambda\,|\,1)\}$ на нечітку множину $A=\{(a_1\,|\,\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha\,|\,\mu_\alpha^A)\}$ назвемо нечітке число вигляду $\{(\lambda a_1\,|\,\mu_1^A),\ldots,(\lambda a_\alpha\,|\,\mu_\alpha^A)\}$.

Означення 1.8. Згідно принципу узагальнення Заде, результатом *ділення двох нечітких чисел* $A=\{(a_1\,|\,\mu_1^A),\ldots,(a_\alpha\,|\,\mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1\,|\,\mu_1^B),\ldots,(b_\beta\,|\,\mu_\beta^B)\}$ (зазначимо, що $b_i\neq 0$) назвемо нечітке число A/B, яке утворюється за допомогою побудови множини пар

$$\tilde{C}=\{(\tilde{c}_1\,|\,\mu_1^{\tilde{C}}),\ldots,(\tilde{c}_\eta\,|\,\mu_\eta^{\tilde{C}})\}=$$

$$=\Big\{\left(a_1/b_1\,|\,min\left[\mu_1^A,\mu_1^B\right]\right),\ldots,\left(a_1/b_\beta\,|\,min\left[\mu_1^A,\mu_\beta^B\right]\right),$$

$$\left(a_2/b_1\,|\,min\left[\mu_2^A,\ \mu_1^B\right]\right),\ldots,\left(a_2/b_\beta\,|\,min\left[\mu_2^A,\mu_\beta^B\right]\right),$$

$$\ldots,$$

$$\left(a_\alpha/b_1\,|\,min\left[\mu_\alpha^A,\mu_1^B\right]\right),\ldots,\left(a_\alpha/b_\beta\,|\,min\left[\mu_\beta^A,\mu_\beta^B\right]\right)\Big\}. \quad (1.16)$$

Перші елементи $\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta$, де $\eta=\alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C}^*=\{\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C}^*)$ мультимножини $\tilde{C}^*$: $S\left(\tilde{C}^*\right)=\{c_1,\ldots,c_r\}$ – це носій нечіткого числа $A/B=\{(c_1|\mu_1),\ldots,(c_r|\mu_r)\}$. Значення функції належності знаходять за правилом:

$$\mu_t = \max_{\forall i\in J_\eta:\ c_t=\tilde{c}_i}\left\{\mu_i^{\tilde{C}}, i\in J_\eta\right\},\quad t\in J_r \tag{1.17}$$

Тобто, значення μ_t обирається як максимальне серед чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i=c_t$, а r – число різних елементів в $\tilde{C}^*$.

Дефазифікацією (див., наприклад [95]) називається процедура перетворення нечіткої множини в число. В літературі відомі різні методи дефазифікації, серед них найбільш відомими методами є: методом центра ваги, методом медіани, метод центра максимумів, метод найбільшого з максимумів, методом найменшого з максимумів.

1) Дефазифікація нечіткої множини $A=\left\{\left(u_1|\mu_1^A\right),\ldots,\left(u_k|\mu_\alpha^A\right)\right\}$ за *методом центра ваги* відбувається за формулою:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{\alpha}u_i\cdot\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\varepsilon}\mu_i^A}. \tag{1.18}$$

2) Дефазифікація нечіткої множини $A=\left\{\left(u_1|\mu_1^A\right),\ldots,\left(u_k|\mu_\alpha^A\right)\right\}$ за *методом медіани* виконується за формулою:

$$a=\min_{\forall j\sum_{i=1}^{j}\mu_i^A\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\left(u_j\right). \tag{1.19}$$

3) Дефазифікація нечіткої множини $A=\left\{\left(u_1|\mu_1^A\right),\ldots,\left(u_k|\mu_\alpha^A\right)\right\}$ за *методом центра максимумів* виконується за формулою:

$$a=\frac{\sum_{u_i\in G}u_i}{|G|}, \tag{1.20}$$

де G – множина всіх елементів, які мають максимальний ступінь належності нечіткій множині A, $|G|$ – потужність множини G.

4) Дефазифікація за *методом найбільшого з максимумів* виконується за формулою:

$$a = max(G), \quad (1.21)$$

де G – множина всіх елементів, які мають максимальний ступінь належності нечіткій множині A.

Із формули видно, що якщо функція належності має лише один максимум, то його координата і є чітким аналогом нечіткої множини.

5) Дефазифікація за *методом найменшого з максимумів* виконується за формулою:

$$a = min(G), \quad (1.22)$$

де G – множина всіх елементів, які мають максимальний ступінь належності нечіткій множині A.

Якщо ж функція належності має лише один мінімум, то його координата і є чітким аналогом нечіткої множини.

Приклад 1.2. Провести дефазифікацію нечіткої множини А вигляду:

$$A = \{(155|0),(160|0{,}1),(165|0{,}3),(170|0{,}8),(175|1),(180|1),(185|0{,}5),(190|0)\}.$$

1. Проведемо дефазифікацію нечіткої множини A за методом центра ваги, тобто за формулою (1.18), отримуємо:

$$a = \frac{155\cdot 0 + 160\cdot 0{,}1 + 165\cdot 0{,}3 + 170\cdot 0{,}8 + 175\cdot 1 + 180\cdot 1 + 185\cdot 0{,}5 + 190\cdot 0}{0 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1 + 1 + 0{,}5 + 0} \approx 175.$$

2. Проведемо дефазифікацію за методом медіани, тобто за формулою (1.19):

Знаходимо

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A = \frac{1}{2}(0 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1 + 1 + 0{,}5 + 0) = 1{,}85.$$

$$j=1,\ \sum_{i=1}^{1}\mu_i^A=0,\ \ 0<1{,}85.$$

$$j=2,\ \sum_{i=1}^{2}\mu_i^A=0+0{,}1=0{,}1,\ \ 0{,}1<1{,}85.$$

$$j=3,\ \sum_{i=1}^{3}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3=0{,}4,\ \ 0{,}4<1{,}85.$$

$$j=4,\ \sum_{i=1}^{4}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3+0{,}8=1{,}2,\ \ 1{,}2<1{,}85.$$

$$j=5,\ \sum_{i=1}^{5}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3+0{,}8+1=2{,}2,\ \ 2{,}2>1{,}85.$$

$$j=6,\ \sum_{i=1}^{6}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3+0{,}8+1+1=3{,}2,\ \ 3{,}2>1{,}85.$$

$$j=7,\ \sum_{i=1}^{7}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3+0{,}8+1+1+0{,}5=3{,}7,\ \ 3{,}7>1{,}85.$$

$$j=8,\ \sum_{i=1}^{8}\mu_i^A=0+0{,}1+0{,}3+0{,}8+1+1+0{,}5+0=3{,}7,\ \ 3{,}7>1{,}85.$$

Для $j=5,6,7,8$ виконується $\sum_{i=1}^{j}\mu_j^A>\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A$, тому

$$u=\min_{\forall j\sum_{i=1}^{j}\mu_i^A\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}(u_j)=min(u_5,u_6,u_7,u_8)=min(175,180,185,190)=175\,.$$

3) Дефазифікуємо за методом центра максимумів – формула (1.20). Знайдемо множину G – множину всіх елементів, які мають максимальний ступінь належності A:

$$G=\{175,180\},\ \ |G|=2\,.$$

Тоді

$$a = \frac{\sum_{u_i \in G} u_i}{|G|} = \frac{175 + 180}{2} = 177{,}5.$$

4) Дефазифікація за методом найбільшого з максимумів відбувається згідно формули (1.21):

$$a = max(G) = max\{175{,}180\} = 180.$$

5) Дефазифікація за методом найменшого з максимумів, формула (1.22), дає такий результат:

$$a = min(G) = min\{175{,}180\} = 175\,.$$

1.3. Про актуальність досліджень задач комбінаторної оптимізації з нечіткими даними

Задачі комбінаторної оптимізації, як видно з аналізу публікацій [1–60] є актуальними, важливими та поширеними. Разом з тим життя, потреби практики висувають необхідність враховувати різні види невизначеності, які наявні у вивчаємих об'єктах, явищах, процесах, системах. Стосовно проблем комбінаторної оптимізації відомі деякі роботи, в яких вивчаються невизначеність, що враховується методами інтервальної математики [29, 45, 48, 49, 52, 53]. В ряді робот розглядається невизначеність в комбінаторній оптимізації, яка адекватно може бути описана термінах стохастичних, ймовірнісних понять [49, 51]. Певна кількість робіт присвячена врахуванню параметричної невизначеності в задача оптимізації на комбінаторних конфігураціях [43, 49, 50]. Деякі дослідники відносять до невизначеності комбінаторних оптимізаційних задач наявну в цих проблемах багатокритеріальність [22]. Що стосується врахуванню невизначеності методами теорії нечітких множин, не зважаючи на бурхливий розвиток цієї теорії та її застосувань (дивись, наприклад роботи [59–95]), то відомі поодинокі публікації, в яких вивчаються комбінаторні оптимізаційні задачі. В першу чергу серед робіт з нечітких множин треба зазначити [68, 69, 73, 76, 94]. Відомі також роботи, в яких розглядаються окремі питання застосування нечітких множин в комбінаторній оптимізації [49, 59, 60, 62].

Зважаючи на малочисельність робіт з комбінаторної оптимізації на нечітких множинах, важливості для практики таких моделей, актуальними вбачаються такі напрямки досліджень:

1) дослідити можливості використання апарату нечітких множин та відношень для адекватного моделювання оптимізаційних задач, що мають також комбінаторні властивості допустимих множин. В разі обмеженості такого апарату – поставити і розв'язати задачу введення необхідних для моделювання та розв'язування комбінаторних задач з нечіткими параметрами операцій та відношень;

2) осмислити поняття нечіткої комбінаторної конфігурації, формалізувати поняття нечіткого розміщення, нечіткого переставлення, нечіткого розбиття з метою використання їх при постановці та розв'язуванні задач комбінаторної оптимізації;

3) враховуючи, що ряд задач геометричного проектування мають комбінаторні оптимізаційні моделі, дослідити можливість врахування невизначеності в таких задачах за допомогою нечітких чисел. При цьому виникає необхідність дослідження та формалізації понять розміщення нечіткого геометричного об'єкту в нечіткій області, перетинання та дотикання нечітких геометричних об'єктів, їх неперетинання;

4) дослідити можливості побудови математичних моделей ряду важливих практичних задач у вигляді задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах;

5) дослідити можливості застосування відомих, а при необхідності – розвиток нових точних та наближених методів розв'язування задач, що можуть бути сформульовані як задачі комбінаторної оптимізації на нечітких множинах.

1.4. Висновки до розділу

В розділі викладено необхідні для подальшого використання терміни, поняття та основні факти комбінаторної оптимізації та теорії комбінаторних множин. Розглянуто основні необхідні поняття теорії нечітких множин, які можуть використовуватися при моделюванні оптимізаційних задач.

Дослідження сучасного стану врахування невизначеності в задачах комбінаторної оптимізації дозволяє зробити наступні висновки. В науковій літературі розглядається врахування невизначеності методами інтервальної геометрії, методами теорії ймовірності, методами параметричного аналізу та багатокритеріальної оптимізації. Як відомо, в останні роки при моделюванні об'єктів, явищ, систем та процесів врахування невизначеності в багатьох роботах ґрунтується на використанні теорії нечітких множин. Разом з тим, практично немає робіт, в яких розглядалися б задачі комбінаторної оптимізації, в яких враховувалась невизначеність на базі нечітких множин. Ряд практичних задач може адекватно моделюватися саме такими задачами, тому дослідження задач оптимізації на нечітких множинах на даному етапі розвитку комбінаторної оптимізації як з теоретичного так і з практичного боку є необхідним і актуальним.

В результаті аналізу наукових літературних джерел обґрунтовано актуальність досліджень задач комбінаторної оптимізації, що враховують невизначеність параметрів, яка задана за допомогою нечітких множин, а також розробки методів розв'язування таких задач з подальшим дослідженням ефективності цих методів.

РОЗДІЛ 2. ОПЕРАЦІЇ ТА ВІДНОШЕННЯ НАД НЕЧІТКИМИ ЧИСЛАМИ

В розділі вводяться операції та відношення над нечіткими числами необхідні для моделювання та розв'язування задач комбінаторної оптимізації.

2.1. Означення нечіткого числа

Означення 2.1. (*Див.*, наприклад, [99, 104]). Нечітким числом a назвемо нечітку множину (див., зокрема, [63, 73, 78]) вигляду $a=\{(a_1|\mu_1),\dots,(a_k|\mu_k)\}$, де $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, $a_i\in R^1$, $\forall i\in J_k$ – носій нечіткої множини, $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k\}$, $\mu_i\in R^1$, $\forall i\in J_k$ – множина значень функції належності, $0\le \mu_i\le 1$, $\forall i\in J_k$. (Тут і далі через J_k позначається множина перших k натуральних чисел.)

Зауважимо, що дійсне число α можна представити як нечітке число $a=\{(\alpha|1,0)\}$.

Введемо поряд із поняттями суми та лінійної впорядкованості нечітких чисел поняття характеристичного порівнювача (функціоналу) $H(x)$ нечіткого числа x як $H(x): X\to R^1$, який діє з множини нечітких чисел X в R^1 (в множину дійсних чисел) та узагальнює такі метричні властивості дійсного числа:

1) при $x\in R^1$ повинна виконуватись рівність $H(x)=x$;

2) для введеної певним чином лінійної впорядкованості $\prec$ на множині нечітких чисел X має виконуватись правило: якщо $x\prec y$, то $H(x)\le H(y)$, та якщо $H(x)\le H(y)$, то $x\prec y$;

3) для введеної певним чином суми $x+y$ нечітких чисел $x,y\in X$ повинна виконуватись рівність $H(x+y)=H(x)+H(y)$;

4) для суми нечітких чисел має виконуватись правило: якщо $x\prec y$, то $x+z\prec y+z$.

Таким чином, необхідно поняття суми, лінійної впорядкованості і характеристичного порівнювача, які б відповідали переліченим властивостям.

2.2. Сума нечітких чисел

2.2.1. Означення суми нечітких чисел

Сума нечітких чисел, утворена за допомогою узагальненого принципу Заде (див. п. 1.2), не задовольняє нас, оскільки не має властивостей необхідних для моделювання задач комбінаторної оптимізації (зокрема, не виконується $H(x+y)=H(x)+H(y)$), тому вводимо інше означення суми нечітких чисел, а саме наступним чином.

Суму $A+B$ двох нечітких чисел $A=\{(a_1 \mid \mu_1^A),\ldots,(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A)\}$ і $B=\{(b_1 \mid \mu_1^B),\ldots,(b_\beta \mid \mu_\beta^B)\}$ утворимо за допомогою побудови множини пар

$$\tilde{C}^*=\{(\tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}}),\ldots,(\tilde{c}_\eta \mid \mu_\eta^{\tilde{C}})\}=$$

$$=\left\{\left(a_1+b_1 \left| \frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_1+b_\beta \left| \frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\right.$$

$$\left(a_2+b_1 \left| \frac{\mu_2^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_2+b_\beta \left| \frac{\mu_2^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),$$

$$\ldots,$$

$$\left.\left(a_\alpha+b_1 \left| \frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta \left| \frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\right\}. \quad (2.1)$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta$, де $\eta = \alpha\beta$, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta\}$. Основа $S(\tilde{C})$ мультимножини $\tilde{C}$: $S(\tilde{C}) = \{c_1, \ldots, c_r\}$ – це носій нечіткого числа $A + B = \{(c_1 | \mu)_1, \ldots, (c_r | \mu_r)\}$. Значення функції належності знаходять за правилом:

$$\mu_t = \sum_{\forall i \in J_\eta :\, c_t = \tilde{c}} \mu_i^{\tilde{C}}, \; i \in J_\eta, t \in J_r \tag{2.2}$$

Тобто, значення μ_t обирається як сума серед чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$, а r – число різних елементів в $\tilde{C}$.

Таким чином, можна дати таке означення.

Означення 2.2. [96–105]. Сумою двох нечітких чисел $A + B$ називається нечітке число $C = \{(c_1 | \mu_1), \ldots, (c_r | \mu_r)\}$, де $\{c_1, \ldots, c_r\} = S(\tilde{C})$ – основа мультимножини $\{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta\}$, що визначається (2.1), а значення μ_t означається (2.2).

Наведемо приклад знаходження суми двох нечітких чисел.

Приклад 2.1. Знайти суму двох нечітких чисел $A = \{(1|0,4), (2|0,6)\}$ і $B = \{(3|0,9), (4|0,6)\}$.

Спочатку знайдемо величини $\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A$, $\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B$, що використовуються у формулі (2.1): $\alpha = \beta = 2$, $\sum_{i=1}^{2} \mu_i^A = 0,4 + 0,6 = 1$, $\sum_{j=1}^{2} \mu_j^B = 0,9 + 0,6 = 1,5$.

Будуємо множину пар $\tilde{C}^*$ за правилом (2.1):

$$\tilde{C}^* = \left(\left(a_1 + b_1 \left| \frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{2} \mu_i^A} \cdot \frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{2} \mu_j^B} \right.\right), \left(a_1 + b_2 \left| \frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{2} \mu_i^A} \cdot \frac{\mu_2^B}{\sum_{j=1}^{2} \mu_j^B} \right.\right), \right.$$

$$\left\{\left(a_2+b_1\left|\frac{\mu_2^A}{\sum\limits_{i=1}^{2}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right),\left(a_2+b_2\left|\frac{\mu_2^A}{\sum\limits_{i=1}^{2}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_2^B}{\sum\limits_{j=1}^{2}\mu_j^B}\right.\right)\right\}=$$

$$=\left\{\left(1+3\left|\frac{0,4}{1}\cdot\frac{0,9}{1,5}\right.\right),\left(1+4\left|\frac{0,4}{1}\cdot\frac{0,6}{1,5}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(2+3\left|\frac{0,6}{1}\cdot\frac{0,9}{1,5}\right.\right),\left(2+4\left|\frac{0,6}{1}\cdot\frac{0,6}{1,5}\right.\right)\right\}=$$

$$=\{(4|0,24),(5|0,16),(5|0,36),(6|0,24)\}.$$

Перші елементи множини пар $\tilde{C}^*$ утворюють мультимножину $\{4, 5, 5, 6\}$. Основа мультимножини $S(\tilde{C})=\{4,5,6\}$. Згідно правила (2.2), для елементу 5 функція належності дорівнюватиме сумі $0{,}16+0{,}36=0{,}52$. Таким чином, сума чисел заданих чисел $A+B=\{(4|0,24),(5|0,52),(6|0,24)\}$.

Означення 2.3. [96–100, 105]. Сумою трьох нечітких чисел $A=\{(a_1|\mu_1^A),\dots,(a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B=\{(b_1|\mu_1^B),\dots,(b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ та $D=\{(d_1|\mu_1^D),\dots,(d_\delta|\mu_\delta^D)\}$ назвемо нечітке число $A+B+D=E+D$, де $E=A+B$.

2.2.2. Доведення тверджень про комутативність та асоціативність суми нечітких чисел

Твердження 2.1. [96, 97, 105]. Операція суми для нечітких чисел комутативна, тобто $A+B=B+A$.

Доведення. При утворенні множини пар $\tilde{C}^*$ використовуються наступні операції: додавання a_i+b_j і знаходження $\frac{\mu_i^A}{\sum\limits_{k=1}^{\alpha}\mu_k^A}\cdot\frac{\mu_j^B}{\sum\limits_{t=1}^{\beta}\mu_t^B}$, $i\in J_\alpha$, $j\in J_\beta$. Оскільки ці операції комутативні:

$a_i + b_j = b_j + a_i$, $\frac{\mu_i^A}{\sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k^A} \cdot \frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta} \mu_t^B} = \frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta} \mu_t^B} \cdot \frac{\mu_i^A}{\sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k^A}$, то множина пар $\tilde{C}^{A+B}$, отримана при додаванні чисел A і B, буде ідентична множині пар $\tilde{C}^{B+A}$, отриманій при додаванні чисел B і A.

Твердження 2.2. [96, 97, 105]. Операція суми для нечітких чисел асоціативна, тобто $(A+B)+D = A+(B+D)$.

Доведення. При утворенні множини пар $\tilde{C}^*$ використовуються наступні операції: додавання $(a_i + b_j) + d_k$ і знаходження $\left(\frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha} \mu_s^A} \cdot \frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta} \mu_t^B} \right) \cdot \frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta} \mu_r^D}$. Оскільки ці операції асоціативні: $(a_i + b_j) + d_k = a_i + (b_j + d_k)$ і

$$\left(\frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha} \mu_s^A} \cdot \frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta} \mu_t^B} \right) \cdot \frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta} \mu_r^D} = \frac{\mu_i^A}{\sum_{s=1}^{\alpha} \mu_s^A} \cdot \left(\frac{\mu_j^B}{\sum_{t=1}^{\beta} \mu_t^B} \cdot \frac{\mu_k^D}{\sum_{r=1}^{\delta} \mu_r^D} \right), \quad i \in J_\alpha,$$

$j \in J_\beta$, $k \in J_\delta$, то множина пар $\tilde{C}^{(A+B)+D}$ буде ідентична множині пар $\tilde{C}^{A+(B+D)}$.

Аналогічно до суми трьох нечітких чисел визначається сума будь-якої кількості чисел $a_1, \ldots, a_n$: $a_1 + \ldots + a_n = (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n$, $n \geq 3$.

З останніх тверджень випливає, що суму n нечітких чисел $a_i = \left\{ \left(g_1^i \mid \mu_1^i \right), \ldots, \left(g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i \right) \right\}$, $i \in J_n$ можна визначати ітеративно, тобто спочатку знаходимо суму двох нечітких чисел, потім додаємо отримане нечітке число до третього нечіткого числа і так далі. Оскільки операція суми нечітких чисел є комутативною (див. твердження 2.1) і асоціативною (див. твердження 2.2), то порядок додавання n чисел значення не має.

2.3. Характеристичний порівнювач нечітких чисел

Дамо один з можливих варіантів введення характеристичного порівнювача (функціоналу) $H(x)$ нечіткого числа x: $H(x): X \to R^1$, (який (варіант) збігається з методом дефазифікації нечіткого числа за методом центра ваги (див. п. 1.2.)) наступним чином.

Означення 2.4. [97, 98, 100]. Характеристичним порівнювачем (функціоналом) $H(x): X \to R^1$ нечіткого числа $A=\left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right), \ldots, \left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$ будемо називати функцію, що нечіткому числу $A \in X$ ставить у відповідність число $H(A) \in R^1$ за правилом:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A}. \tag{2.3}$$

2.4. Впорядкування нечітких чисел за спаданням та неспаданням

Нехай задані два нечітких числа: $A=\left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right), \ldots, \left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$ і $B=\left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right), \ldots, \left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$. Позначимо $a=\left\{a_1, \ldots, a_\alpha\right\}$, $b=\left\{b_1, \ldots, b_\beta\right\}$, $u=a \bigcup b=\left\{u_1, \ldots, u_\gamma\right\}$. Тоді, число A можна записати у вигляді $A^u=\left\{\left(u_1 \mid \mu_1^{A^u}\right), \ldots, \left(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{A^u}\right)\right\}$, де $\mu_i^{A^u}=\begin{cases}\mu_j^A, \text{ якщо } u_i=a_j \in a \\ 0, \text{ якщо } u_i \notin a\end{cases}$.

Число B запишеться у вигляді: $B^u=\left\{\left(u_1 \mid \mu_1^{B^u}\right), \ldots, \left(u_\gamma \mid \mu_\gamma^{B^u}\right)\right\}$, де

$$\mu_i^{B^u}=\begin{cases}\mu_j^B, \text{ якщо } u_i=b_j \in b \\ 0, \text{ якщо } u_i \notin b\end{cases}$$

Порядок для нечітких чисел ведемо так.

Означення 2.5. [97, 98, 100]. Будемо називати два нечітких числа A і B впорядкованими за зростанням $A < B$ тоді, коли:

а) або $\dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} < \dfrac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, тобто, коли $H(A) < H(B)$;

б) або $H(A) = H(B)$, тобто $\dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} = \dfrac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \cdot \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, але $\mu_1^{A''} = \mu_1^{B''}$, ..., $\mu_k^{A''} = \mu_k^{B''}$, $\mu_{k+1}^{A''} < \mu_{k+1}^{B''}$ $(k < \gamma)$.

І казати, що A передує B за зростанням.

Приклад 2.2. Знайти порядок чисел $A = \{(1|0,4), (2|0,6)\}$ і $B = \{(3|0,9), (4|0,6)\}$.

Спершу знайдемо величини $\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A$, $\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B$: $\alpha = \beta = 2$, $\sum_{i=1}^{2} \mu_i^A = 0,4 + 0,6 = 1$, $\sum_{j=1}^{2} \mu_j^B = 0,9 + 0,6 = 1,5$.

Знайдемо $H(A)$ і $H(B)$:

$$H(A) = \frac{\sum_{i=1}^{2} a_i \cdot \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{2} \mu_i^A} = \frac{1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6}{1} = 1,6;$$

$$H(B) = \frac{\sum_{j=1}^{2} b_j \cdot \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{2} \mu_j^B} = \frac{3 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,6}{1,5} = \frac{5,1}{1,6} = 3,1875.$$

$H(A) < H(B)$, отже, згідно означення 2.5а, $A < B$.

Приклад 2.3. Знайти порядок чисел $A=\{(5|0,5),(6|1),(7|0,5)\}$ і $B=\{(1|0,125),(6|0,75),(11|0,125)\}$.

Спершу знайдемо величини $\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A$, $\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B$: $\alpha=\beta=3$, $\sum_{i=1}^{3}\mu_i^A=0,5+1+0,5=2$, $\sum_{j=1}^{3}\mu_j^B=0,125+0,75+0,125=1$.

Знайдемо $H(A)$ і $H(B)$:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i\cdot\mu_i^A}{\sum_{i=1}^{3}\mu_i^A}=\frac{5\cdot0,5+6\cdot1+7\cdot0,5}{2}=6;$$

$$H(B)=\frac{\sum_{j=1}^{3}b_j\cdot\mu_j^B}{\sum_{j=1}^{3}\mu_j^B}=\frac{1\cdot0,125+6\cdot0,75+11\cdot0,125}{1}=6.$$

Отже, $H(A))=H(B)$.

Запишемо числа A і B у вигляді A^u і B^u:

$$u=\{5,6,7\}\cup\{1,6,11\}=\{1,5,6,7,11\},$$

$$A^u=\{(1|0),(5|0,5),(6|1),(7|0,5),(11|0)\},$$

$$B^u=\{(1|0,125),(5|0),(6|0,75),(7|0),(11|0,125)\}.$$

Порівнюємо відповідні функції належності: $\mu_1^{A^u}=0$, $\mu_1^{B^u}=0,125$, $\mu_1^{A^u}<\mu_1^{B^u}$. Таким чином, оскільки $H(A)=H(B)$, а $\mu_1^{A^u}<\mu_1^{B^u}$ з означенням 2.5б випливає, що $A<B$.

Означення 2.6. [97, 98, 100]. Будемо називати два нечітких числа A і B впорядкованими за неспаданням порядком $\prec$ (позначати $A\prec B$) тоді, коли:

а) або $A < B;$

б) або $A = B,$ тобто тоді, коли $a_i = b_i$ і $\mu_i^A = \mu_i^B$, $\forall i$.

2.5. Обґрунтування властивостей введених операцій та відношень з нечіткими числами

2.5.1. Про лінійність порядку нечітких чисел

Покажемо, що порядок $\prec$ є лінійним.

Теорема 2.3. [97, 100]. Порядок $\prec$, введений означеннями 2.5 та 2.6, є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним, тобто лінійним.

Доведення.

1) Порядок $\prec$ є рефлексивним: $A \prec A$ (згідно означення 2.6).

2) Антисиметричність означає: якщо $A \prec B,$ $B \prec A,$ то це свідчить, що $A = B$. Одночасно $A \prec B$ та $B \prec A$ для введеного порядку $\prec$ можливо лише у випадку б) означення 2.6, тобто $A = B$. Тобто порядок є антисиметричним.

3) Транзитивність означає: якщо $A \prec B,$ $B \prec C,$ то $A \prec C$. Можливі наступні випадки для пари *A, B*: $A < B$ (2.5а); $A < B$ (2.5б); $A = B$ (2.6б); для пари *B, C*: $B < C$ (2.5а); $B < C$ (2.5б); $B = C$ (2.6б).

Тут і далі (2.5а), (2.5б), (2.6б) – означає: згідно означення 2.5 (або 2.6), пункту а (або б) відповідно.

Таким чином, можливі 9 пар ситуацій:

1) $A < B$ (2.5а), $B < C$ (2.5а). $H(A) < H(B)$, $H(B) < H(C)$. З цього випливає, що $H(A) < H(B)$, $A < C$ за (2.5а). Отже $A \prec C$.

2) $A < B$ (2.5а), $B < C$ (2.5б). $H(A) < H(B)$, $H(B) = H(C)$. З цього випливає, що $H(A) < H(C)$ за (2.5а). Значить $A \prec C$.

3) $A < B$ (2.5а), $B = C$ (2.6б). $H(A) < H(B)$, $H(B) = H(C)$. З цього випливає, що $H(A) < H(C)$ за (2.5а). Отримали: $A \prec C$.

4) $A < B$ (2.5б), $B < C$ (2.5а). $H(A) = H(B)$, $H(B) < H(C)$. З цього випливає, що $H(A) < H(C)$ за (2.5а). Таким чином, $A \prec C$.

5) $A < B$ (2.5б), $B < C$ (2.5б). $H(A) = H(B)$, $H(B) = H(C)$. З цього випливає, що $H(A) = H(C)$ за (2.5б, або 2.6б). Тобто $A \prec C$.

6) $A < B$ (2.5б), $B = C$ (2.6б). $H(A) = H(B)$, $H(B) = H(C)$. З цього випливає, що $H(A) = H(C)$ за (2.5б, або 2.6б). Тобто $A \prec C$.

7) $A = B$ (2.6б), $B < C$ (2.5а). $H(A) = H(B)$, $H(B) < H(C)$. З цього випливає, що $H(A) < H(C)$ за (2.5а). Тобто $A \prec C$.

8) $A = B$ (2.6б), $B < C$ (2.5б). $H(A) = H(B)$, $H(B) = H(C)$. З цього випливає, що $H(A) = H(C)$ за (2.5б, або 2.6б). Тобто $A \prec C$.

9) $A = B$ (2.6б), $B = C$ (2.6б), тобто $A = C$ (відношення рівності двох нечітких чисел, очевидно, є транзитивним). Отже А $\prec C$.

Отже, доведено, що у всіх дев'яти випадках транзитивність виконується.

Таким чином, доведено, що $\prec$ є лінійним порядком.

2.5.2. Значення характеристичного порівнювача дійсного числа

Покажемо, що для введених таким способом характеристичного порівнювача, суми та лінійного порядку виконуються зазначені вище (у пункті 2.1) властивості.

Твердження 2.4. [97, 100]. Коли $x \in R^1$, то $H(x) = x$.

Доведення. Якщо x є дійсним числом, то x має вигляд $x = \{(x|1)\}$. Характеристичний порівнювач $H(x)$ приймає вигляд $H(x) = \dfrac{x \cdot 1}{1} = x$, що і треба було довести.

2.5.3. Властивість характеристичного порівнювача суми двох нечітких чисел

Теорема 2.5. [97, 100]. Для будь-яких двох нечітких чисел $A = \{(a_1 \,|\, \mu_1^A), \ldots, (a_\alpha \,|\, \mu_\alpha^A)\}$, $B = \{(b_1 \,|\, \mu_1^B), \ldots, (b_\beta \,|\, \mu_\beta^B)\}$ і характеристичного порівнювача H, заданого за правилом (2.3), виконується

$$H\left(A+B\right)=H\left(A\right)+H\left(B\right). \tag{2.4}$$

Доведення.

Утворимо суму чисел A та B:

$$A+B=\left\{\left(a_1+b_1\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_1+b_\beta\left|\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\right.$$

$$\left.\left(a_\alpha+b_1\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\right\}.$$

Знайдемо характеристичний порівнювач $H\left(A+B\right)$:

$$H\left(A+B\right)=$$

$$=\left((a_1+b_1)\cdot\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\left(a_1+b_\beta\right)\cdot\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)^{-1}+$$

$$+\ldots+\left((a_\alpha+b_1)\cdot\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\left(a_\alpha+b_\beta\right)\cdot\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right)^{-1}. \qquad (2.5)$$

Спростимо знаменник виразу (2.5):

$$\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=\frac{\mu_1^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)+\ldots+\mu_\alpha^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{\mu_1^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}+\ldots+\frac{\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}=\frac{\mu_1^A+\ldots+\mu_\alpha^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}=1.$$

Таким чином, знаменник виразу (2.5) дорівнює 1.
Спростимо чисельник виразу (2.5):

$$\left(a_1+b_1\right)\cdot\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\left(a_1+b_\beta\right)\cdot\frac{\mu_1^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+$$

$$+\left(a_\alpha+b_1\right)\cdot\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\left(a_\alpha+b_\beta\right)\cdot\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\cdot\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{a_1\cdot\mu_1^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)+\ldots+a_\alpha\cdot\mu_\alpha^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$+\frac{b_1\cdot\mu_1^B\cdot\left(\mu_1^A+\ldots+\mu_\alpha^A\right)+\ldots+b_\beta\cdot\mu_\beta^B\cdot\left(\mu_1^A+\ldots+\mu_\alpha^A\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{a_1\cdot\mu_1^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{a_\alpha\cdot\mu_\alpha^A\left(\mu_1^B+\ldots+\mu_\beta^B\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+$$

$$+\frac{b_1\cdot\mu_1^B\cdot\left(\mu_1^A+\ldots+\mu_\alpha^A\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{b_\beta\cdot\mu_\beta^B\cdot\left(\mu_1^A+\ldots+\mu_\alpha^A\right)}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{a_1\cdot\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}+\ldots+\frac{a_\alpha\cdot\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}+\frac{b_1\cdot\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}+\ldots+\frac{b_\beta\cdot\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=$$

$$=\frac{a_1\cdot\mu_1^A+\ldots+a_\alpha\cdot\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}+\frac{b_1\cdot\mu_1^B+\ldots+b_\beta\cdot\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=H(A)+H(B).$$

Отже, вираз (2.5) приймає вигляд: $H(A+B)=H(A)+H(B)$, що і треба було довести.

Приклад 2.4. Нехай є два нечітких числа $A=\{(1|0,4),(2|0,6)\}$ та $B=\{(3|0,9),(4|0,6)\}$. Покажемо, що, використавши суму двох нечітких чисел за принципом узагальнення Заде (а не за означенням 2.2.), теорема 2.5, про те, що $H(A+B)=H(A)+H(B)$, не виконується.

Знаходимо суму чисел A та B за принципом узагальнення Заде. Для цього утворимо множину пар C^*:

$$C^* = \{(1+3 \mid max(0,4;0,9)),(1+4 \mid max(0,4;0,6)),$$

$$(2+3 \mid max(0,6;0,9)),(2+4 \mid max(0,6;0,6))\} = .$$

$$= \{(4 \mid 0,9),(5 \mid 0,6),(5 \mid 0,9),(6 \mid 0,6)\}.$$

Оскільки елемент 5 зустрічається двічі, то функція належності для нього обирається як мінімальна серед чисел 0,6 та 0,9, отже: $A+B=\{(4 \mid 0,9),(5 \mid 0,6),(6 \mid 0,6)\}$.

Знаходимо характеристичні порівнювачі чисел A та B за правилом (2.3):

$$H(A)=\frac{1\cdot 0,4+2\cdot 0,6}{4+0,6}=\frac{0,4+1,2}{1}=1,6;$$

$$H(B)=\frac{3\cdot 0,9+4\cdot 0,6}{0,9+0,6}=\frac{2,7+2,4}{1,5}=\frac{5,1}{1,5}=3,4\,.$$

Отже,

$$H(A)+H(B)=1,6+3,4=5\,.$$

Знаходимо характеристичний порівнювач $A+B$:

$$H(A+B)=\frac{4\cdot 0,9+5\cdot 0,6+6\cdot 0,6}{0,9+0,6+0,6}=\frac{10,2}{2,1}=4\frac{6}{7}.$$

Бачимо, що $H(A+B)\neq H(A)+H(B)$.

2.5.4. Про зв'язок порядку та суми нечітких чисел

Теорема 2.6. [97, 100]. Для будь-яких трьох нечітких чисел $x=\{(x_1 \mid \mu_1^x),\ldots,(x_\alpha \mid \mu_\alpha^x)\}$, $y=\{(y_1 \mid \mu_1^y),\ldots,(y_\beta \mid \mu_\beta^y)\}$,

$z=\left\{\left(z_1\,|\,\mu_1^z\right),\ldots,\left(z_\gamma\,|\,\mu_\gamma^z\right)\right\}$, таких, що $\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^x=\sum_{k=1}^{\beta}\mu_k^y=\sum_{k=1}^{\gamma}\mu_k^z=1$, $x_1<\ldots<x_\alpha$, $y_1<\ldots<y_\beta$, $z_1<\ldots<z_\gamma$, виконується: якщо $x\prec y$, то $x+z\prec y+z$.

Доведення.

Якщо $x\prec y$, то за означенням лінійного порядку

$$H(x)\le H(y). \tag{2.6}$$

Отже, за теоремою 2.5 маємо:

$$H(x+z)=H(x)+H(z);$$

$$H(y+z)=H(y)+H(z).$$

Оскільки виконується (2.6), то $H(x)+H(z)\le H(y)+H(z)$ та $H(x+z)\le H(y+z)$.

За означенням, якщо $H(x+z)<H(y+z)$, то $x+z\prec y+z$.

Якщо $x+z=y+z$ (отже $H(x+z)=H(y+z)$), то $x+z\prec y+z$.

У випадку $H(x+z)=H(y+z)$, $x+z\ne y+z$, тобто $x\ne y$ маємо $\exists i$ $\mu_1^{x^u}=\mu_1^{y^u},\ldots,\mu_i^{x^u}=\mu_i^{y^u}, \mu_{i+1}^{x^u}<\mu_{i+1}^{y^u}$.

Покажемо, що в цьому випадку $\exists j$ $\mu_1^{x^u+z^u}=\mu_1^{y^u+z^u}$, ..., $\mu_j^{x^u+z^u}=\mu_j^{y^u+z^{uu}}$, але $\mu_{j+1}^{x^u+z^u}<\mu_{j+1}^{y^u+z^u}$.

Нехай $U=\{u_1,\ldots,u_\delta\}=\{x_1,\ldots,x_\alpha\}\bigcup\{y_1,\ldots,y_\beta\}\bigcup\{z_1,\ldots,z_\gamma\}$, $u_1<\ldots<u_\delta$. Тоді числа x, y, z можна записати у вигляді: $x^u=\left\{\left(u_1\,|\,\mu_1^{x^u}\right),\ldots,\left(u_\delta\,|\,\mu_\delta^{x^u}\right)\right\}$, $y^u=\left\{\left(u_1\,|\,\mu_1^{y^u}\right),\ldots,\left(u_\delta\,|\,\mu_\delta^{y^u}\right)\right\}$, $z^u=$ $=\left\{\left(u_1\,|\,\mu_1^{z^u}\right),\ldots,\left(u_\delta\,|\,\mu_\delta^{z^u}\right)\right\}$, $\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}=1$.

Знайдемо суму x^u+z^u. Згідно означення 2.2 маємо:

$$x^u + z^u = \left\{ \left(u_1 + u_1 \left| \frac{\mu_1^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots, \right.$$

$$\left(u_1 + u_\delta \left| \frac{\mu_1^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_\beta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots,$$

$$\left. \left(u_\delta + u_1 \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots, \left(u_\delta + u_\delta \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_\delta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right) \right\}.$$

Знайдемо суму $y^u + z^u$:

$$y^u + z^u = \left\{ \left(u_1 + u_1 \left| \frac{\mu_1^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \cdot \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots, \right.$$

$$\left(u_1 + u_\delta \left| \frac{\mu_1^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \cdot \frac{\mu_\beta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots,$$

$$\left. \left(u_\delta + u_1 \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right), \ldots, \left(u_\delta + u_\delta \left| \frac{\mu_\delta^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_\delta^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}} \right. \right) \right\}.$$

Порівнюючи, $x^u + z^u$ та $y^u + z^u$, бачимо, що перші елементи пар для обох сум однакові і утворюють матрицю U наступного виду:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 + u_1 & u_1 + u_2 & \dots & u_1 + u_i & u_1 + u_{i+1} & \dots & u_1 + u_\delta \\ u_2 + u_1 & u_2 + u_2 & \dots & u_2 + u_i & u_2 + u_{i+1} & \dots & u_2 + u_\delta \\ \dots & & & & & & \\ u_i + u_1 & u_i + u_2 & \dots & u_i + u_i & u_i + u_{i+1} & \dots & u_i + u_\delta \\ u_{i+1} + u_1 & u_{i+1} + u_2 & \dots & u_{i+1} + u_i & u_{i+1} + u_{i+1} & \dots & u_{i+1} + u_\delta \\ \dots & & & & & & \\ u_\delta + u_1 & u_\delta + u_2 & \dots & u_\delta + u_i & u_\delta + u_{i+1} & \dots & u_\delta + u_\delta \end{pmatrix}.$$

Проаналізуємо матрицю U:

1) матриця є симетричною відносно головної діагоналі, тобто $u_s + u_r = u_r + u_s$, $s \neq r$, $s, r \in J_\delta$;

2) елементи в кожному рядку та стовпці впорядковані за зростанням.

Виділимо з матриці U матрицю U':

$$U' = \begin{pmatrix} u_1 + u_1 & u_1 + u_2 & \dots & u_1 + u_i \\ u_2 + u_1 & u_2 + u_2 & \dots & u_2 + u_i \\ \dots & & & \\ u_i + u_1 & u_i + u_2 & \dots & u_i + u_i \end{pmatrix}.$$

Порівняємо функції належності сум $x^u + z^u$, $y^u + z^u$ для елементів матриці U'.

Елементу $u_s + u_r$, де $s \le i$, $r \le i$, відповідає функція належності $\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{x^u}} \cdot \frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}}$ суми $x^u + z^u$ та $\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{y^u}} \cdot \frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta} \mu_k^{z^u}}$ суми $y^u + z^u$.

Порівнюючи $\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\cdot\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$ та $\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\cdot\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$ бачимо, що:

1) $\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}=1;$

2) $\mu_r^{z^u}$ – входить в обидві величини, що порівнюємо, тому не впливає;

3) $\mu_s^{x^u}=\mu_s^{y^u}$, оскільки $s\le i$, а нам дано, що $\mu_1^{x^u}=\mu_1^{y^u}$, …, $\mu_i^{x^u}=\mu_i^{y^u}$.

Таким чином, $\frac{\mu_s^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\cdot\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}=\frac{\mu_s^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\cdot\frac{\mu_r^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$, для $\forall s,r\in J_i$.

В матриці U, в тій її частині, що не включає матриці U', найменшим елементом є $u_{i+1}+u_1$, оскільки $u_1<u_2<\ldots<u_\delta$.

Порівняємо функції належності для елементу $u_{i+1}+u_1$ сум x^u+z^u, y^u+z^u, а саме величини $\frac{\mu_{i+1}^{x^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}}\cdot\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$ та $\frac{\mu_{i+1}^{y^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}}\cdot\frac{\mu_1^{z^u}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}}$:

1) $\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y^u}=\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z^u}=1;$

2) $\mu_r^{z^u}$ – входить в обидві величини, що порівнюємо, тому не впливає;

3) $\mu_{i+1}^{x^u}<\mu_{i+1}^{y^u}$, дано за умовою.

Таким чином, робимо висновок, що $\frac{\mu_{i+1}^{x''}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{x''}} \cdot \frac{\mu_1^{z''}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z''}} <$ $\frac{\mu_{i+1}^{y''}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{y''}} \cdot \frac{\mu_1^{z''}}{\sum_{k=1}^{\delta}\mu_k^{z''}}$. Тобто ми, довели, що $\exists j \quad \mu_1^{x''+z''} = \mu_1^{y''+z''}$, ..., $\mu_j^{x''+z''} = \mu_j^{y''+z'''}$, але $\mu_{j+1}^{x''+z''} < \mu_{j+1}^{y''+z''}$.

Отже, теорема доведена.

2.5.5. Про властивості порядку нечітких чисел

Твердження 2.7. [97, 100]. $x \prec y$, тоді і тільки тоді, коли $H(x) \le H(y)$.

Доведення.

Якщо $H(x) \le H(y)$, то за означенням порядку $\prec$ маємо: $x \prec y$. Якщо $x \prec y$, то

або 1) при $x \ne y$ та $H(x) \ne H(y)$, отже: $H(x) < H(y)$;

або 2) при $x \ne y \quad \exists i \quad \mu_1^{x''} = \mu_1^{y''}$, ..., $\mu_i^{x''} = \mu_i^{y''}$, $\mu_{i+1}^{x''} < \mu_{i+1}^{y''}$, та $H(x) = H(y)$;

або 3) $x = y$, $H(x) = H(y)$.

Отже в усіх можливих випадках з $x \prec y$ випливає $H(x) \le H(y)$.

2.5.6. Про не суттєвість обмеження, що сума значень функції належності має бути одиницею

Можна поставити питання: наскільки суттєвим в теоремі 2.6 є обмеження, що сума значень функції належності має бути одиницею. Відповідь на це питання є предметом даного підпункту.

Покажемо, що має місце позитивна відповідь на питання, що поставлене на початку підпункту: тобто вказана властивість суми не є суттєвою.

Теорема 2.8. [106]. Якщо $A=\left\{\left(a_1\mid\mu_1^A\right),\ldots,\left(a_\alpha\mid\mu_\alpha^A\right)\right\}$, $B=\left\{\left(b_1\mid\mu_1^B\right),\ldots,\left(b_\beta\mid\mu_\beta^B\right)\right\}$, $C=\left\{\left(c_1\mid\mu_1\right),\ldots,\left(b_r\mid\mu_r\right)\right\}$, $C=A+B$ за означенням 2.2, то

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i=1. \qquad (2.7)$$

Доведення.

Сума C знаходиться за допомогою множини $\tilde{C}$ з (2.1) та підрахунку μ_t $\forall t\in J_r$ за формулою (2.2). Покажемо, що (2.7) має місце.

Звернемо увагу, що множники вигляду

$$V_i=\frac{\mu_i^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}; \qquad (2.8)$$

$$U_j=\frac{\mu_j^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}; \qquad (2.9),$$

що фігурують в функціях належності в (2.1) мають властивості:

$$\sum_{i=1}^{\alpha}V_i=\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{\mu_i^A}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}=1;\ \sum_{j=1}^{\beta}U_j=\sum_{j=1}^{\beta}\frac{\mu_j^B}{\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=1, \qquad (2.10)$$

оскільки знаменники сталі, і після винесення їх за знак сум маємо частки, в яких чисельники рівні знаменникам.

Далі покажемо, що сума значень функції належності в (2.1) є одиницею, тобто

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}V_iU_j=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\frac{\mu_i^A\mu_j^B}{\sum\limits_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A\sum\limits_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}=1. \qquad (2.11)$$

Це стає очевидним при використанні геометричної інтерпретації з рис. 2.1.

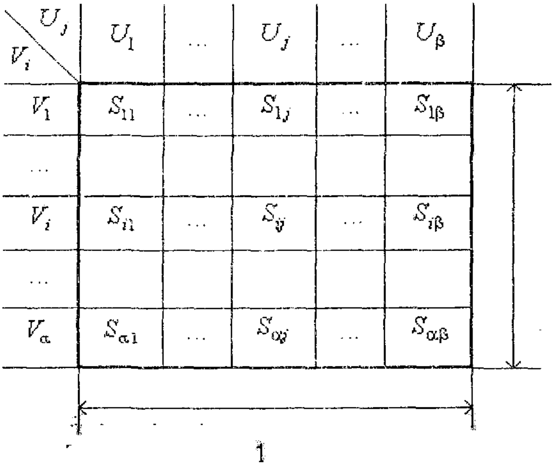


Рис. 2.1. Ілюстрація формули (2.11)

Позначимо $V_i U_j = S_{ij}$ і розглянемо цю величину, як площу прямокутника зі сторонами V_i та U_j. Тоді (2.11) – це сума площ $\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} S_{ij}$, а оскільки має місце (2.10) – довжини сторін квадрату, розбитих на відрізки U_i та V_j відповідно, рівні одиниці, то очевидно, що $\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} S_{ij} = 1$, тобто має місце формула (2.11). При побудові C за (2.2) деякі $V_i U_j$ додаються зі зменшенням кількості пар i, j без заміни суми, що утворює (2.7). Отже, (2.7) доведено.

Зауваження. Отже, вже після першого додавання в сумі декількох нечітких чисел маємо як результат C з властивістю (2.7). Тобто це дозволяє вважати, що додаються нечіткі числа з такою властивістю (сума значень функції належності рівна одиниці), оскільки належність чи відсутність такої операції не впливає на результат суми. Тому використання теореми 6: якщо

$x \prec y$, то $x+z \prec y+z$ для нечітких x, y, z практично не обмежується необхідністю для кожного з них мати властивість (2.7).

2.5.7. Про ще одну властивість суми та порядку

При використанні операцій з нечіткими числами в переборних методах (типу методу гілок і меж) виникає питання: якщо $x \prec y$, а нечітке число z має додатні елементи носія, чи виконується властивість $x \prec y+z$ для суми та лінійного порядку. Використання цієї властивості в методі гілок та меж дозволило б організувати відсікання безперспективних множин допустимих розв'язків: якщо оцінка y гірша оцінки x, то її «збільшення» $y+z$ залишиться «гірше» x, тому в такому випадку працює відсікання підмножини.

Це питання, яке є предметом даного підпункту.

Покажемо, що «природна» для «чітких чисел» x, y, z, $(z>0)$ властивість: «якщо $x<y$, то $x<y+z$» розповсюджується на нечіткі числа з дискретними носіями і операціями суми та порядку $\prec$, введеними в вище.

Теорема 2.9. [106] Для будь-яких нечітких чисел $A=\left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right),\ldots,\left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$, $B=\left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right),\ldots,\left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$ та $C=$ $=\left\{\left(c_1 \mid \mu_1^C\right),\ldots,\left(c_\gamma \mid \mu_\gamma^C\right)\right\}$, $c_i \ge 0 \quad \forall i \in J_\gamma$ має місце властивість: якщо $A \prec B$, то $A \prec B+C$.

Доведення.

За твердженням 2.7 $x \prec y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \le H(y)$. Отже, якщо $A \prec B$, то

$$H(A) \le H(B) \tag{2.12}$$

і навпаки. За умов теореми маємо: $H(C)$ згідно (2.3) є величина додатна:

$$H(C) > 0, \tag{2.13}$$

тобто якщо (2.12) виконано, то з (2.12) та (2.13) маємо

$$H(A) \le H(B) + H(C). \tag{2.14}$$

За теоремою 2.5 формулу (2.14) переписуємо як

$$H(A) \le H(B+C). \tag{2.15}$$

А за твердженням 2.7 при $x = A;\ \ y = B + C$ маємо з (2.15), що $A \prec B + C$, що і треба було довести.

2.6. Максимум та мінімум нечітких чисел

Означення 2.8. [97, 98, 100]. Нечітке число A_1 будемо називати мінімумом з нечітких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_k$ чисел, якщо $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$.

Означення 2.9. [97, 98, 100]. Нечітке число A_k будемо називати максимумом з нечітких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_k$, чисел, якщо $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$.

2.7. Різниця нечітких чисел

Означення 2.10. [103, 107]. Різницею двох нечітких чисел $A = \left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right), \ldots, \left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$ і $B = \left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right), \ldots, \left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$ назвемо число, яке буде знаходитися як $A + (-1)B$. Добуток тут знаходимо згідно означення 1.7. з пункту 1.2.

2.8. Два способи введення ділення двох нечітких чисел

Означення 2.11. [107].

Введемо операцію ділення нечіткого числа $A = \left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right), \ldots, \left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$ на нечітке число $B = \left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right), \ldots, \left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$ наступним чином.

1 спосіб. Дефазифікуємо нечітке число $B = \left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right), \ldots, \left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$. Позначимо результат дефазифікації через число b. Тоді результатом діленням A / B двох нечітких чисел $A = \left\{\left(a_1 \mid \mu_1^A\right), \ldots, \left(a_\alpha \mid \mu_\alpha^A\right)\right\}$ і $B = \left\{\left(b_1 \mid \mu_1^B\right), \ldots, \left(b_\beta \mid \mu_\beta^B\right)\right\}$ назвемо число A / b.

В рамках монографії будемо розглядати дефазифікацію нечітких чисел за методом центра ваги (див. пункт 1.2).

2 спосіб. Ділити два нечітких числа за правилом узагальнення Заде. Цей спосіб детально розглянутий в розділі 1.2.

Приклад 2.5.

Нехай задані два нечітких числа: $A=\{(3|0,2),(4|0,3)\}$, $B=\{(1|0,2),(2|0,4)\}$. Знайти A/B.

1 спосіб. Дефазифікуємо число B:

$$b=1\cdot 0,2+2\cdot 0,4=0,2+0,8=1.$$

$$A/B=A/b=A/1=\{(3|0,2),(4|0,3)\}.$$

2 спосіб. Утворюємо множину пар $\tilde{C}^*$ за формулою 1.16:

$$\tilde{C}^*=\left\{\left(\tilde{c}_1\,|\,\mu_1^{\tilde{C}}\right),\ldots,\left(\tilde{c}_\eta\,|\,\mu_\eta^{\tilde{C}}\right)\right\}=$$

$$=\left\{(3/1|min[\,0,2;\,0,2]),(3/2|min[\,0,2;\,0,4]),(4/1|min\,[0,3;\,0,2]),\right.$$

$$\left.(4/2|min[0,3;\,0,4])\right\}=\{(3|0,2),(3/2|0,2),(4|0,2),(2|0,3)\}.$$

Отже, $A/B=\{(1,5|0,2),(2|0,3),(3|0,2),(4|0,2)\}$.

Приклад 2.6.

Нехай задані два нечітких числа: $A=\{(2|0,2),(4|0,1)\}$, $B=\{(1|0,2),(2|0,4)\}$. Знайти A/B.

Знаходимо A/B за 2-им способом. Утворюємо множину пар $\tilde{C}$ за формулою 1.16:

$$\tilde{C}^*=\left\{\left(\tilde{c}_1\,|\,\mu_1^{\tilde{C}}\right),\ldots,\left(\tilde{c}_\eta\,|\,\mu_\eta^{\tilde{C}}\right)\right\}=$$

$$=\left\{(2/1|min[0,2;\,0,2]),(2/2|min[0,2;\,0,4]),(4/1|min\,[0,1;\,0,2]),\right.$$

$$\left.(4/2|min\,[0,1;\,0,4])\right\}=\{(2|0,2),(1|0,2),(4|0,1),(2|0,1)\}.$$

Перші елементи утворюють мультимножину $\tilde{C}=\{1,\ 1,\ 2,\ 4\}$. Основа $S(\tilde{C})$ мультимножини $\tilde{C}$: $S(\tilde{C})=\{1,2,4\}$. Елемент 2 повторюється в мультимножині двічі, отже функція належності знаходиться за правилом (1.17) як $max\{0,2;\ 0,1\}$.

Отже, $A / B = \{(1|0,2),(2|0,2),(4|0,1)\}$.

2.9. Оцінка складності виконання операцій над нечіткими числами

Дамо оцінку складності виконання основних операцій над нечіткими числами.

Згідно [108], під часом роботи тут і далі розуміємо число елементарних кроків, які алгоритм виконує. В нашому випадку елементарними кроками будуть операції додавання, множення, ділення і порівняння.

Спершу оцінимо час роботи *для знаходження найбільшого або найменшого з двох нечітких чисел* a_1 і a_2, $a_i = \{(g_1^i\,|\mu_1^i),\dots,(g_{q_i}^i\,|\mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_2$, де $\{g_1^i,\dots,\ g_{q_i}^i\}$ – носій нечіткої множини a_i, а $\{\mu_1^i,\dots,\ \mu_{q_i}^i\}$ – множина значень функції належності. Позначимо $q = max(q_1, q_2)$.

Для знаходження $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необхідно виконати операцію множення не більше, ніж q раз, а операцію додавання не більше, ніж $q-1$. Для знаходження $\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1$ необхідно виконати операцію додавання не більше, ніж $q-1$. Для знаходження $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ необхідно виконати одну операцію ділення. Для визначення максимуму або мінімуму серед величин $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ і $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$ необхідно виконати одну операцію порівняння. Таким чином, для знаходження найбільшого або найменшого значення з двох нечітких чисел a_1 та a_2 час роботи складає не більше, ніж $q+(q-1)+q+(q-1)+1+(q-1)+(q-1)+2=6q-1$, тобто $\Theta(q)$, де Θ – асимптотично точна оцінка (див., напр., [108, с. 36]).

Аналогічно знаходимо *час роботи при визначенні найбільшого або найменшого серед* s *(* $s \geq 2$ *) нечітких чисел* a_i, $a_i = \{(g_1^i \mid \mu_1^i), \ldots, (g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i)\}$, $i \in J_s$, де $\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\}$ – носій нечіткої множини a_i, а $\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\}$ – множина значень функції належності. Нехай $q = max\, q_i$, $i \in J_s$. Для знаходження $\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1$ необхідно виконати операцію множення не більше, ніж q раз, а операцію додавання не більше, ніж $q-1$. Тобто для s чисел операція множення виконується не більше, ніж sq раз, а операція додавання не більше, ніж $s(q-1)$ раз. Для знаходження $\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1$ необхідно виконати операцію додавання не більше, ніж $q-1$. Для знаходження $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ необхідно виконати одну операцію ділення. Тобто для s чисел операція додавання виконується не більше ніж $s(q-1)$ раз, а операція ділення s раз. Для порівняння величин $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$, $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, …, $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s}{\sum_{i=1}^{q_s} \mu_i^s}$ необхідно: порівняти суми $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$ і $\dfrac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, і більшу (меншу) суму запам'ятати, після цього порівняти ту суму, що запам'ятали, з сумою $\frac{\sum_{i=1}^{q_3} g_i^3 \mu_i^3}{\sum_{i=1}^{q_3} \mu_i^3}$ і більшу (меншу) суму запам'ятати тощо. Тобто для порівняння величин $\frac{\sum_{i=1}^{q_1} g_i^1 \mu_i^1}{\sum_{i=1}^{q_1} \mu_i^1}$, $\frac{\sum_{i=1}^{q_2} g_i^2 \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{q_2} \mu_i^2}$, ..., $\frac{\sum_{i=1}^{q_s} g_i^s \mu_i^s}{\sum_{i=1}^{q_s} \mu_i^s}$ необхідно виконати $s-1$ операцію порівняння. Таким чином, для знаходження найбільшого або найменшого серед s нечітких чисел час роботи буде не більше, ніж $sq+s(q-1)+(s-1)+s(q-1)+s=3sq-1$, тобто $\Theta(sq)$.

Знайдемо *час роботи для визначення суми двох нечітких чисел* a_1 і a_2.

Для утворення множини пар $\tilde{C}^*$ за формулою (2.1) необхідно виконати максимум $q \cdot q = q^2$ операцій додавання і стільки ж операцій порівняння. Для утворення основи $S(\tilde{C})$ необхідно відсортувати масив чисел максимальної вимірності $q \cdot q$. Використаємо, наприклад, алгоритм швидкого сортування (див., напр., [108, с. 151]). Час роботи алгоритму швидкого сортування в гіршому випадку складає $\Theta\left((q \cdot q)^2\right) = \Theta\left(q^4\right)$.

Кожному елементу основи ставимо у відповідність, згідно формули (2.2), функцію належності, тобто в найгіршому випадку треба виконати $q \cdot q - 1 + q \cdot q - 1 = 2q^2 - 2$ операцій порівняння. Таким чином, час роботи для утворення суми двох нечітких чисел a_1 і a_2 буде не більше, ніж $q^2 + q^2 + q^4 + 2q^2 - 2 = q^4 + 4q^2 - 2$, тобто $\Theta\left(q^4\right)$.

Аналогічно знаходимо *час роботи для знаходження суми* s *нечітких чисел* a_i, $i \in J_s$, $s \geq 2$. Час роботи буде не більше, ніж $q^s + q^s + q^{2s} + 2q^s - 2 = q^{2s} + 4q^s - 2$, тобто $\Theta\left(q^{2s}\right)$.

Оцінимо час роботи для знаходження *добутку нечіткого числа* $a = \left\{\left(g_1 \mid \mu_1\right), \ldots, \left(g_q \mid \mu_q\right)\right\}$ *на чітке число* λ. Для знаходження λg_i, $i \in J_q$ необхідно виконати операцію множення q раз, тобто $\Theta(q)$.

Оцінимо час роботи для виконання операції *дефазифікації* за методом центра ваги для нечіткого числа $a = \left\{\left(g_1 \mid \mu_1\right), \ldots, \left(g_q \mid \mu_q\right)\right\}$. Для знаходження $\sum_{i=1}^{q} g_i \mu_i$ необхідно виконати операцію множення q раз, а операцію додавання $q-1$. Для знаходження $\sum_{i=1}^{q} \mu_i$ необхідно виконати операцію додавання $q-1$. Для знаходження $\dfrac{\sum_{i=1}^{q} g_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{q} \mu_i}$ необхідно виконати одну операцію ділення. Таким чином, для виконання операції дефазифікації час роботи складає $q + (q-1) + (q-1) + 1 = 3q - 1$, тобто $\Theta(q)$.

Знайдемо час роботи для знаходження результату *ділення* a_1 *на* a_2 *за першим способом*, $a_i = \left\{\left(g_1^i \mid \mu_1^i\right), \ldots, \left(g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i\right)\right\}$, $i \in J_2$, де $\left\{g_1^i, \ldots, g_{q_i}^i\right\}$ – носій нечіткої множини a_i, а $\left\{\mu_1^i, \ldots, \mu_{q_i}^i\right\}$ – множина значений функції належності. Позначимо $q = max\left(q_1, q_2\right)$.

Для дефазифікації числа a_2 необхідно виконати не більше ніж $3q-1$ операцій. Для ділення елементів носія нечіткого числа a_1 на величину, отриману в результаті дефазифікації числа a_2, необхідно виконати не більше ніж q операцій. Таким чином, час роботи складає не більше ніж $3q-1+q=4q-1$ операцій, тобто $\Theta(q)$.

Знайдемо час роботи для знаходження *результату ділення* a_1 *на* a_2 *за другим способом,* $a_i=\left\{\left(g_1^i \mid \mu_1^i\right),\ldots,\left(g_{q_i}^i \mid \mu_{q_i}^i\right)\right\}$, $i\in J_2$, де $\left\{g_1^i,\ldots, g_{q_i}^i\right\}$ – носій нечіткої множини a_i, а $\left\{\mu_1^i,\ldots,\mu_{q_i}^i\right\}$ – множина значений функції належності. Позначимо $q=max(q_1,q_2)$.

Операція ділення a_1 на a_2 за другим способом аналогічна операції знаходженню суми двох нечітких чисел, єдина відмінність полягаю в тому, що при утворенні множини пар $\tilde{C}$ необхідно виконати $q\cdot q=q^2$ операції ділення, а не додавання.

Час роботи для знаходження результату ділення a_1 на a_2 за другим способом буде не більше, ніж q^4+4q^2-2, тобто $\Theta\left(q^4\right)$.

2.10. Висновки до розділу

В розділі введенні необхідні для побудови моделей та розв'язування комбінаторних задач на нечітких множинах означення суми, різниці, ділення, лінійного порядку нечітких чисел, характеристичного порівнювача нечіткого числа, знаходження максимального, мінімального з нечітких чисел.

Обґрунтовані властивості введених операцій та відношень з нечіткими числами. А саме:

– обґрунтовано комутативність та асоціативність суми нечітких чисел;

– доведено, що введений порядок є лінійним;

– доведено, що, якщо число є звичайним, не нечітким, то, значення характеристичного порівнювача цього числа дорівнює самому числу;

– доведено, що характеристичний порівнювач суми нечітких чисел дорівнює сумі характеристичних порівнювачів цих чисел;

– доведено, що для будь-яких трьох нечітких чисел (таких, що їх функції належності у сумі дають одиницю), справджується: якщо одне нечітке число передує іншому нечіткому числу, то сума першого числа з третім буде передувати сумі другого числа з третім;

– обґрунтовано твердження про те, що одне нечітке число передує іншому нечіткому числу тоді і тільки тоді, коли характеристичний порівнювача першого числа не більше характеристичного порівнювача другого числа;

– доведено, що сума значень функцій належності нечіткого числа, яке є сумою двох інших нечітких чисел, завжди буде дорівнювати одиниці;

– доведено, що якщо одно нечітке число передує іншому, то перше нечітке число буде перебувати сумі другого та третього чисел, за умови, що елементи носія третього числа невід'ємні.

Знайдена оцінка складності виконання введених операцій над нечіткими числами.

Введені поняття, операції та відношення можуть бути використані при опису систем, об'єктів, явищ та процесів з урахуванням невизначеності, заданої нечіткими множинами. Зокрема, дозволяють будувати математичні моделі задач евклідової комбінаторної оптимізації з нечіткими даними.

Знайдені оцінки складності виконання операцій над нечіткими числами можуть бути використанні для знаходження оцінки складності задач, що моделюються нечіткими числами.

Результати, що викладені в розділі, опубліковані в [96–100, 103–107, 109–111].

РОЗДІЛ 3. РОЗВИТОК НЕОБХІДНОГО АПАРАТУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

В третьому розділі вводяться поняття нечітких комбінаторних множин та дається формалізація розташування прямокутників з нечіткими параметрами в смузі.

3.1. Введення понять нечітких комбінаторних множин

3.1.1. Множина нечітких переставлень

У випадку, коли елементи мультимножини є нечіткими числами, будемо вести мову про мультимножину нечітких чисел $\tilde{G}=\left\{\left(g_1 \mid \mu_1\right),\ldots,\left(g_\eta \mid \mu_\eta\right)\right\}$, де $\left\{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\right\}$, $g_i \in R^1$, $\forall i \in J_\eta$ – носій нечіткої множини, $\left\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\eta\right\}$, $\mu_i \in R^1$, $\forall i \in J_\eta$ – множина значень функції належності.

Означення 3.1. (Див., [96, 104]). Загальну множину переставлень $E_{nk}\left(\tilde{G}\right)$ назвемо загальною множиною переставлень нечітких чисел.

3.1.2. Множина нечітких розбиттів

Означення 3.2. (Див., [99, 105, 113]). Розглянемо розбиття числа N на $s=N$ частин $\left(n_1, n_2, \ldots, n_N\right)$, де $n_j \geq 0, \forall j \in J_n$. Задамо порядок елементів в розбитті $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_j \geq \ldots \geq n_N$. Таке розбиття $\left(n_1, n_2, \ldots, n_N\right)$ назвемо евклідовим, а множину всіх таких розбиттів числа N назвемо евклідовою множиною розбиттів і позначимо її $R(N)$.

Означення 3.3. (Див., [105]) Нехай є деяка мультимножина $G=\left\{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\right\}$. Розбиттям мультимножини G на m частин $R(G, m)$ називається сукупність мультимножин G_i, $i \in J_m$, якщо їх сума є G, тобто $G=G_1+G_2+\ldots+G_m$. Множину $R(G,m)$ будемо називати евклідовою множиною розбиттів. Якщо

$g_j, j \in J_m,$ – нечіткі числа, то $R(G,m)$ будемо називати множиною нечітких розбиттів.

3.1.3. Множина нечітких розміщень

Нехай задана універсальна мультимножина $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ і означена на G характеристична функція [73] $\mu_E(x) \in M = \{0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, 1\}$, де M – множина значень характеристичної функції. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \dots < \mu_{n-2} < 1 = \mu_{n-1}$.

Розглянемо нечітку множину $\underset{\sim}{E}$ [73] з характеристичною функцією $\mu_E(x)$ для множини G вигляду:

$$\underset{\sim}{E} = \left\{ \left(g_1 \mid \mu_{i_1}; g_2 \mid \mu_{i_2}; \dots; g_n \mid \mu_{i_n} \right) \mid \forall \mu = \left(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_n} \right) \in \overline{E}_{kn}\left(M^*\right) \right\},$$

де $\overline{E}_{kn}\left(M^*\right)$ – евклідова множина розміщень [20, 17] з необмеженими повтореннями з мультимножини M^* з основою $S\left(M^*\right) = M$ і первинною специфікацією $\left[M^*\right] = (n, n, \dots, n), k = n^n$.

Означення 3.4. (Див., [101, 102]) Довільний елемент $\underset{\sim}{e} = \left(g_1 \mid \mu_{i_1}; g_2 \mid \mu_{i_2}; \dots; g_n \mid \mu_{i_n} \right) \in \underset{\sim}{E}$ назвемо нечітким розміщенням. Множину $\underset{\sim}{E}$ всіх таких розміщень назвемо комбінаторною множиною всіх нечітких розміщень.

Приклад 3.1. $G = \{x_1, x_2, x_3\}$, $M = \{0, 0.5, 1\}$. Тоді

$$M^* = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\};$$

$$\overline{E}_{kn}\left(M^*\right) = \{(0, 0, 0), (0.5, 0.5, 0.5), (1, 1, 1),$$

$$(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0.5), (0, 0.5, 0), (0.5, 0, 0), (1, 0.5, 0.5),$$

$$(0.5, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0.5, 0.5),$$

$$(0.5, 0, 0.5), (0.5, 0.5, 0), (0.5, 1, 1), (1, 0.5, 1), (1, 1, 0.5), (0, 0.5, 1),$$

смуги початок прямокутної декартової системи координат, спрямувавши вісі як показано на рис. 3.1.

Розглянемо прямокутник Π, що буде розміщуватися в смузі. Розміщення прямокутників будемо розглядати такі, що вісі системи координат зв'язаної з кожним з прямокутників (рис. 3.2) паралельні осям $0x_1$, $0x_2$ (рис. 3.1) та направлені в ті ж сторони.

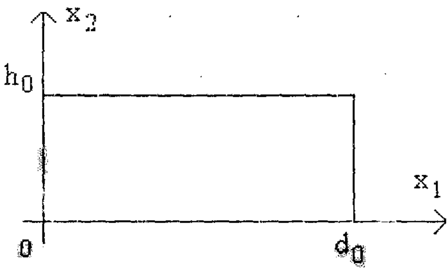


Рис. 3.1. Смуга для розміщення

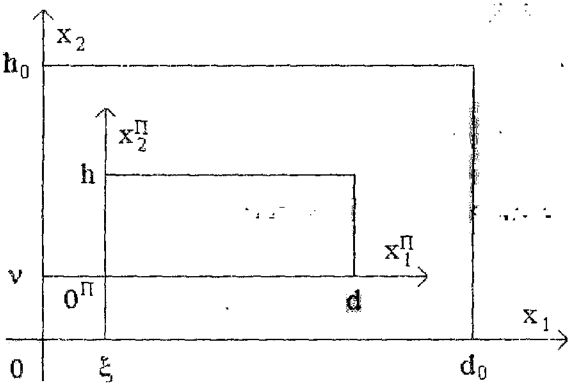


Рис. 3.2. Розміщення прямокутника Π в смузі

Тоді прямокутник Π_i відносно смуги H визначається такими параметрами:

ξ_i – абсциса полюса в системі координат $0x_1x_2$;

ν_i – ордината полюса в системі координат $0x_1x_2$;

h_i – ширина (висота) прямокутника;

d_i – довжина прямокутника.

Прямокутник будемо позначати $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ або просто Π_i.

Нехай числа ξ_i, ν_i, h_i – звичайні (дійсні числа). Нехай d_i – це нечітке число $d_i = \{(d_1^i \mid \mu_1^i), \ldots, (d_n^i \mid \mu_n^i)\}$. Виникає питання: що таке прямокутник Π з висотою h («чітке» число) та довжиною $d = \{(d_1 \mid \mu_1), \ldots, (d_n \mid \mu_n)\}$?

Оскільки число d – це:

1) d_1 зі значенням функції належності μ_1;

2) d_2 зі значенням функції належності μ_2;

...

i) d_i зі значенням функції належності μ_i;

...

n) d_n зі значенням функції належності μ_n,

то П – це прямокутник з розмірами:

1) $h \times d_1$ зі значенням функції належності μ_1;

2) $h \times d_2$ зі значенням функції належності μ_2;

...

i) $h \times d_i$ зі значенням функції належності μ_i;

...

n) $h \times d_n$ зі значенням функції належності μ_n відповідно.

Тобто П – це звичайний прямокутник з розмірами $h \times d_i$, тільки d_i приймає одне з n можливих значень, що характеризується значенням функції належності μ_i.

Для математичної постановки задач розміщення (упаковки) прямокутників Π_i в смузі треба дати означення:

1) розміщення прямокутника в смузі (попадання в смугу);

2) взаємного перетину прямокутників Π_i та Π_j, $i \neq j$, що розміщені в смузі;

3) взаємного неперетину прямокутників Π_i та Π_j, $i \neq j$, що розміщені в смузі;

4) дотикання прямокутників Π_i та Π_j, $i \neq j$, при їх розміщені в смузі.

Нехай смуга (прямокутник), в якій відбувається розміщення задана так $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$, h_0 це ширина (висота) прямокутника, а d_0 – його довжина, система координат розташована як показано на рис. 3.1.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ та $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови, що $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, а $d_i, d_j \in X$ – множині нечітких чисел. ξ_i, ξ_j взагалі кажучи також належать X (нагадаємо, що $R^1 \subset X$).

Нехай $\xi_i = x \in R^1$.

Означення 3.5. [98, 100]. Прямокутник Π_j назвемо таким, що дотикається до прямокутника Π_i праворуч (в смузі Π_0), якщо

$$H(x + d_i) = H(\xi_j). \tag{3.1}$$

Зауваження. Враховуючи властивості характеристичного порівнювача $H(A)$ нечіткого числа A з (3.1) маємо:

$$H(x + d_i) = H(x) + H(d_i) = x + H(d_i).$$

Отже (3.1) набуває вигляду:

$$x + H(d_i) = H(\xi_j). \tag{3.2}$$

Тобто прямокутник Π_j називається таким, що дотикається до прямокутника Π_i праворуч (в смузі Π_0), якщо значення характеристичнго порівнювача абсциси його полюса дорівнює сумі абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичного порівнювача його (Π_i) довжини.

Приклад 3.2.

Нехай смуга задана так: $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ та $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови, що $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, а d_1, d_2, ξ_1, $\xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2$, $d_0 = 10$, $\Pi_1\left(\xi_1 = \{(1|1)\}, \nu_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\}\right)$ і $\Pi_2\left(\xi_2 = \{(5|1)\}, \nu_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0{,}1), (3|0{,}5), (4|0{,}2)\}\right)$.

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,\quad H(d_1) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 4,\quad \xi_1 + H(d_1) = 1 + 4 = 5.$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5,\quad H(d_2) = \frac{2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2}{0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}2} = 3{,}25,$$

$$\xi_2 + H(d_2) = 5 + 3{,}25 = 8{,}25.$$

Оскільки $\xi_1 + H(d_1) = H(\xi_2)$, тобто $5 = 5$, тобто справджується рівність (3.2), то прямокутник Π_2 дотикається до прямокутника Π_1 праворуч (див. рис. 3.3).

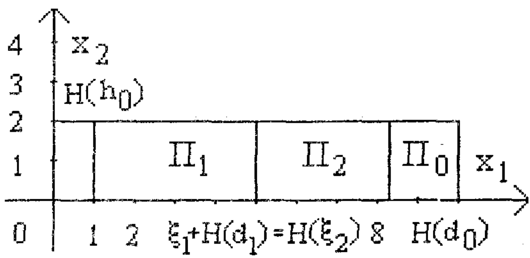


Рис. 3.3. Ілюстрація прикладу 3.2

Означення 3.6. [98, 100]. Прямокутник Π_j стоїть правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i та Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають), якщо

$$H\left(x+d_i\right)<H\left(\xi_j\right). \tag{3.3}$$

або теж саме

$$x+H\left(d_i\right)<H\left(\xi_j\right). \tag{3.4}$$

Тобто прямокутник Π_j стоїть правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0, якщо значення характеристичного порівнювача абсциси його полюса більше ніж сума абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичного порівнювача його (Π_i) довжини.

Приклад 3.3. Нехай смуга задана так: $\Pi_0\left(h_0,\, d_0\right)$, де $h_0,\, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1\left(\xi_1,\, \nu_1,\, h_1,\, d_1\right)$ та $\Pi_2\left(\xi_2,\, \nu_2,\, h_2,\, d_2\right)$ за умови, що $h_0=h_1=h_2 \in R^1$, а $d_1,\, d_2,\, \xi_1,\, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0=2$, $d_0=11$, $\Pi_1\left(\xi_1=\left\{(1|1)\right\},\, \nu_1=0,\, h_1=2,\right.$ $\left.d_1=\left\{(1|0,1),(2|0,5),(3|0,4)\right\}\right)$ і $\Pi_2\left(\xi_2=\left\{(6|1)\right\}, \nu_2=0,\, h_2=2,\right.$ $\left.d_2=\left\{(2|0,1),\, (3|0,5),\, (4|0,2)\right\}\right)$.

$$H\left(\xi_1\right)=\frac{1\cdot 1}{1}=1,\;\; H\left(d_1\right)=\frac{1\cdot 0,1+2\cdot 0,5+3\cdot 0,4}{0,1+0,5+0,4}=2,3,$$

$$\xi_1+H\left(d_1\right)=3,3.\;\; H\left(\xi_2\right)=\frac{6\cdot 1}{1}=6,$$

$$H\left(d_2\right)=\frac{2\cdot 0,1+3\cdot 0,5+4\cdot 0,2}{0,1+0,5+0,2}=3,25,$$

$$\xi_2+H\left(d_2\right)=6+3,25=9,25.$$

Оскільки $\xi_1+H\left(d_1\right)<H\left(\xi_2\right)$, тобто $3,3<6$, тобто справджується нерівність (3.4), то прямокутник Π_2 стоїть правіше прямокутника Π_1 (див. рис. 3.4).

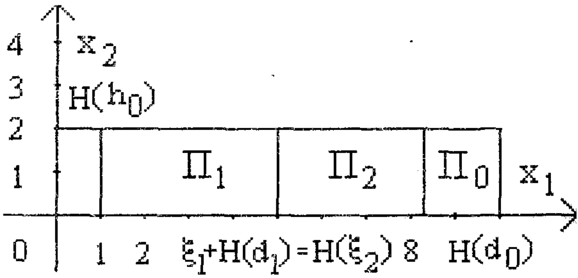


Рис. 3.4. Ілюстрація прикладу 3.3

Означення 3.7. [98, 100]. Прямокутники Π_i та Π_j (що розташовані в смузі Π_0) називаються такими, що перетинаються, якщо

$$H(x) \le H(\xi_j) < H(x + d_i) \tag{3.5}$$

або

$$x \le H(\xi_j) < x + H(d_i). \tag{3.6}$$

3.2.2. Про розташування прямокутників в смузі з нечіткою довжиною

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in R^1$, а $D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ та $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, $d_i, d_j, \xi_i, \xi_j \in X$.

Нехай $\xi_i = x \in X$.

Означення 3.8. [98, 100]. Прямокутник Π_j назвемо таким, що

1) дотикається до прямокутника Π_i праворуч (в смузі Π_0), якщо

$$H(x+d)_i = H(\xi_j)$$

або

$$H(\xi_i) + H(d_i) = H(\xi_j);$$

2) стоїть правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i та Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають), якщо

$$H(x+d_i) < H(\xi_j)$$

або

$$H(\xi_i) + H(d_i) < H(\xi_j);$$

3) перетинається з прямокутником Π_i, якщо

$$H(x) \le H(\xi_j) < H(x+d_i)$$

або

$$H(\xi_i) \le H(\xi_j) < H(\xi)_i + H(d_i).$$

Приклад 3.4. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in R^1$, а $D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ та $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2$, $D_0 = \{(12|1)\}$, $\Pi_1\left(\xi_1 = \{(1|1)\}, \nu_1 = 0, h_1 = 2, d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\}\right)$, $\Pi_2\left(\xi_2 = \{(5|1)\}, \nu_2 = 0, h_2 = 2, d_2 = \{(2|0{,}1), (3|0{,}5), (4|0{,}2)\}\right)$, $\Pi_3\left(\xi_3 = \{(8|1)\}, \nu_3 = 0, h_3 = 2, d_3 = \{(2|0{,}5), (4|0{,}5)\}\right)$.

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, \quad H(d_1) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 4,$$

$$H(\xi_1)+H(d_1)=1+4=5,\ \ H(\xi_2)=\frac{5\cdot 1}{1}=5,$$

$$H(d_2)=\frac{2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}2}{0{,}1+0{,}5+0{,}2}=3{,}25,$$

$$H(\xi_2)+H(d_2)=5+3{,}25=8{,}25,\ \ H(\xi_3)=\frac{8\cdot 1}{1}=8,$$

$$H(d_3)=\frac{2\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=3,\ \ H(\xi_3)+H(d_3)=8+3=11,$$

$$H(D_0)=\frac{12\cdot 1}{1}=12\ .$$

Оскільки, $5=5$, тобто $H(\xi_1)+H(d_1)=H(\xi_2)$, то прямокутник $П_2$ дотикається до прямокутника $П_1$ праворуч (див. рис. 3.5).

Оскільки, $5<8$, тобто $H(\xi_1)+H(d_1)<H(\xi_3)$, то прямокутник $П_3$ стоїть правіше прямокутника $П_1$ (див. рис. 3.5).

Оскільки, $5<8<8{,}25$, тобто $H(\xi_2)<H(\xi_3)<H(\xi_2)+H(d_2)$, то прямокутник $П_2$ перетинається з прямокутником $П_3$ (див. рис. 3.5).

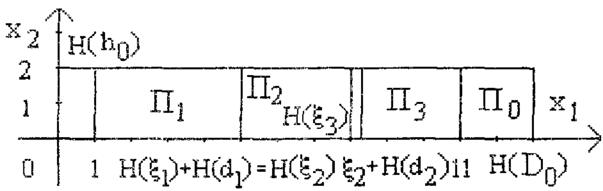


Рис. 3.5. Ілюстрація прикладу 3.4

3.2.3. Про розташування прямокутників в смузі з нечіткими параметрами

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення задана так $П_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ та $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови $\xi_i, \xi_j, \nu_i, \nu_j, h_i, h_j, d_i, d_j \in X$.

Означення 3.9. [98, 100]. Прямокутник Π_i назвемо таким, що розміщається (поміщається) в смузі Π_0 (див. рис. 3.6), якщо

$$\begin{cases} 0 \le H(\xi_i); \\ H(\xi_i + d_i) \le H(D_0); \\ 0 \le H(\nu_i); \\ H(\nu_i + h)_i \le H(H_0); \end{cases}$$

або, що теж саме

$$\begin{cases} 0 \le H(\xi_i) \le H(D_0) - H(d_i); \\ 0 \le H(\nu_i) \le H(H_0) - H(h_i); \end{cases} \tag{3.7}$$

а умови (3.7) назвемо умовами розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0.

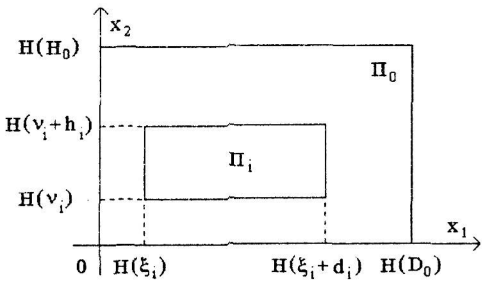


Рис. 3.6. Ілюстрація розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0

Приклад 3.5.

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розташування прямокутника $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d)_1$ за умови $\xi_1, \nu_1, h_1, d_1 \in X$.

Нехай $H_0=\{(6|1)\}$, $D_0=\{(12|1)\}$. Прямокутник $\Pi_1(\xi_1,\nu_1,h_1,d)_1$ задається так: $\Pi_1\left(\xi_1=\{(1|0{,}5),\ (2|0{,}5)\},\nu_1=\{(2|0{,}5),(4|0{,}5)\},\right.$ $\left.h_1=\{(1|0{,}5),\ (3|0{,}5)\},\ d_1=\{(1|0{,}4),(6|0{,}6)\}\right)$.

$$H(\xi_1)=\frac{1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=1{,}5,\ \ H(d_1)=\frac{1\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}6}{0{,}4+0{,}6}=4,$$

$$H(\xi_1)+H(d_1)=1{,}5+4=5{,}5,\ \ H(\nu_1)=\frac{2\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=3,$$

$$H(h_1)=\frac{1\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5}{1}=2,\ \ H(\nu_1)+H(h_1)=3+2=5,$$

$$H(H_0)=\frac{6\cdot 1}{1}=6,\ \ H(D_0)=\frac{12\cdot 1}{1}=12,$$

$$H(H_0)-H(h_1)=6-2=4,\ H(D_0)-H(d_1)=12-4=8.$$

Прямокутник Π_1 поміщається в смузі Π_0 (див. рис. 3.7), оскільки справджується:

$$\begin{cases}0<5{,}5<8;\\ 0<3<4;\end{cases}$$

тобто справджується умова (3.7):

$$\begin{cases}0\le H(\xi_1)\le H(D_0)-H(d_1);\\ 0\le H(\nu_1)\le H(H_0)-H(h_1).\end{cases}$$

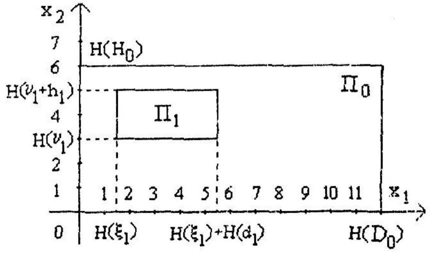


Рис. 3.7. Ілюстрація прикладу 3.5

Означення 3.10. [98, 100]. Прямокутники Π_i та Π_j назвемо такими, що перетинаються, якщо виконується або (див. рис. 3.8) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \le H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i); \\ H(\nu_i) \le H(\nu_j) < H(\nu_i) + H(h_i); \end{cases} \qquad (3.8)$$

або (див. рис. 3.9) умова

$$\begin{cases} H(\xi_i) \le H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i); \\ H(\nu_j) \le H(\nu_i) < H(\nu_j) + H(h_j); \end{cases} \qquad (3.9)$$

а умови (3.8) та (3.9) назвемо умовами взаємного перетинання двох прямокутників.

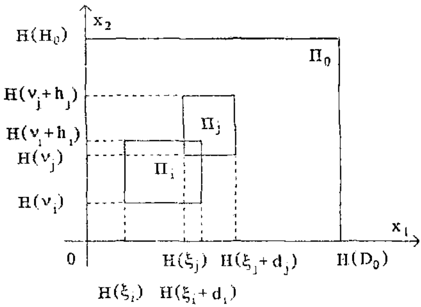


Рис. 3.8. Ілюстрація умови перетинання прямокутників

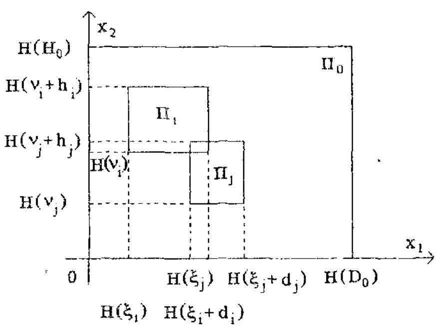


Рис. 3.9. Ілюстрація умови перетинання прямокутників

Приклад 3.6. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення задана так $\Pi_0\left(H_0, D_0\right)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1\left(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1\right)$ та $\Pi_2\left(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2\right)$ за умови $\xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутника: $\Pi_1\Big(\xi_1 = \left\{(1|0,5),(2|0,5)\right\},\ \nu_1 = \left\{(2|0,5),(4|0,5)\right\},\ h_1 = \left\{(1|0,5),(3|0,5)\right\},\ d_1 = \left\{(1|0,4),(6|0,6)\right\}\Big)$, $\Pi_2\Big(\xi_2 = \left\{(2|0,6),(7|0,4)\right\},\ \nu_2 = \left\{(1|0,6),(3,5|0,5)\right\},\ h_2 = \left\{(1|0,5),(3|0,5)\right\},\ d_2 = \left\{(2|0,1),(3|0,5),(4|0,2)\right\}\Big)$.

$$H\left(\xi_1\right) = \frac{1\cdot 0,5 + 2\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 1,5,\quad H\left(\nu_1\right) = \frac{2\cdot 0,5 + 4\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 3,$$

$$H\left(h_1\right) = \frac{1\cdot 0,5 + 3\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 2,\quad H\left(d_1\right) = \frac{1\cdot 0,4 + 6\cdot 0,6}{0,4+0,6} = 4,$$

$$H\left(\xi_1\right) + H\left(d_1\right) = 1,5 + 4 = 5,5,\quad H\left(\nu_1\right) + H\left(h_1\right) = 3 + 2 = 5,$$

$$H\left(\xi_2\right) = \frac{2\cdot 0,6 + 7\cdot 0,4}{0,6+0,4} = 4,\quad H\left(\nu_2\right) = \frac{1\cdot 0,6 + 3,5\cdot 0,4}{0,6+0,4} = 2,$$

$$H\left(h_2\right) = \frac{1\cdot 0,5 + 3\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 2,\quad H\left(d_2\right) = \frac{2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,5 + 4\cdot 0,1}{0,1+0,5+0,2} = 3,25,$$

$$H\left(\xi_2\right) + H\left(d_2\right) = 5,5 + 3,25 = 8,75,\quad H\left(\nu_2\right) + H\left(h_2\right) = 2 + 2 = 4 .$$

Оскільки, $1,5 < 4 < 5,5$, тобто $H\left(\xi_1\right) < H\left(\xi_2\right) < H\left(\xi_1\right) + H\left(d_1\right)$, тобто справджуються умови (3.9), то прямокутники Π_1 та Π_2 перетинаються (див. рис. 3.10).

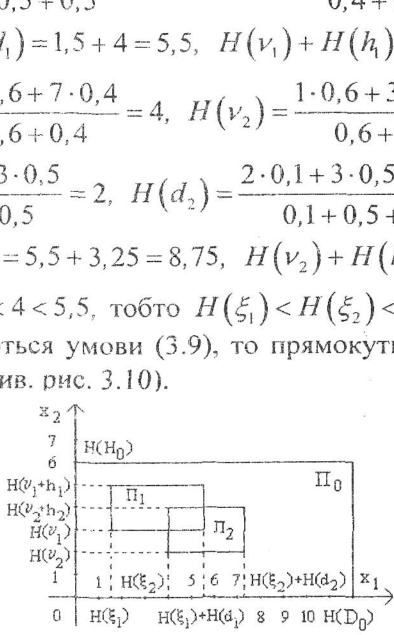


Рис. 3.10. Ілюстрація прикладу 3.6

Означення 3.11. [98, 100]. Прямокутники Π_i та Π_j назвемо такими, що не перетинаються (див. рис. 3.11); якщо виконується або умова

$$H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i);$$

або умова

$$H(\nu_j) > H(\nu_i) + H(h_i).$$

Іншими словами, виконується сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i); \\ H(\nu_j) > H(\nu_i) + H(h_i). \end{array}\right.$$

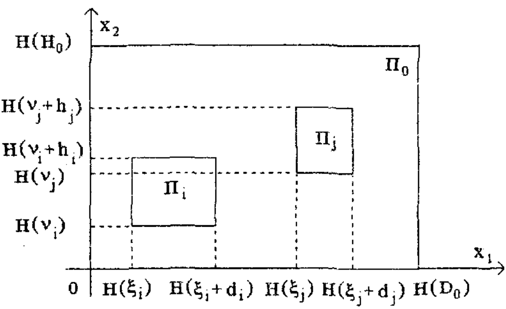


Рис. 3.11. Ілюстрація умови неперетинання прямокутників

Приклад 3.7. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення задана так $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ та $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутника:

$$\Pi_1\Big(\xi_1 = \{(1|0{,}5), (2|0{,}5)\},\ \nu_1 = \{(2|0{,}5),$$

$$(4|0{,}5)\},\ h_1 = \{(1|0{,}5), (3|0{,}5)\},\ d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\}\Big),$$

$$\Pi_2\left(\xi_2=\{(4|0{,}5),\ (8|0{,}5)\},\ \nu_2=\{(1|0{,}6),(3{,}5|0{,}5)\},\right.$$

$$\left.h_2=\{(1|0{,}5),\ (3|0{,}5)\},\ d_2=\{(2|0{,}1),\ (3|0{,}5),(4|0{,}2)\}\right).$$

$$H(\xi_1)=\frac{1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=1{,}5,\quad H(\nu_1)=\frac{2\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=3,$$

$$H(h_1)=\frac{1\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=2,\quad H(d_1)=\frac{1\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}6}{0{,}4+0{,}6}=4,$$

$$H(\xi_1)+H(d_1)=1{,}5+4=5{,}5,\quad H(\nu_1)+H(h_1)=3+5=5,$$

$$H(\xi_2)=\frac{4\cdot 0{,}5+8\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=6,\quad H(\nu_2)=\frac{1\cdot 0{,}6+3{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}6+0{,}4}=2,$$

$$H(h_2)=\frac{1\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}5}=2.\quad H(d_2)=\frac{2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}1}{0{,}1+0{,}5+0{,}2}=3{,}25,$$

$$H(\xi_2)+H(d_2)=5{,}5+3{,}25=8{,}75,\quad H(\nu_2)+H(h_2)=2+2=4.$$

Оскільки, $6>5{,}5$, тобто $H(\xi_2)>H(\xi_1)+H(d_1)$, то прямокутники Π_1 та Π_2 не перетинаються (див. рис. 3.12).

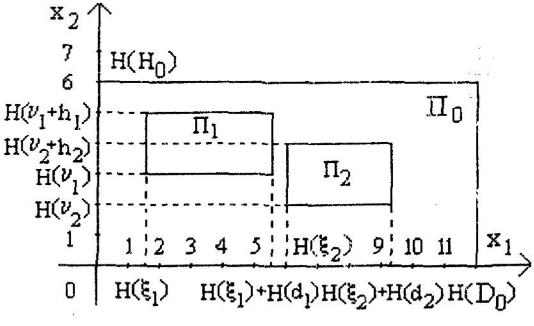


Рис. 3.12. Ілюстрація умови прикладу 3.7

Означення 3.12. [98, 100]. Прямокутники Π_i та Π_j назвемо такими, що дотикаються, якщо виконується або умова

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i); \\ H(\nu_i) \le H(\nu_j) \le H(\nu_i) + H(h_i); \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i); \\ H(\nu_i) \le H(\nu_j) + H(h_j) \le H(\nu_i) + H(h_i); \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(\nu_j) = H(\nu_i) + H(h_i); \\ H(\xi_i) \le H(\xi_j) \le H(\xi_i) + H(d_i); \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} H(\nu_j) = H(\nu_i) + H(h_i); \\ H(\xi_i) \le H(\xi_j) + H(d_j) \le H(\xi_i) + H(d_i); \end{cases}$$

або деякі з цих умов виконуються одночасно (див. рис. 3.13).

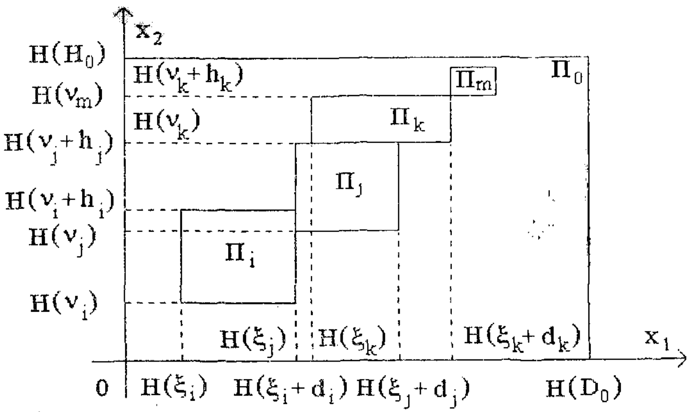


Рис. 3.13. Ілюстрація дотикання прямокутників

Приклад 3.8. Нехай смуга, в якій відбувається розміщення задана так $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розташування двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ та $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутника:

$$\Pi_1\Big(\xi_1 = \{(1|0,5), (2|0,5)\}, \nu_1 = \{(2|0,5),$$

$$(4|0,5)\}, h_1 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\}\Big),$$

$$\Pi_2\Big(\xi_2 = \{(5|0,5), (6|0,5)\}, \nu_2 = \{(1|0,6), (3,5|0,5)\},$$

$$h_2 = \{(1|0,5), (3|0,5)\}, d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\}\Big).$$

$$H(\xi_1) = \frac{1\cdot 0,5 + 2\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 1,5, \quad H(\nu_1) = \frac{2\cdot 0,5 + 4\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 3,$$

$$H(h_1) = \frac{1\cdot 0,5 + 3\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 2, \quad H(d_1) = \frac{1\cdot 0,4 + 6\cdot 0,6}{0,4+0,6} = 4,$$

$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1,5 + 4 = 5,5, \quad H(\nu_1) + H(h_1) = 3 + 5 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5\cdot 0,5 + 6\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 5,5, \quad H(\nu_2) = \frac{1\cdot 0,6 + 3,5\cdot 0,4}{0,6+0,4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1\cdot 0,5 + 3\cdot 0,5}{0,5+0,5} = 2\,. \quad H(d_2) = \frac{2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,5 + 4\cdot 0,1}{0,1+0,5+0,2} = 3,25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5,5 + 3,25 = 8,75, \quad H(\nu_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4\,.$$

Оскільки, $5,5 = 5,5$, тобто $H(\xi_2) = H(\xi_1) + H(d_1)$, то прямокутники Π_1 та Π_2 дотикаються (див. рис. 3.14).

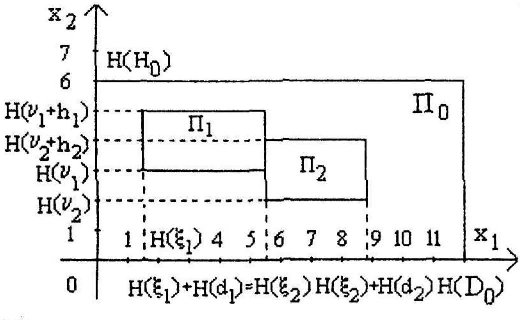


Рис. 3.14. Ілюстрація прикладу 3.8

Означення 3.13. [98, 100]. Розміщенням прямокутника $\Pi_i\left(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i\right)$ в смузі $\Pi_0\left(H_0, D_0\right)$, де H_0, D_0 є нечіткими числами будемо називати розміщення прямокутника в смузі $\Pi_0\left(h_0, d_0\right)$, де $h_0 = H\left(H_0\right)$, $d_0 = H\left(D_0\right)$.

Означення 3.14. [98, 100]. Розміщенням прямокутника $\Pi_i\left(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i\right)$ в смузі $\Pi_0\left(h_0, d_0\right)$, де $\xi_i, \nu_i, h_i, d_i \in X$, h_0, $d_0 \in R^1$ будемо називати розміщення прямокутника $\Pi^i\left(x_i, y_i, h^i, d^i\right)$ в Π_0, де $x_i = H\left(\xi_i\right)$, $y_i = H\left(\nu_i\right)$, $h^i = H\left(h_i\right)$, $d^i = H\left(d_i\right)$.

Ввівши означення 3.13 та 3.14, одержуємо таке очевидне твердження.

Твердження 3.1. [98, 100]. Означення 3.13, 3.14 та відповідні попередні еквівалентні.

Зауважимо, що розглянутий підхід може бути застосований до будь-якого узагальнення прямокутника (чи то з «інтервальними» розмірами (як інтервал), чи то з «ймовірнісними» (як випадкова величина) тощо), що враховують невизначеність вимірювання розмірів.

3.3. Висновки до розділу

В розділі дані означення нечітких комбінаторних множин: нечітких переставлень, множини нечітких розбиттів, множини нечітких розміщень.

Також означено розташування прямокутників з нечіткими розмірами у смузі: дотикання, перетинання, не перетинання. Означено розташування прямокутників з нечіткими розмірами у смузі нечіткого розміру: попадання в смугу, дотикання, перетинання, не перетинання.

Введені множини нечітких переставлень, розбиттів та розміщень розширюють апарат математичного моделювання задачами комбінаторної оптимізації. Приклади моделювання задач множиною нечітких переставлень та множиною нечітких розбиттів будуть розглянуті в розділі 4.

Формалізація поняття розташування прямокутників з нечіткими розмірами у смузі може бути використана в задачах геометричного проектування, зокрема задачі упакування прямокутників (див. розділ 4), що враховують невизначеність даних у вигляді нечітких множин. Розглянутий підхід до моделювання такої ситуації може поширюватися на будь-які інші задачі евклідової комбінаторної оптимізації, якщо необхідно враховувати ту чи іншу невизначеність за допомогою нечіткої множини.

Результати, викладені в розділі, опубліковані в [96, 99, 101, 102, 104, 105, 112–114].

РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ УПАКУВАННЯ ЯК ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

В розділі розглядається розв'язування задачі упакування прямокутників з нечіткими параметрами в смузі: сформульована постановка задачі; побудовані математичні моделі; викладені методи розв'язування задачі, які проілюстровані прикладами; оцінена складність методів; наведені результати обчислюваних експериментів.

4.1. Постановка задачі та побудова математичної моделі задачі як задачі на переставленнях

4.1.1. Постановка задачі

На прикладі однієї комбінаторної задачі розглянемо моделювання задач у вигляді евклідових комбінаторних оптимізаційних моделей з використанням апарату нечітких множин.

Сформулюємо задачу упаковки прямокутників з нечіткими розмірами.

Нехай є деяка напівнескінчена (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини h (див. рис. 4.1).

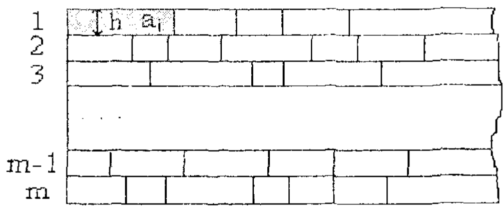


Рис. 4.1. Ілюстрація задачі упаковки прямокутників

Задано ще p прямокутників, довжини яких є $a_1, \dots, a_p$, ширина – h. Задача полягає в розміщенні прямокутників без накладань у смузі на її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою.

Під довжиною зайнятої частини смужки будемо розуміти суму довжин прямокутників, що розташовуються в цій смужці. Серед цих сум виберемо найбільшу. Вона й буде відповідати довжині зайнятої частини смуги.

При розгляді питання упакування прямокутників у смугу з метою врахування невизначеності вхідних даних можна метричні характеристики об'єктів розглядати як нечіткі числа.

4.1.2. Побудова моделі

Побудуємо математичну модель сформульованої на початку розділу задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами, вважаючи, що довжини прямокутників a_i задаються нечіткими числами.

У кожній смужці в оптимальному розв'язку, очевидно, може стояти від одного до $p-(m-1)=p-m+1$ прямокутників, де m – це кількість смужок, на яку розділено смугу, тобто ціла частина частки від ділення ширини смуги на h. Позначимо $n=m(p-m+1)$ та введемо до розгляду $n-p$ прямокутників з шириною h та довжиною a_0, де a_0 є нечітким числом вигляду $a_0=\{(0|1)\}$, тобто звичайним нулем, $a_0 \in R^1$.

Тоді можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно $p-m+1$ прямокутників. Позначимо x_{ij} – нечітку довжину прямокутника, що стоїть у i-й смужці на j-му від початку смуги місці, $i \in J_m$, $j \in J_{p-m+1}$.

Розглянемо вектор x вигляду:

$$x=\left(x_{11},\ldots,x_{1,p-m+1},x_{21},\ldots,x_{2,p-m+1},\ldots,\right.$$

$$\left.x_{i1},\ldots,x_{i,p-m+1},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{m,p-m+1}\right).$$

Утворимо мультимножину $G=\{a_1,\ldots,a_p,a_0,\ldots,a_0\}$, в якій елемент a_0 зустрічається $n-p$ раз. Тоді вектор x можна розглядати як елемент множини $E_n(G)$ переставлень з елементів мультимножини G, тобто $x \in E_n(G)$. При цьому кожному переставленню x буде відповідати певне розташування прямокутників у смузі і навпаки.

Використовуючи введені операції (див. розділ 2) суми, знаходження максимуму і мінімуму, характеристичного порівнювача, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами представляється [96, 98, 100, 104, 115] у такому вигляді:

$$F^*\left(x^*\right)=\min_{x\in E_n(G)}\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{p-m+1}x_{ij};\qquad(4.1)$$

$$x^*=\arg\min_{x\in E_n(G)}\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{p-m+1}x_{ij},\qquad(4.2)$$

де $\arg f(x)$ позначає точку x, що доставляє значення $f(x)$ функції f.

Формула (4.1) дає мінімально можливу довжину зайнятої частини смуги у вигляді нечіткого числа, а формула (4.2) – переставлення x^*, на якій ця довжина $F^*\left(x^*\right)$ досягається.

4.2. Розв'язування задачі упакування на нечітких переставлення методом гілок та меж

4.2.1. Реалізація методу

Як і всяку задачу оптимізації на дискретній множині, поставлену задачу можна розв'язувати за допомогою методу гілок та меж (див., напр., [31]) – методу направленого перебору, а для прикладів невеликої вимірності – за допомогою методу повного перебору.

Очевидно, що оцінка складності методу повного перебору допустимих розв'язків для задачі (4.1)–(4.2) не являється поліноміальною, оскільки повний перебір множини переставлень з n чисел (навіть дійсних) визначається величиною $n!$. Але обумовленість розгляду такого методу і проведення його аналізу полягає в тому, що, здійснивши його, отримаємо верхню оцінку складності розв'язування задачі упаковки (4.1)–(4.2).

Метод повного перебору полягає в тому, щоб для кожного x з множини нечітких переставлень $E_n(G)$ обчислити цільову функцію – довжину зайнятої части смуги:

$$F(x)=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{p-m+1}x_{ij}.\qquad(4.3)$$

При викладенні методів довжиною зайнятої частини смужки i будемо називати $\sum_{j=1}^{q} x_{ij}$ довжин q розташованих у ній прямокутників довжини x_{ij} кожний, $j \in J_q$.

В основі методу гілок та меж (див., напр., [31]) лежить система галужень і відсікань, яка дозволяє, взагалі кажучи, значно зменшити об'єм перебору.

Очевидно, що прямокутники з довжинами a_0 не впливають на результат: $A + a_0 = A$, де A – довільне нечітке число, тому при розв'язуванні задачі методом гілок та меж їх не розглядаємо.

Розглянемо алгоритм методу гілок та меж, який пропонується для розв'язування задачі (4.1)–(4.2).

1. Впорядкуємо нечіткі довжини прямокутників за не спаданням $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_p$.

2. Формуємо початкове розміщення $\tilde{x}$ наступним чином: кожний наступний прямокутник з впорядкованого за незростанням набору довжин, починаючи з прямокутника з довжиною a_1, розміщується у ту смужку, довжина зайнятої частини якої є найменшою після розміщення попереднього. Запам'ятовуємо початкове розміщення $\tilde{x}$ і значення цільової функції $\tilde{F}(\tilde{x})$ при цьому розміщенні.

3. Крок $t = 1$. На цьому кроці розташовуємо прямокутник з довжиною a_1 в першу смужку, тобто $x_{11} = a_1$. Позначимо отриману множину як S^1. Оцінку множини ξ для будь-якої множини знаходимо як довжину зайнятої частини смуги. На цьому кроці оцінка $\xi(S^1) = a_1$. Значення t збільшуємо на 1.

4. Крок $t = 2$. Розбиваємо множину S^1 на m підмножин $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2$: $S^1 = S_1^2 \bigcup S_2^2 \bigcup \ldots \bigcup S_m^2$, $S_i^2 \bigcap S_j^2 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, де m – кількість смужок, розміщуючи прямокутник з довжиною a_2: в першу смужку, в другу тощо. Для кожної підмножини $S_i^2, i \in J_m$ знаходимо оцінку $\xi(S_i^2)$ (як довжину

зайнятої частини смуги). Порівнюємо $\xi(S_i^2)$ і $\tilde{F}(\tilde{x})$. Якщо $\xi(S_i^2) > \tilde{F}(\tilde{x})$, то множину S_i^2 відсікаємо. Серед невіднятих підмножин $S_j^2, j \in J_m$ вибираємо для розгалуження ту, для якої оцінка є найменшою. Усі підмножини, крім підмножини, обраної для розгалуження, переглянутих і відтятих, перепозначуємо на $S_i^3, \ldots, S_j^3$, де i, j – деякі натуральні числа. Значення t збільшуємо на 1.

5. На кожному кроці $t = z \geq 3$ розбиваємо множину S_υ^{z-1} на m підмножин $S_{\upsilon 1}^z, S_{\upsilon 2}^z, \ldots, S_{\upsilon m}^z$: $S_\upsilon^{z-1} = S_{\upsilon 1}^z \bigcup S_{\upsilon 2}^z \bigcup \ldots \bigcup S_{\upsilon m}^z$, $S_i^z \bigcap S_j^z = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, де m – кількість смужок, тобто розміщуємо прямокутник з довжиною a_z: в першу смужку, в другу тощо Для кожної підмножини S_i^z, де i – деяке натуральне число, знаходимо оцінку $\xi(S_i^z)$ (як довжину зайнятої частини смуги). Порівнюємо $\xi(S_i^z)$ і $\tilde{F}(\tilde{x})$. Якщо $\xi(S_i^z) > \tilde{F}(\tilde{x})$, то множину S_i^z відсікаємо. Якщо множина відображає переставлення з множини переставлень $E_n(G)$ і $\xi(S_i^z) < \tilde{F}(\tilde{x})$, то значенню $\tilde{F}(\tilde{x})$ присвоюємо значення $\xi(S_i^z)$, а розміщенню $\tilde{x}$ присвоюємо розміщення, яке відображає множина S_i^z. Для розгалуження обираємо таку підмножину S_j^z, для якої оцінка найменша. Усі підмножини, крім підмножини, обраної для розгалуження, переглянутих та відтятих, перепозначаємо на $S_i^{z+1}, \ldots, S_j^{z+1}$, де i, j – деякі натуральні числа. Значення t збільшуємо на 1.

6. Процес продовжується до тих пір, доки не розгалужено або не відтято усі множини. Оптимальним значенням цільової функції буде останнє значення $\tilde{F}(\tilde{x})$, а остання точка $\tilde{x}$ – точкою, що доставляє оптимальний розв'язок.

Зауваження. В розглянутому алгоритмі методу гілок та меж до поставленої задачі доцільно використовувати також наступне правило відсікання: якщо на деякому кроці довжина зайнятої частини смужки з номером i' дорівнює довжині зайнятої частини смужки з номером i'', де i', i'' – деякі натуральні числа, $i' \neq i''$, то після розміщення прямокутника a_j в ці смужки, де j – деяке натуральне число, підмножина, в якій a_j стоїть в смужці з номером i'', відсікаємо (див. рис. 4.2).

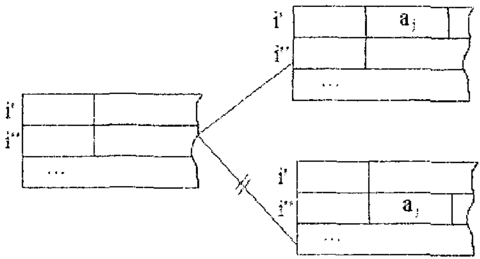


Рис. 4.2. Ілюстрація відсікання

4.2.2. Ілюстративний приклад

Проілюструємо методи знаходження розв'язування задачі упакування прямокутників, довжини яких задані нечіткими числами.

Нехай задано три смужки і п'ять прямокутників: $m = 3$, $p = 5$. Нехай довжини прямокутників задані такими нечіткими числами:

$$a_1 = \left\{\left(14\middle|\frac{5}{14}\right), \left(15\middle|\frac{7}{14}\right), \left(16\middle|\frac{2}{14}\right)\right\},\quad a_2 = \left\{\left(8\middle|\frac{2}{12}\right), \left(9\middle|\frac{9}{12}\right), \left(10\middle|\frac{2}{14}\right)\right\},$$

$$a_3 = \left\{\left(6\middle|\frac{3}{11}\right), \left(7\middle|\frac{7}{11}\right), \left(8\middle|\frac{1}{11}\right)\right\},\quad a_4 = \left\{\left(5\middle|\frac{1}{11}\right), \left(6\middle|\frac{9}{11}\right), \left(7\middle|\frac{1}{11}\right)\right\},$$

$$a_5 = \left\{\left(4\middle|\frac{2}{11}\right), \left(5\middle|\frac{8}{11}\right), \left(6\middle|\frac{1}{11}\right)\right\}.$$

Визначимо $n = m \cdot (p - m + 1) = 3 \cdot (5 - 3 + 1) = 9$.

Вводимо до розгляду $n-p=9-5=4$ прямокутників з довжиною $a_0=\{(0|1)\}$. Вектор x має вигляд $x=(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},$ $x_{23},x_{31},x_{32},x_{33})$. Утворюємо мультимножину G: $G=\{a_1,a_2,a_3,a_4,$ $a_5,a_0,a_0,a_0,a_0\}$.

а) Розв'яжемо задачу (4.1)–(4.2) методом гілок та меж.

Впорядкуємо прямокутники.

$$H(a_1)=\frac{14\cdot\frac{5}{14}+15\cdot\frac{7}{14}+16\cdot\frac{2}{14}}{\frac{5}{14}+\frac{7}{14}+\frac{2}{14}}=14\frac{11}{14};$$

$$H(a_2)=\frac{8\cdot\frac{2}{12}+9\cdot\frac{9}{12}+10\cdot\frac{1}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{9}{12}+\frac{1}{12}}=8\frac{11}{12};$$

$$H(a_3)=\frac{6\cdot\frac{3}{11}+7\cdot\frac{7}{11}+8\cdot\frac{1}{11}}{\frac{3}{11}+\frac{7}{11}+\frac{1}{11}}=6\frac{9}{11};$$

$$H(a_4)=\frac{5\cdot\frac{1}{11}+6\cdot\frac{9}{11}+7\cdot\frac{1}{11}}{\frac{1}{11}+\frac{9}{11}+\frac{1}{11}}=6;$$

$$H(a_5)=\frac{4\cdot\frac{2}{11}+5\cdot\frac{8}{11}+6\cdot\frac{1}{11}}{\frac{2}{11}+\frac{8}{11}+\frac{1}{11}}=4\frac{10}{11}.$$

Оскільки $H(a_1)>H(a_2)>H(a_3)>H(a_4)>H(a_5)$, то $a_1\succ$ $\succ a_2\succ a_3\succ a_4\succ a_5$.

Початковим буде розміщення прямокутника з довжиною a_1 в першу смужку, прямокутників з довжинами a_2 і a_5 – в другу, a_3 і

a_1 в третю. Значення цільової функції при початковому розміщенні: $\tilde{F}(\tilde{x}) = \left\{ \left(14 \middle| \frac{5}{14}\right), \left(15 \middle| \frac{7}{14}\right), \left(16 \middle| \frac{2}{14}\right) \right\}$, $H\left(\tilde{F}(\tilde{x})\right) = 14\frac{11}{14}$.

Крок 1. Прямокутник з довжиною a_1 розміщуємо в першу смужку (див. рис. 4.3).

Оцінка $\xi\left(S^0\right)$ дорівнює довжині зайнятої частини смуги, тобто $\xi\left(S^1\right) = a_1 = \left\{ \left(14 \middle| \frac{5}{14}\right), \left(15 \middle| \frac{7}{14}\right), \left(16 \middle| \frac{2}{14}\right) \right\}$.

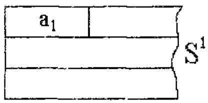


Рис. 4.3. Крок 1

Крок 2. Розбиваємо множину S^1 на три підмножини S_1^2, S_2^2, S_3^2: $S^1 = S_1^2 \bigcup S_2^2 \bigcup S_3^2$, $S_i^2 \bigcap S_j^2 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_3$, в залежності від можливості розміщення прямокутника з довжиною a_2 (див. рис. 4.4).

Оцінки $\xi\left(S_1^2\right)$, $\xi\left(S_2^2\right)$, $\xi\left(S_3^2\right)$ дорівнюють:

$$\xi\left(S_1^2\right) = a_1 + a_2 = \left\{ \left(22 \middle| \frac{10}{168}\right), \left(23 \middle| \frac{59}{168}\right), \left(24 \middle| \frac{72}{168}\right), \left(25 \middle| \frac{25}{168}\right), \right.$$

$$\left. \left(26 \middle| \frac{2}{168}\right) \right\}; \; \xi\left(S_2^2\right) = \xi\left(S_3^2\right) = a_1 = \left\{ \left(14 \middle| \frac{5}{14}\right), \left(15 \middle| \frac{7}{14}\right), \left(16 \middle| \frac{2}{14}\right) \right\}.$$

$$H\left(a_1 + a_2\right) = \frac{22 \cdot \frac{10}{168} + 23 \cdot \frac{59}{168} + 24 \cdot \frac{72}{168} + 25 \cdot \frac{25}{168} + 26 \cdot \frac{2}{168}}{\frac{10}{168} + \frac{59}{168} + \frac{72}{168} + \frac{25}{168} + \frac{2}{168}} = 23\frac{118}{168},$$

$$H\left(a_1\right) = 14\frac{11}{14}.$$

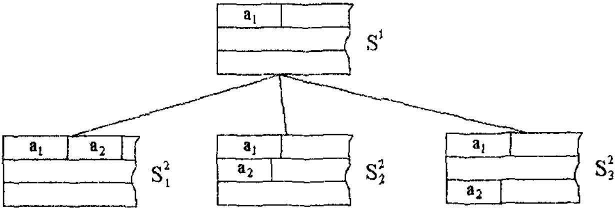


Рис. 4.4. Перше галуження

Оскільки $\xi\left(S_1^2\right) > \tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ (тому що $H\left(a_1 + a_2\right) = 23\frac{118}{168} > H\left(\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)\right) = 14\frac{11}{14}$), то підмножину S_1^2 відсікаємо. Розглянемо підмножини S_2^2 і S_3^2: згідно запропонованого відсікання, вершину S_3^2 відсікаємо. Розгалужуємо множину S_2^2.

Крок 3. Розбиваємо множину S_2^2 на три підмножини S_{21}^3, S_{22}^3, S_{23}^3: $S_2^2 = S_{21}^3 \bigcup S_{22}^3 \bigcup S_{23}^3$, $S_{2(i)}^3 \bigcap S_{2(j)}^3 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_3$, в залежності від розміщення прямокутника з довжиною a_3 (див. рис. 4.5).

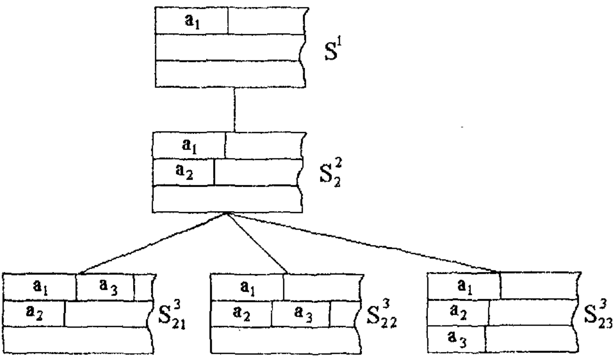


Рис. 4.5. Друге галуження

Оцінки $\xi\left(S_{21}^3\right)$, $\xi\left(S_{22}^3\right)$, $\xi\left(S_{23}^3\right)$:

$$\xi\left(S_{21}^{3}\right)=a_1+a_3=\left\{\left(20\left|\frac{15}{154}\right.\right),\left(21\left|\frac{56}{154}\right.\right),\left(22\left|\frac{60}{154}\right.\right),\left(23\left|\frac{21}{154}\right.\right),\left(24\left|\frac{2}{154}\right.\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_{22}^{3}\right)=a_2+a_3=\left\{\left(14\left|\frac{6}{132}\right.\right),\left(15\left|\frac{41}{132}\right.\right),\left(16\left|\frac{68}{132}\right.\right),\left(17\left|\frac{16}{132}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(17\left|\frac{16}{132}\right.\right),\left(18\left|\frac{1}{132}\right.\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_{23}^{3}\right)=a_1=\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}.$$

$$H\left(a_1+a_3\right)=\frac{20\cdot\frac{15}{154}+21\cdot\frac{56}{154}+22\cdot\frac{60}{154}+23\cdot\frac{21}{154}+24\cdot\frac{2}{154}}{\frac{15}{154}+\frac{56}{154}+\frac{60}{154}+\frac{21}{154}+\frac{2}{154}}=21\frac{93}{154};$$

$$H\left(a_2+a_3\right)=\frac{14\cdot\frac{6}{132}+15\cdot\frac{41}{132}+16\cdot\frac{68}{132}+17\cdot\frac{16}{132}+18\cdot\frac{1}{132}}{\frac{6}{132}+\frac{41}{132}+\frac{68}{132}+\frac{16}{132}+\frac{1}{132}}=15\frac{97}{132};$$

$$H\left(a_1\right)=14\frac{11}{14}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{21}^{3}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ і $\xi\left(S_{22}^{3}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то підмножини S_{21}^{3} і S_{22}^{3} відсікаємо. Розгалужуємо S_{23}^{3}.

Крок 4. Розбиваємо множину S_{23}^{3} на три підмножини S_{231}^{4}, S_{232}^{4}, S_{233}^{4}: $S_{23}^{3}=S_{231}^{4}\bigcup S_{232}^{4}\bigcup S_{233}^{4}$, $S_{23(i)}^{4}\bigcap S_{23(j)}^{4}=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в залежності від розміщення прямокутника з довжиною a_4 (див. рис. 4.6).

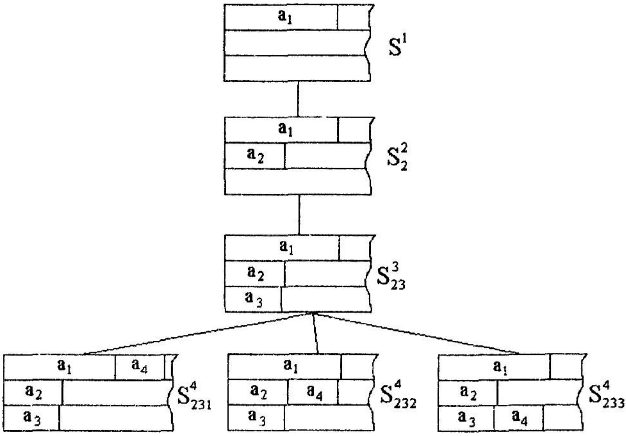


Рис. 4.6. Третє галуження

Оцінки $\xi\left(S_{231}^4\right)$, $\xi\left(S_{232}^4\right)$, $\xi\left(S_{233}^4\right)$:

$$\xi\left(S_{231}^4\right)=a_1+a_4=\left\{\left(19\left|\frac{5}{154}\right.\right),\left(20\left|\frac{52}{154}\right.\right),\left(21\left|\frac{70}{154}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(22\left|\frac{25}{154}\right.\right),\left(23\left|\frac{2}{154}\right.\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_{232}^4\right)=a_2+a_4=\left\{\left(13\left|\frac{2}{132}\right.\right),\left(14\left|\frac{27}{132}\right.\right),\left(15\left|\frac{84}{132}\right.\right),\left(16\left|\frac{18}{132}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(17\left|\frac{1}{132}\right.\right)\right\}.\ \xi\left(S_{233}^4\right)=a_1=\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}.$$

$$H\left(a_1+a_4\right)=\frac{19\cdot\frac{5}{154}+20\cdot\frac{52}{154}+21\cdot\frac{70}{154}+22\cdot\frac{25}{154}+23\cdot\frac{2}{154}}{\frac{5}{154}+\frac{52}{154}+\frac{70}{154}+\frac{25}{154}+\frac{2}{154}}=20\frac{11}{14};$$

$$H\left(a_2+a_4\right)=\frac{13\cdot\frac{2}{132}+14\cdot\frac{27}{132}+15\cdot\frac{84}{132}+16\cdot\frac{18}{132}+17\cdot\frac{1}{132}}{\frac{2}{132}+\frac{27}{132}+\frac{84}{132}+\frac{18}{132}+\frac{1}{132}}=14\frac{121}{132};$$

$$H\left(a_1\right)=14\frac{11}{14}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{231}^{4}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ і $\xi\left(S_{232}^{4}\right))>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то підмножини S_{231}^{4} і S_{232}^{4} відсікаємо. Розгалужуємо S_{233}^{4}.

Крок 5. Розбиваємо множину S_{233}^{4} на 3 підмножини S_{2331}^{5}, S_{2332}^{5}, S_{2333}^{5}: $S_{233}^{4}=S_{2331}^{5}\bigcup S_{2332}^{5}\bigcup S_{2333}^{5}$, $S_{233(i)}^{5}\bigcap S_{233(j)}^{5}=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$ розміщуючи прямокутник з довжиною a_5 (див. рис. 4.7).

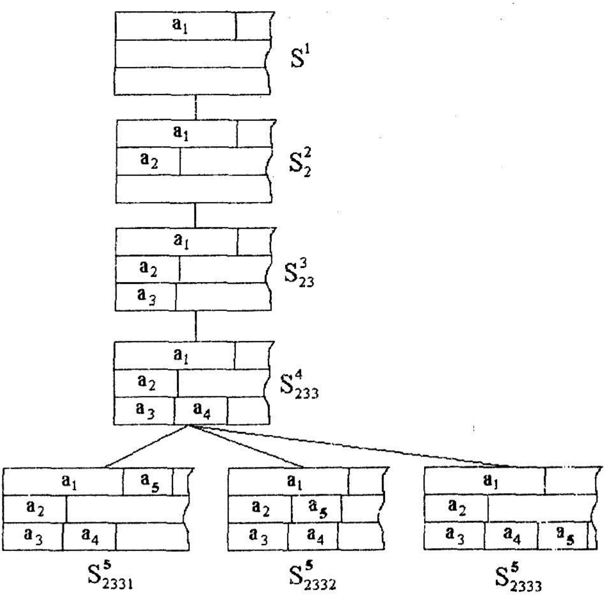


Рис. 4.7. Четверте галуження

Оцінки $\xi\left(S_{2331}^{5}\right)$, $\xi\left(S_{2332}^{5}\right)$, $\xi\left(S_{2333}^{5}\right)$:

$$\xi\left(S_{2331}^{5}\right)=a_1+a_5=\left\{\left(18\left|\frac{10}{154}\right.\right),\left(19\left|\frac{54}{154}\right.\right),\left(20\left|\frac{65}{154}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(21\left|\frac{23}{154}\right.\right),\left(22\left|\frac{2}{154}\right.\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_{2332}^{5}\right)=a_1=\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_{2333}^{5}\right)=a_3+a_4+a_5=\left\{\left(15\left|\frac{6}{1331}\right.\right),\left(16\left|\frac{92}{1331}\right.\right),\left(17\left|\frac{409}{1331}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(18\left|\frac{602}{1331}\right.\right),\left(19\left|\frac{197}{1331}\right.\right),\left(20\left|\frac{24}{1331}\right.\right),\left(21\left|\frac{1}{1331}\right.\right)\right\}.$$

$$H\left(a_1+a_5\right)=\frac{18\cdot\frac{10}{154}+19\cdot\frac{54}{154}+20\cdot\frac{65}{154}+21\cdot\frac{23}{154}+22\cdot\frac{2}{154}}{\frac{10}{154}+\frac{54}{154}+\frac{65}{154}+\frac{23}{154}+\frac{2}{154}}=19\frac{107}{154};$$

$$H\left(a_1\right)=14\frac{11}{14}.$$

$$H\left(a_3+a_4+a_5\right)=$$

$$=\left(15\cdot\frac{6}{1331}+16\cdot\frac{92}{1331}+17\cdot\frac{409}{1331}+18\cdot\frac{602}{1331}+19\cdot\frac{197}{1331}+20\cdot\frac{24}{1331}\right):$$

$$:\left(\frac{3}{1331}+\frac{92}{1331}+\frac{409}{1331}+\frac{602}{1331}+\frac{197}{1331}+\frac{24}{1331}\right)=17\frac{8}{11}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{2331}^{5}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ і $\xi\left(S_{2333}^{5}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то множини S_{2331}^{5} та S_{2333}^{5} відсікаємо. Таким чином, S_{2332}^{5} відображає оптимальне рішення задачі. Найменшим буде значення функції

$F^*\left(x^*\right)=\xi\left(S^4_{2332}\right)=\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}$, а точка, яка доставляє оптимальне значення цільової функції, має вигляд:

$$x^*=\left(\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\},\{(0|1)\},\{(0|1)\},\right.$$

$$\left\{\left(8\left|\frac{2}{12}\right.\right),\left(9\left|\frac{9}{12}\right.\right),\left(10\left|\frac{2}{12}\right.\right)\right\}\left\{\left(4\left|\frac{2}{11}\right.\right),\left(5\left|\frac{8}{11}\right.\right),\left(6\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\{(0|1)\},$$

$$\left.\left\{\left(6\left|\frac{3}{11}\right.\right),\left(7\left|\frac{7}{11}\right.\right),\left(8\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\left\{\left(5\left|\frac{1}{11}\right.\right),\left(6\left|\frac{9}{11}\right.\right),\left(7\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\{(0|1)\}\right).$$

б) Розв'яжемо задачу (4.1)–(4.2) методом повного перебору. Множина переставлень з елементів мультимножини G $E_n(G)$ має вигляд:

$$E_n(G)=E_9(G)=\{a_1a_2a_3a_4a_5a_0a_0a_0a_0,\,a_1a_5a_0a_2a_0a_0a_3a_4a_0,$$

$$a_0a_0a_0a_2a_1a_0a_3a_4a_5,\ldots\}.$$

Знаходимо значення $F(x)$ для кожного елементу множини $E_n(G)$ за формулою (4.3). Так для першого елементу довжина зайнятої частини смуги буде такою: $F(x)=\left\{\left(28\left|\frac{10}{1848}\right.\right),\right.$ $\left.\left(29\left|\frac{247}{1848}\right.\right),\left(30\left|\frac{639}{1848}\right.\right),\left(31\left|\frac{638}{1848}\right.\right),\left(32\left|\frac{253}{1848}\right.\right),\left(33\left|\frac{39}{1848}\right.\right),\left(34\left|\frac{2}{1848}\right.\right)\right\}$; для другого – $F(x)=\left\{\left(18\left|\frac{10}{154}\right.\right),\left(19\left|\frac{54}{154}\right.\right),\left(20\left|\frac{65}{154}\right.\right),\left(21\left|\frac{23}{154}\right.\right),\right.$ $\left.\left(22\left|\frac{2}{154}\right.\right)\right\}$, для третього – $F(x)=\left\{\left(22\left|\frac{10}{168}\right.\right),\left(23\left|\frac{59}{168}\right.\right),\right.$ $\left.\left(24\left|\frac{72}{168}\right.\right),\left(25\left|\frac{25}{168}\right.\right),\left(26\left|\frac{2}{168}\right.\right)\right\}$ тощо.

Найменшим буде значення функції $F^*\left(x^*\right)=\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\right.$ $\left.\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}$, а одна з точок, яка доставляє оптимальне значення цільової функції, має вигляд:

$$x^*=\left(\left\{\left(14\left|\frac{5}{14}\right.\right),\left(15\left|\frac{7}{14}\right.\right),\left(16\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}\{(0\,|\,1)\},\{(0\,|\,1)\},\right.$$

$$\left\{\left(8\left|\frac{2}{12}\right.\right),\left(9\left|\frac{9}{12}\right.\right),\left(10\left|\frac{2}{12}\right.\right)\right\},\left\{\left(4\left|\frac{2}{11}\right.\right),\left(5\left|\frac{8}{11}\right.\right),\left(6\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\{(0\,|\,1)\},$$

$$\left.\left\{\left(6\left|\frac{3}{11}\right.\right),\left(7\left|\frac{7}{11}\right.\right),\left(8\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\left\{\left(5\left|\frac{1}{11}\right.\right),\left(6\left|\frac{9}{11}\right.\right),\left(7\left|\frac{1}{11}\right.\right)\right\},\{(0\,|\,1)\}\right).$$

4.3. Побудова математичної моделі задачі як задачі на нечітких розбиттях

Якщо повернутися до побудови математичної моделі задачі як задачі на переставленнях (див. підрозділ 4.1.2.), то вектор x можна також розглядати як елемент евклідової множини $R(G,m)$ розбиттів мультимножини G на m частин, тобто $x\in R(G,m)$. При цьому кожному x буде відповідати певне розташування прямокутників у смузі і навпаки.

Використовуючи введені (див. розділ 2) операції суми, знаходження *максимуму і мінімуму*, *математичну модель* сформульованої задачі упакування прямокутників при невизначеності, яка обумовлена нечіткими вихідними величинами задачі, представляється [99, 105, 112] у такому вигляді:

знайти

$$F^*\left(x^*\right)=\min_{x\in R(G,m)}\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{p-m+1}x_{ij}; \qquad (4.4.)$$

$$x^* = arg \min_{x\in R(G,m)} \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \tag{4.5}$$

де $arg\,F(x)$ позначає точку x, що доставляє відповідне значення $F(x)$ функції F.

Формула (4.4) дає мінімально можливу довжину зайнятої частини смуги у вигляді нечіткого числа, а формула (4.5) – розбиття x^*, на якій ця довжина $F^*(x^*)$ досягається.

4.4. Розв'язування задачі на нечітких розбиттях методом гілок та меж

4.4.1. Реалізація методу

Поставлену задачу можна розв'язувати за допомогою методу гілок та меж – методу направленого перебору, а для прикладів невеликої вимірності – за допомогою методу повного перебору.

Хоча метод повного перебору і не ефективним методом, обумовленість розгляду такого методу і проведення його аналізу полягає в тому, що, виконавши його, отримаємо верхню оцінку складності розв'язування задачі упакування (4.4)–(4.5).

Метод повного перебору полягає в тому, щоб для кожного x з евклідової множини розбиттів $R(G,m)$ обчислити цільову функцію – довжину зайнятої частини смуги

$$F(x) = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}. \tag{4.6}$$

Розглянемо алгоритм методу гілок та меж, який пропонується для розв'язування задачі (4.4)–(4.5).

1. Впорядкуємо нечіткі довжини прямокутників за незростанням $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_p$. Позначимо через $R_1, R_2, \ldots, R_m$ розбиття мультимножини $G = \{a_1, \ldots, a_p\}$ на m частин, $R_1 + R_2 + \ldots + R_m = R(G,m)$, в кожному розбитті не більше ніж $p - m + 1$ прямокутників.

2. Формуємо початкове розміщення $\bar{x}$ наступним чином: кожний наступний прямокутник з впорядкованого за незрос-

танням набору довжин, починаючи з прямокутника з довжиною a_1 розміщується у ту смужку, довжина зайнятої частини якої є найменшою після розміщення попереднього. Запам'ятовуємо початкове розміщення $\tilde{x}$ і значення цільової функції $\tilde{F}(\tilde{x})$ при цьому розміщенні.

3. Крок $t=1$. На цьому кроці розташовуємо прямокутник з довжиною a_1 в смужку 1 (відносимо до розбиття R_1), тобто $x_{11}=a_1$. Позначимо отриману множину як S^1. Оцінку ξ для будь-якої множини знаходимо як довжину зайнятої частини смуги. На цьому кроці $\xi\left(S^1\right)=a_1$. Значення t збільшуємо на одиницю.

4. Крок $t=2$. Розбиваємо множину S^1 на m підмножин $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2$: $S^1=S_1^2 \bigcup S_2^2 \bigcup \ldots \bigcup S_m^2$, $S_i^2 \bigcap S_j^2=\varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, де m – кількість смужок, розміщуючи прямокутник з довжиною a_2: в смужку 1 (розбиття R_1), в смужку 2 (розбиття R_2), ..., в смужку m (розбиття R_m). Для кожної підмножини $S_i^2, i \in J_m$ знаходимо оцінку множини $\xi\left(S_i^2\right)$ (як довжину зайнятої частини смуги). Порівнюємо $\xi\left(S_i^2\right)$ і $\tilde{F}(\tilde{x})$. Якщо $\xi\left(S_i^2\right)>\tilde{F}(\tilde{x})$, то множину S_i^2 відсікаємо. Серед невідтятих підмножин $S_j^2, j \in J_m$ вибираємо для розгалуження ту, для якої оцінка є найменшою. Усі підмножини, крім підмножини, обраної для розгалуження, переглянутих і відтятих, перепозначуємо на $S_i^3, \ldots, S_j^3$, де i, j – деякі натуральні числа. Значення t збільшуємо на одиницю.

5. На кожному кроці $t=z \geq 3$ розбиваємо множину S_υ^{z-1} на m (або менше, якщо деяке розбиття вже містить $p-m+1$ прямокутник) підмножин $S_{\upsilon 1}^z, S_{\upsilon 2}^z, \ldots, S_{\upsilon m}^z$: $S_\upsilon^{z-1}=S_{\upsilon 1}^z \bigcup S_{\upsilon 2}^z \bigcup \ldots \bigcup S_{\upsilon m}^z$, $S_i^z \bigcap S_j^z=\varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_m$, де m – кількість смужок, тобто розміщуємо прямокутник з довжиною a_z: в розбиття R_1, в розбиття R_2, ..., в розбиття R_m. Додавання прямокутників до R_i

завершується, коли кількість прямокутників в R_i дорівнює $p = m+1$. Для кожної підмножини S_i^z, де i – деяке натуральне число, знаходимо оцінку $\xi\left(S_i^z\right)$ (як довжину зайнятої частини смуги). Порівнюємо $\xi\left(S_i^z\right)$ і $\tilde{F}(\tilde{x})$. Якщо $\xi\left(S_i^z\right)>\tilde{F}(\tilde{x})$, то множину S_i^z відсікаємо. Якщо множина відображає розміщення всіх $a_1,\ldots,a_p$ прямокутників і $\xi\left(S_i^z\right)<\tilde{F}(\tilde{x})$, то значенню $\tilde{F}(\tilde{x})$ присвоюємо значення $\xi\left(S_i^z\right)$, а розміщенню $\tilde{x}$ присвоюємо розміщення, яке відображає множина. Для розгалуження обираємо таку підмножину S_j^z, для якої оцінка найменша. Усі підмножини, крім підмножини, обраної для розгалуження, переглянутих та відтятих, перепозначаємо на $S_i^{z+1},\ldots,S_j^{z+1}$, де i, j – деякі натуральні числа. Значення t збільшуємо на одиницю.

6. Процес продовжується до тих пір, доки не розгалужено або не відтято усі множини. Оптимальним значенням цільової функції буде останнє значення $\tilde{F}(\tilde{x})$, а остання точка $\tilde{x}$ – точкою, що доставляє оптимальний розв'язок.

Зауваження. В розглянутому алгоритмі методу гілок та меж до поставленої задачі доцільно використовувати також наступні правила відсікання:

відсікання № 1: якщо після розміщення прямокутника з довжиною a_p деяке розбиття є порожнім $R_i=\varnothing$, то цю множину відсікаємо, оскільки, очевидно, що ця множина не відображає оптимального розв'язку (для $p>m$);

відсікання № 2: якщо на деякому кроці довжина зайнятої частини смужки з номером i' дорівнює довжині зайнятої частини смужки з номером i'', де i', i'' – деякі натуральні числа, $i'<i''$, то після розміщення прямокутника a_j в ці смужки (тобто додавання їх до розбиттів $R_{i'}$ та $R_{i''}$), де j деяке натуральне число, підмножина, в якій a_j стоїть в смужці з номером i'' відсікаємо (див. рис. 4.2).

Зауваження. Алгоритмічно a_j в смужку i'' не ставиться, тобто галуження при цьому відбувається тільки розміщенням a_j в смужку i'.

4.4.2. Ілюстративний приклад

Проілюструємо методи знаходження розв'язування задачі упакування прямокутників, довжини яких задані нечіткими числами.

Нехай дано три смужки і шість прямокутників: $m = 3,\ \ p = 6.$ Нехай довжини прямокутників задані наступними нечіткими числами:

$$a_1 = \left\{ \left(17 \middle| \frac{1}{9} \right), \left(18 \middle| \frac{3}{9} \right), \left(19 \middle| \frac{5}{9} \right) \right\},$$

$$a_2 = \left\{ \left(16 \middle| \frac{7}{12} \right), \left(17 \middle| \frac{2}{12} \right), \left(18 \middle| \frac{3}{12} \right) \right\},$$

$$a_3 = \left\{ \left(11 \middle| \frac{1}{12} \right), \left(12 \middle| \frac{5}{12} \right), \left(13 \middle| \frac{6}{12} \right) \right\},$$

$$a_4 = \left\{ \left(7 \middle| \frac{5}{17} \right), \left(8 \middle| \frac{9}{17} \right), \left(9 \middle| \frac{3}{17} \right) \right\},$$

$$a_5 = \left\{ \left(6 \middle| \frac{4}{14} \right), \left(7 \middle| \frac{8}{14} \right), \left(8 \middle| \frac{2}{14} \right) \right\},$$

$$a_6 = \left\{ \left(2 \middle| \frac{2}{7} \right), \left(3 \middle| \frac{4}{7} \right), \left(4 \middle| \frac{1}{7} \right) \right\}.$$

Визначимо $n = m \cdot (p - m + 1) = 3 \cdot (6 - 3 + 1) = 12$.

Вводимо до розгляду $n - p = 12 - 6 = 6$ прямокутників з довжиною $a_0 = \{(0|1)\}$. Вектор x має вигляд $x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21},$

$x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})$. Утворюємо мультимножину G: $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0\}$.

Позначаємо через R_1, R_2 та R_3 розбиття мультимножини G на $m = 3$ частин, $R_1 + R_2 + R_3 = R(G, m = 3)$, в кожному розбитті не більше ніж $p - m + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$ прямокутників.

а) Розв'яжемо задачу (4.4)–(4.5) методом гілок та меж.

Впорядкуємо прямокутники за спаданням:

$$H(a_1) = \frac{17 \cdot \frac{1}{9} + 18 \cdot \frac{3}{9} + 19 \cdot \frac{5}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9}} = 18\frac{4}{9},$$

$$H(a_2) = \frac{16 \cdot \frac{7}{12} + 17 \cdot \frac{2}{12} + 18 \cdot \frac{3}{12}}{\frac{7}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12}} = 16\frac{8}{12},$$

$$H(a_3) = \frac{11 \cdot \frac{1}{12} + 12 \cdot \frac{5}{12} + 16 \cdot \frac{6}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{12}} = 12\frac{5}{12},$$

$$H(a_4) = \frac{7 \cdot \frac{5}{17} + 8 \cdot \frac{9}{17} + 9 \cdot \frac{3}{17}}{\frac{5}{17} + \frac{9}{17} + \frac{3}{17}} = 7\frac{15}{17},$$

$$H(a_5) = \frac{6 \cdot \frac{4}{14} + 7 \cdot \frac{8}{14} + 8 \cdot \frac{2}{14}}{\frac{4}{14} + \frac{8}{14} + \frac{1}{14}} = 6\frac{12}{14},$$

$$H(a_6) = \frac{2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{2}{7} + \frac{7}{7} + \frac{1}{7}} = 2\frac{6}{7}.$$

Оскільки, $H(a_1) > H(a_2) > H(a_3) > H(a_4) > H(a_5) > H(a_6)$, то $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_6$.

Початковим буде розміщення прямокутників з довжиною a_1 і a_6 в першу смужку, прямокутників з довжинами a_2 і a_5 – в другу, a_3 і a_4 – в третю. Значення цільової функції при початковому розташуванні:

$$\tilde{F}(\tilde{x}) = \left\{ \left(22 \left| \frac{28}{168} \right. \right), \left(23 \left| \frac{64}{168} \right. \right), \left(24 \left| \frac{42}{168} \right. \right), \left(25 \left| \frac{28}{168} \right. \right), \left(26 \left| \frac{6}{168} \right. \right) \right\}.$$

$$H\left(\tilde{F}(\tilde{x})\right) = \frac{22 \cdot \frac{28}{168} + 23 \cdot \frac{64}{168} + 24 \cdot \frac{42}{168} + 25 \cdot \frac{28}{168} + 26 \cdot \frac{6}{168}}{\frac{28}{168} + \frac{64}{168} + \frac{42}{168} + \frac{28}{168} + \frac{6}{168}} = 23\frac{88}{168}.$$

Крок 1. Прямокутник с довжиною a_1 розміщуємо в розбиття R_1 (див. рис. 4.8):

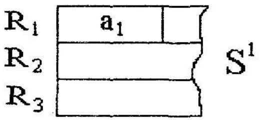


Рис. 4.8. Крок 1

Оцінка $\xi(S^1)$ дорівнює довжині зайнятої частини смуги, тобто $\xi(S^1) = a_1 = \left\{ \left(17 \left| \frac{1}{9} \right. \right), \left(18 \left| \frac{3}{9} \right. \right), \left(19 \left| \frac{5}{9} \right. \right) \right\}$, $H(a_1) = 18\frac{4}{9}$.

Крок 2. Розбиваємо множину S^1 на три підмножини S_1^2, S_2^2, S_3^2: $S^1 = S_1^2 \bigcup S_2^2 \bigcup S_3^2$, $S_i^2 \bigcap S_j^2 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_3$, в залежності від можливості розміщення прямокутника з довжиною a_2: в розбитті R_1, в розбитті R_2 або в розбитті R_3 (див. рис. 4.9).

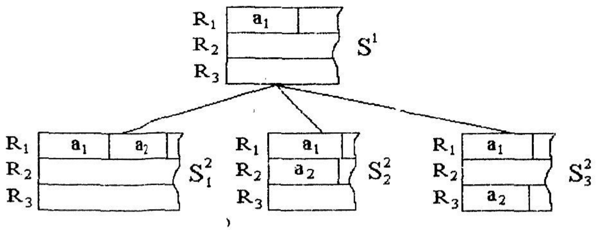


Рис. 4.9. Перше галуження

Оцінки $\xi\left(S_1^2\right)$, $\xi\left(S_2^2\right)$, $\xi\left(S_3^2\right)$ дорівнюють:

$$\xi\left(S_1^2\right)=a_1+a_2=\left\{\left(33\middle|\frac{7}{108}\right),\left(34\middle|\frac{23}{108}\right),\left(35\middle|\frac{44}{108}\right),\right.$$

$$\left.\left(36\middle|\frac{19}{108}\right),\left(37\middle|\frac{15}{108}\right)\right\};$$

$$\xi\left(S_2^2\right)=\xi\left(S_3^2\right)=a_1=\left\{\left(17\middle|\frac{1}{9}\right),\left(18\middle|\frac{3}{9}\right),\left(19\middle|\frac{5}{9}\right)\right\},\ H\left(a_1\right)=18\frac{4}{9}.$$

$$H\left(a_1+a_2\right)=\frac{33\cdot\frac{7}{108}+34\cdot\frac{23}{108}+35\cdot\frac{44}{108}+36\cdot\frac{19}{108}+37\cdot\frac{15}{108}}{\frac{7}{108}+\frac{23}{108}+\frac{44}{108}+\frac{19}{108}+\frac{15}{108}}=35\frac{12}{108}.$$

Оскільки $\xi\left(S_1^2\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, (тому що $35\frac{12}{108}>23\frac{88}{168}$), то вершину S_1^2 відсікаємо. Розглянемо вершини S_2^2 і S_3^2: згідно запропонованого відсікання № 2, вершину S_3^2 відсікаємо. Розгалужуємо множину S_2^2.

Крок 3. Розбиваємо множину S_2^2 на три підмножини S_{21}^3, S_{22}^3, S_{23}^3: $S_2^2=S_{21}^3\bigcup S_{22}^3\bigcup S_{23}^3$, $S_{2(i)}^3\bigcap S_{2(j)}^3=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в залежності від можливості розміщення прямокутника з довжиною a_3: в розбитті R_1, в розбитті R_2 або в розбитті R_3 (див. рис. 4.10).

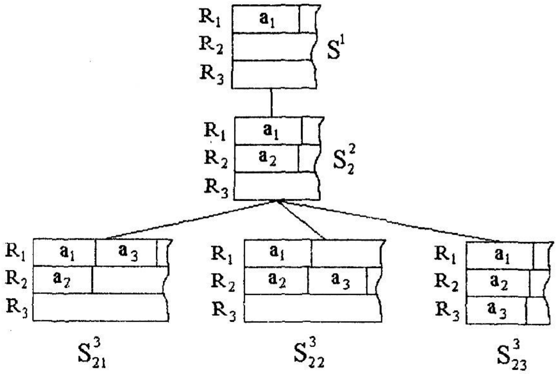


Рис. 4.10. Друге галуження

Оцінки $\xi\left(S_{21}^3\right)$, $\xi\left(S_{22}^3\right)$, $\xi\left(S_{23}^3\right)$ дорівнюють:

$$\xi\left(S_{21}^3\right)=a_1+a_3=\left\{\left(28\left|\frac{1}{108}\right.\right),\left(29\left|\frac{8}{108}\right.\right),\left(30\left|\frac{26}{108}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(31\left|\frac{43}{108}\right.\right),\left(32\left|\frac{30}{108}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{22}^3\right)=a_2+a_3=\left\{\left(27\left|\frac{7}{144}\right.\right),\left(28\left|\frac{37}{144}\right.\right),\left(29\left|\frac{55}{144}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(30\left|\frac{27}{144}\right.\right),\left(31\left|\frac{18}{144}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{23}^3\right)=a_1=\left\{\left(17\left|\frac{1}{9}\right.\right),\left(18\left|\frac{3}{9}\right.\right),\left(19\left|\frac{5}{9}\right.\right)\right\}.\ H\left(a_1\right)=18\frac{4}{9}.$$

$$H(a_1+a_3)=\frac{28\cdot\frac{1}{108}+29\cdot\frac{8}{108}+30\cdot\frac{26}{108}+31\cdot\frac{43}{108}+32\cdot\frac{30}{108}}{\frac{1}{108}+\frac{8}{108}+\frac{43}{108}+\frac{30}{108}}=30\frac{93}{108}.$$

$$H(a_2+a_3)=\frac{27\cdot\frac{7}{144}+28\cdot\frac{37}{144}+29\cdot\frac{55}{144}+30\cdot\frac{27}{144}+31\cdot\frac{18}{144}}{\frac{7}{144}+\frac{37}{144}+\frac{55}{144}+\frac{27}{144}+\frac{18}{144}}=29\frac{1}{12}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{21}^3\right)>\tilde{F}(\tilde{x})$ і $\xi\left(S_{22}^3\right)>\tilde{F}(\tilde{x})$, то вершини S_{21}^3 і S_{22}^3 відсікаємо. Розгалужуємо S_{23}^3.

Крок 4. Розбиваємо множину S_{23}^3 на три підмножини S_{231}^4, S_{232}^4, S_{233}^4: $S_{23}^3=S_{231}^4\bigcup S_{232}^4\bigcup S_{233}^4$, $S_{23(i)}^4\bigcap S_{23(j)}^4=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, в залежності від можливості розміщення прямокутника з довжиною a_4 (див. рис. 4.11).

Оцінки $\xi\left(S_{231}^4\right)$, $\xi\left(S_{232}^4\right)$, $\xi\left(S_{233}^4\right)$:

$$\xi\left(S_{231}^4\right)=a_1+a_4=\left\{\left(24\left|\frac{5}{153}\right.\right),\left(25\left|\frac{24}{153}\right.\right),\left(26\left|\frac{55}{153}\right.\right),\left(27\left|\frac{54}{153}\right.\right),\left(28\left|\frac{15}{153}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{232}^4\right)=a_2+a_4=\left\{\left(23\left|\frac{35}{204}\right.\right),\left(24\left|\frac{73}{204}\right.\right),\left(25\left|\frac{54}{204}\right.\right),\left(26\left|\frac{33}{204}\right.\right),\left(27\left|\frac{9}{204}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{233}^4\right)=a_3+a_4=\left\{\left(18\left|\frac{5}{204}\right.\right),\left(19\left|\frac{34}{204}\right.\right),\left(20\left|\frac{78}{204}\right.\right),\left(21\left|\frac{69}{204}\right.\right),\left(22\left|\frac{18}{204}\right.\right)\right\}.$$

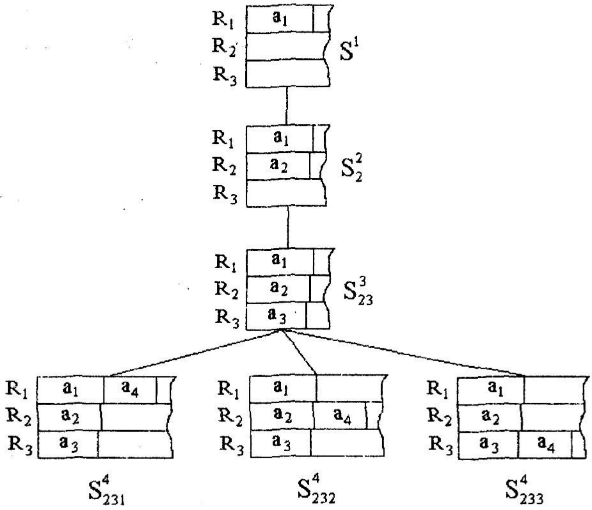


Рис. 4.11. Третє галуження

$$H\left(a_1+a_4\right)=\frac{24\cdot\frac{5}{153}+25\cdot\frac{24}{153}+26\cdot\frac{55}{153}+27\cdot\frac{54}{153}+28\cdot\frac{15}{153}}{\frac{5}{153}+\frac{24}{153}+\frac{55}{153}+\frac{54}{153}+\frac{18}{153}}=26\frac{50}{153}.$$

$$H\left(a_2+a_4\right)=\frac{23\cdot\frac{35}{204}+24\cdot\frac{73}{204}+25\cdot\frac{54}{204}+26\cdot\frac{33}{204}+27\cdot\frac{9}{204}}{\frac{35}{204}+\frac{73}{204}+\frac{54}{204}+\frac{33}{204}+\frac{9}{204}}=24\frac{112}{204}.$$

$$H\left(a_3+a_4\right)=\frac{18\cdot\frac{5}{204}+19\cdot\frac{34}{204}+20\cdot\frac{78}{204}+21\cdot\frac{69}{204}+22\cdot\frac{18}{204}}{\frac{5}{204}+\frac{34}{204}+\frac{78}{204}+\frac{69}{204}+\frac{18}{204}}=20\frac{31}{204}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{231}^4\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ і $\xi\left(S_{232}^4\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то вершини S_{231}^4 і S_{232}^4 відсікаємо. Розгалужуємо S_{233}^4.

Крок 5. Розбиваємо множину S_{233}^4 на три підмножини S_{2331}^5, S_{2332}^5, S_{2333}^5: $S_{233}^4 = S_{2331}^5 \bigcup S_{2332}^5 \bigcup S_{2333}^5$, $S_{233(i)}^5 \bigcap S_{233(j)}^5 = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j \in J_3$, розміщуючи прямокутник з довжиною a_5 (див. рис. 4.12).

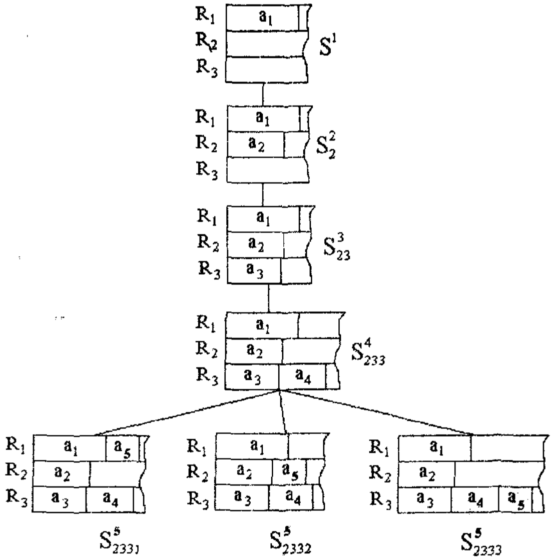


Рис. 4.12. Четверте галуження

Оцінки $\xi\left(S_{2331}^5\right)$, $\xi\left(S_{2332}^5\right)$, $\xi\left(S_{2333}^5\right)$:

$$\xi\left(S_{2331}^5\right) = a_1 + a_5 = \left\{\left(23\left|\frac{4}{126}\right.\right), \left(24\left|\frac{20}{126}\right.\right), \left(25\left|\frac{46}{126}\right.\right), \left(26\left|\frac{46}{126}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(27\left|\frac{10}{126}\right.\right)\right\}. \ \xi\left(S_{2332}^5\right) = a_2 + a_5 = \left\{\left(22\left|\frac{28}{168}\right.\right), \left(23\left|\frac{64}{168}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(24\left|\frac{42}{168}\right.\right), \left(25\left|\frac{28}{168}\right.\right), \left(26\left|\frac{6}{168}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{2333}^{5}\right)=a_3+a_4+a_5=\left\{\left(24\left|\frac{20}{2856}\right.\right),\left(25\left|\frac{176}{2856}\right.\right),\left(26\left|\frac{594}{2856}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(27\left|\frac{968}{2856}\right.\right),\left(28\left|\frac{780}{2856}\right.\right),\left(29\left|\frac{282}{2856}\right.\right),\left(30\left|\frac{36}{2856}\right.\right)\right\}.$$

$$H\left(a_1+a_5\right)=\frac{23\cdot\frac{4}{126}+24\cdot\frac{20}{126}+25\cdot\frac{46}{126}+26\cdot\frac{46}{126}+27\cdot\frac{10}{126}}{\frac{4}{126}+\frac{20}{126}+\frac{46}{126}+\frac{46}{126}+\frac{10}{126}}=26\frac{38}{126}.$$

$$H\left(a_2+a_5\right)=\frac{22\cdot\frac{28}{168}+23\cdot\frac{64}{168}+24\cdot\frac{42}{168}+25\cdot\frac{28}{168}+26\cdot\frac{6}{168}}{\frac{28}{168}+\frac{64}{168}+\frac{42}{168}+\frac{28}{168}+\frac{6}{168}}=23\frac{88}{168}.$$

$$H\left(a_3+a_4+a_5\right)=\left(24\cdot\frac{20}{2856}+25\cdot\frac{176}{2856}+26\cdot\frac{594}{2856}+27\cdot\frac{968}{2856}+\right.$$

$$\left.+28\cdot\frac{780}{2856}+29\cdot\frac{282}{2856}+30\cdot\frac{36}{2856}\right):\left(\frac{20}{2856}+\frac{176}{2856}+\frac{594}{2856}+\frac{968}{2856}+\right.$$

$$\left.+\frac{780}{2856}+\frac{282}{2856}+\frac{36}{2856}\right)=27\frac{446}{2856}.$$

Оскільки $\xi\left(S_{2331}^{5}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ і $\xi\left(S_{2333}^{5}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то вершини S_{2331}^{5} і S_{2333}^{5} відсікаємо. Розгалужуємо S_{2332}^{5}.

Крок 6. Розбиваємо множину S_{2332}^{5} на три підмножини S_{23321}^{6}, S_{23322}^{6}, S_{23323}^{6}: $S_{2332}^{5}=S_{23321}^{6}\bigcup S_{23322}^{6}\bigcup S_{23323}^{6}$, $S_{2332(i)}^{6}\bigcap S_{2332(j)}^{6}=\varnothing$, $i\neq j$, $\forall i,j\in J_3$, розміщуючи прямокутник з довжиною a_6 (див. рис. 4.13).

Оцінки $\xi\left(S_{23321}^{6}\right)$, $\xi\left(S_{23322}^{6}\right)$, $\xi\left(S_{23323}^{6}\right)$:

$$\xi\left(S_{23321}^{6}\right)=a_2+a_5=\left\{\left(22\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(23\left|\frac{64}{168}\right.\right),\left(24\left|\frac{42}{168}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(25\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(26\left|\frac{6}{168}\right.\right)\right\}.$$

$$\xi\left(S_{23322}^{6}\right)=a_2+a_5+a_6=\left\{\left(24\left|\frac{56}{1176}\right.\right),\left(25\left|\frac{240}{1176}\right.\right),\left(26\left|\frac{368}{1176}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(27\left|\frac{288}{1176}\right.\right),\left(28\left|\frac{166}{1176}\right.\right),\left(29\left|\frac{52}{1176}\right.\right),\left(30\left|\frac{6}{1176}\right.\right)\right\}.$$

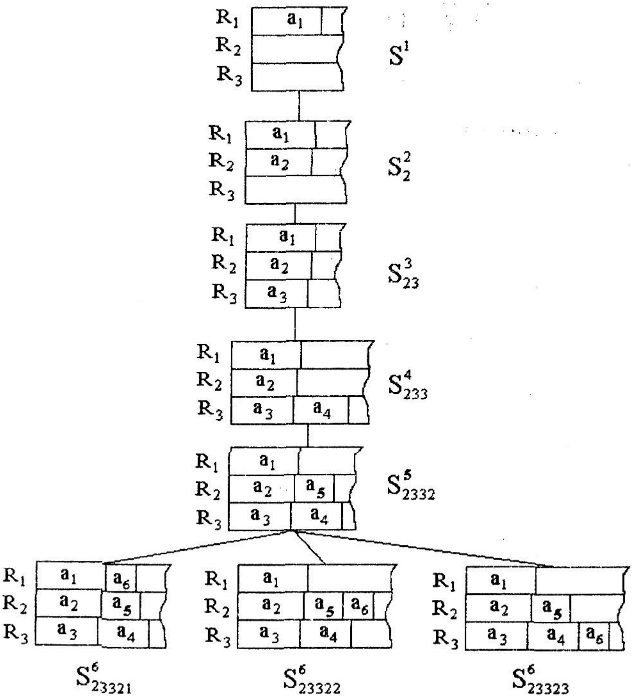


Рис. 4.13. П’яте галуження

$$\xi\left(S^6_{23323}\right)=a_2+a_5=\left\{\left(22\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(23\left|\frac{64}{168}\right.\right),\left(24\left|\frac{42}{168}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(25\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(26\left|\frac{6}{168}\right.\right)\right\}.\ H\left(a_2+a_5\right)=23\frac{88}{168}.$$

$$H\left(a_2+a_5+a_6\right)=\left(24\cdot\frac{56}{1176}+25\cdot\frac{240}{1176}+26\cdot\frac{368}{1176}+27\cdot\frac{288}{1176}+\right.$$

$$\left.+28\cdot\frac{166}{1176}+29\cdot\frac{52}{1176}+30\cdot\frac{6}{1176}\right):\left(\frac{56}{1176}+\frac{240}{1176}+\frac{368}{1176}+\frac{288}{1176}+\right.$$

$$\left.+\frac{166}{1176}+\frac{52}{1176}+\frac{6}{1176}\right)=26\frac{448}{1176}.$$

Оскільки $\xi\left(S^6_{23322}\right)>\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$, то вершину S^6_{23322} відсікаємо. Таким чином, вершини S^6_{23321}, S^6_{23323} дають оптимальний розв'язок задачі. Найменшим буде значення функції $F^*\left(x^*\right)=\xi\left(S^6_{23321}\right)=$ $=\left\{\left(22\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(23\left|\frac{64}{168}\right.\right),\left(24\left|\frac{42}{168}\right.\right),\left(25\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left(26\left|\frac{6}{168}\right.\right)\right\}$, а точки, що доставляють оптимальне значення цільової функції, мають вигляд: $x^*=\left(\left\{\left(17\left|\frac{1}{9}\right.\right),\left(18\left|\frac{3}{9}\right.\right),\left(19\left|\frac{5}{9}\right.\right)\right\},\ \left\{\left(2\left|\frac{2}{7}\right.\right),\left(3\left|\frac{4}{7}\right.\right),\left(4\left|\frac{1}{7}\right.\right)\right\},\right.$ $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(16\left|\frac{7}{12}\right.\right),\left(17\left|\frac{2}{12}\right.\right),\left(18\left|\frac{3}{12}\right.\right)\right\}$, $\left\{\left(6\left|\frac{4}{14}\right.\right),\left(7\left|\frac{8}{14}\right.\right),\right.$ $\left.\left(8\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(11\left|\frac{1}{12}\right.\right),\left(12\left|\frac{5}{12}\right.\right),\left(13\left|\frac{6}{12}\right.\right)\right\}$, $\left.\left\{\left(7\left|\frac{5}{17}\right.\right),\left(8\left|\frac{9}{17}\right.\right),\left(9\left|\frac{3}{17}\right.\right)\right\},\ \left\{\left(0|1\right)\right\},\ \left\{\left(0|1\right)\right\}\right)$ та $x^*=\left(\left\{\left(17\left|\frac{1}{9}\right.\right),\right.\right.$ $\left.\left(18\left|\frac{3}{9}\right.\right),\left(19\left|\frac{5}{9}\right.\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(0|1\right)\right\}$, $\left\{\left(16\left|\frac{7}{12}\right.\right),\left(17\left|\frac{2}{12}\right.\right),\right.$

$\left(18\left|\frac{3}{12}\right.\right)\Big\}$, $\left\{\left(6\left|\frac{4}{14}\right.\right),\left(7\left|\frac{8}{14}\right.\right),\left(8\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\}$, $\{(0|1)\}$, $\{(0|1)\}$, $\Big\{\left(11\left|\frac{1}{12}\right.\right)$, $\left(12\left|\frac{5}{12}\right.\right),\left(13\left|\frac{6}{12}\right.\right)\Big\}$, $\left\{\left(7\left|\frac{5}{17}\right.\right),\left(8\left|\frac{9}{17}\right.\right),\left(9\left|\frac{3}{17}\right.\right)\right\}$, $\Big\{\left(2\left|\frac{2}{7}\right.\right),\left(3\left|\frac{4}{7}\right.\right)$, $\left(4\left|\frac{1}{7}\right.\right)\Big\}$, $\{(0|1)\}\big)$.

б) Розв'яжемо задачу (4.4.)–(4.5) методом повного перебору. Множина розбиттів $R(G,m)$ має вигляд:

$$R(G,m)=R(G,3)=\big(\{R_1=\{a_1,a_0,a_0,a_0\},R_2=\{a_2,a_3,a_4,a_0\},$$

$$R_3=\{a_5,a_6,a_0,a_0\}\},\{R_1=\{a_1,a_2,a_0,a_0\},R_2=\{a_3,a_4,a_0,a_0\},$$

$$R_3=\{a_5,a_6,a_0,a_0\}\},\ \{R_1=\{a_1,a_2,a_3,a_0\},R_2=\{a_4,a_5,a_0,a_0\},$$

$$R_3=\{a_6,a_0,a_0,a_0\}\},\dots\big).$$

Знаходимо значення $F(x)$ для кожного елементу множини $R(G,m)$ за формулою (4.6). Так для першого елементу довжина зайнятої частини смуги буде такою:

$$F(x)=\left\{\left(34\left|\frac{35}{2448}\right.\right),\left(35\left|\frac{248}{2448}\right.\right),\left(36\left|\frac{629}{2448}\right.\right),\left(37\left|\frac{741}{2448}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left(38\left|\frac{498}{2448}\right.\right),\left(39\left|\frac{243}{2448}\right.\right),\left(40\left|\frac{54}{2448}\right.\right)\right\},$$

для другого – $F(x)=\Big\{\left(33\left|\frac{7}{108}\right.\right),\left(34\left|\frac{23}{108}\right.\right),\left(35\left|\frac{44}{108}\right.\right),\left(36\left|\frac{19}{108}\right.\right)$, $\left(37\left|\frac{15}{108}\right.\right)\Big\}$, для третього – $F(x)=\Big\{\left(44\left|\frac{7}{1296}\right.\right),\left(45\left|\frac{58}{1296}\right.\right)$, $\left(46\left|\frac{114}{1296}\right.\right),\left(47\left|\frac{377}{1296}\right.\right),\left(48\left|\frac{374}{1296}\right.\right),\left(49\left|\frac{189}{1296}\right.\right),\left(50\left|\frac{90}{1296}\right.\right)\Big\}$ тощо.

Найменшим буде значення функції $F^*\left(x^*\right)=\left\{\left(22\left|\frac{28}{168}\right.\right),\right.$ $\left(23\left|\frac{64}{168}\right.\right),\left(24\left|\frac{42}{168}\right.\right),\left(25\left|\frac{28}{168}\right.\right),\left.\left(26\left|\frac{6}{168}\right.\right)\right\}$, а одна з точок, що доставляє оптимальне значення цільової функції, має вигляд:

$$x^*=\left(\left\{\left(17\left|\frac{1}{9}\right.\right),\left(18\left|\frac{3}{9}\right.\right),\left(19\left|\frac{5}{9}\right.\right)\right\},\ \left\{\left(2\left|\frac{2}{7}\right.\right),\left(3\left|\frac{4}{7}\right.\right),\left(4\left|\frac{1}{7}\right.\right)\right\},\ \{(0|1)\},\right.$$

$$\{(0|1)\},\ \left\{\left(16\left|\frac{7}{12}\right.\right),\left(17\left|\frac{2}{12}\right.\right),\left(18\left|\frac{3}{12}\right.\right)\right\},\ \left\{\left(6\left|\frac{4}{14}\right.\right),\left(7\left|\frac{8}{14}\right.\right),\left(8\left|\frac{2}{14}\right.\right)\right\},$$

$$\{(0|1)\},\ \{(0|1)\},\ \left\{\left(11\left|\frac{1}{12}\right.\right),\left(12\left|\frac{5}{12}\right.\right),\left(13\left|\frac{6}{12}\right.\right)\right\},\ \left\{\left(7\left|\frac{5}{17}\right.\right),\left(8\left|\frac{9}{17}\right.\right),\right.$$

$$\left.\left.\left(9\left|\frac{3}{17}\right.\right)\right\},\ \{(0|1)\},\ \{(0|1)\}\right).$$

4.5. Дослідження ефективності методів розв'язування задачі упакування

4.5.1. Оцінка складності методу розв'язування задачі упакування нечітких прямокутників як задачі на переставленнях

Проведемо аналіз алгоритму методу повного перебору для розв'язування задачі (4.1)–(4.2).

В підрозділі 2.9 були знайдені оцінки складності роботи основних операцій з нечіткими числами, які й використаємо при аналізі алгоритмів.

Для одного переставлення маємо: в кожній смужці додаємо максимум $p-m+1$ прямокутників, тобто виконуємо максимум $q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4$ операцій, тобто маємо оцінку $\Theta\left(q^{2(p-m+1)}\right)$. Тобто. для m смужок виконуємо $m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)$ операцій, оцінка складає $\Theta\left(mq^{2(p-m+1)}\right)$. Серед зайнятих довжин смужок знаходимо найбільшу довжину, тобто виконуємо не більше, ніж $3mq-m-1$ операцій.

Тобто, для кожного переставлення час роботи складає не більше, ніж $m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)+3mq-$ $+m-1=mq^{2(p-m+1)}+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+4mq+mp-m^2-m-1$, тобто маємо оцінку $\Theta\left(mq^{2(p-m+1)}\right)$.

Для $n!$ переставлень час роботи буде не більше, ніж $n!\left(mq^{2(p-m+1)}+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+4mq+mp-m^2-m-1\right)+\left(3n!q-\right.$ $\left.-n!-1\right)$, в останніх дужках – кількість операцій, яку необхідно виконати для вибору з $n!$ цільових функцій найбільшої, тобто маємо оцінку $\Theta\left(n!mq^{2(p-m+1)}\right)$.

Враховуючи, що $n=m(p-m+1)$, маємо: час роботи алгоритму методу повного перебору буде не більше, ніж $\left(m(p-m+1)\right)!\times\left(mq^{2(p-m+1)}+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+4mq+mp-m^2-\right.$ $\left.-m-1\right)+3q\cdot\left(m(p-m+1)\right)!-\left(m(p-m+1)\right)!-1$. Оцінка приймає вигляд $\Theta\left(\left(m(p-m+1)\right)!mq^{2(p-m+1)}\right)$.

Проаналізуємо останній вираз. Для цього проаналізуємо окремо всі його доданки.

а) Оцінка виразу $\left(m(p-m+1)\right)!\left(mq^{2(p-m+1)}+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+\right.$ $\left.+4mq+mp-m^2-m-1\right)$ складає $T(m)=\Theta\left(m^2!mq^{2(p-m+1)}\right)$, $T(p)=\Theta\left(p!q^{2(p-m+1)}\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{2(p-m+1)}\right)$.

б) Оцінка виразу $3q\cdot\left(m(p-m+1)\right)!-\left(m(p-m+1)\right)!-1$ складає $T(m)=\Theta\left(m^2!\right)$, $T(p)=\Theta(p!)$, $T(q)=\Theta(q)$.

Таким чином, час роботи методу повного перебору залежить від кількості смужок як $T(m)=\Theta\left(m^2!mq^{2(p-m+1)}\right)$, від кількості прямокутників як $T(p)=\Theta\left(p!q^{2(p-m+1)}\right)$, від максимальної потужності нечітких множин, які характеризують довжини прямокутників, як $T(q)=\Theta\left(q^{2(p-m+1)}\right)$.

Проведемо аналіз алгоритму методу гілок та меж для розв'язування задачі (4.1)–(4.2).

Підрахуємо кількість вузлів дерева розв'язків в найгіршому випадку (без врахування кількості операцій для знаходження початкового розміщення $\tilde{x}$ і значення цільової функції $\tilde{F}(\tilde{x})$). Після розташування прямокутника з довжиною a_1 маємо 1 вузол. Після розміщення прямокутника з довжиною a_2 додаються ще m вузлів. Після розташування прямокутника з довжиною a_3 додаються ще m^2 вузлів тощо. Тобто після розміщення останнього прямокутника з довжиною a_p усього отримуємо $1+m+m^2+m^3+\ldots+m^{p-1}$ вузлів. Отримана послідовність є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює 1, а знаменник геометричної прогресії дорівнює m. Сума p перших членів геометричної прогресії дорівнює $1+m+m^2+\ldots+m^{p-1}=\dfrac{m^p-1}{m-1}$. Таким чином, в найгіршому випадку кількість вузлів дерева розв'язків складає не більше, ніж $\dfrac{m^p-1}{m-1}$ вузлів.

Для кожного вузла визначаємо скільки прямокутників в найгіршому випадку додаємо: для вузлів 1-го рівня прямокутників не додаємо, для вузлів 2-го рівня в найгіршому випадку додаємо 2 прямокутника, для вузлів 3-го рівня – 3 прямокутника, …, для вузлів рівня p – p прямокутників. Тобто в найгіршому випадку кількість операцій для знаходження суми прямокутників для вузлів 1-го рівня – 0, для вузлів 2-го рівня – $m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)$, для вузлів 3-го рівня – $m\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)$, …, для вузлів рівня p – $m\left(q^{2p}+5q^p+q^{p-1}+q-5\right)$. У підсумку, в найгіршому випадку кількість операцій для знаходження суми прямокутників для всіх вузлів складає

$$0\cdot 1+m\cdot m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)+m^2\cdot m\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)+$$

$$+m^3\cdot m\left(q^8+5q^4+q^3+q-1\right)+\ldots+m^{p-1}\cdot m\left(q^{2p}+5q^p+q^{p-1}+\right.$$

$$\left.+q+p-5\right)=m\left(m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)\right)+$$

$$+m\left(m^2\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)\right)+m\left(m^3\left(q^8+5q^4+q^3+q-1\right)\right)+$$

$$+m\left(m^{p-1}\left(q^{2p}+5q^p+q^{p-1}+q+p-5\right)\right)=m\left(\left(mq^4+5mq^2+mq+\right.\right.$$

$$\left.+mq-3m\right)+\left(m^2q^6+5m^2q^3+m^2q^2+m^2q-2m^2\right)+$$

$$\left.\left.+\ldots+\left(m^{p-1}q^{2p}+5m^{p-1}q^p+m^{p-1}q^{p-1}+m^{p-1}q+m^{p-1}\left(p-5\right)\right)\right)\right)=$$

$$=m\left(\left(mq^4+m^2q^6+\ldots+m^{p-1}q^{2p}\right)+\left(5mq^2+5m^2q^3+\ldots+5m^{p-1}q^p\right)+\right.$$

$$+\left(mq+m^2q^2+\ldots+m^{p-1}q^{p-1}\right)+\left(mq+m^2q+\ldots+m^{p-1}q^p\right)+\left(-3m-\right.$$

$$\left.\left.-2m^2+\ldots+\left(p-5\right)m^{p-1}\right)\right)=m\left(\frac{mq^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-1}\right)}{1-mq^2}+\right.$$

$$\left.+5\frac{mq^2\left(1-\left(mq\right)^{p-1}\right)}{1-mq}+\frac{mq\left(1-\left(mq\right)^{p-1}\right)}{1-mq}+q\frac{m\left(1-m^{p-1}\right)}{1-m}+\left(-3m-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2m^2+\ldots+\left(p-5\right)m^{p-1}\right)\right).$$

Для кожного вузла порівнюємо довжини зайнятих частин смужок і вибираємо найбільшу довжину – це ще $\frac{m^p-1}{m-1}\left(3mq-m-1\right)$ операцій. Для кожного вузла найбільшу довжину порівнюємо із значенням цільової функції $\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ – це ще $\frac{m^p-1}{m-1}(6q-3)$ операцій. Таким чином, для всіх вузлів маємо не більше, ніж

$$\frac{m^p-1}{m-1}(3mq-m-6q-4)+m\left(\frac{mq^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-1}\right)}{1-mq^2}+\right.$$

$$+5\frac{mq^2\left(1-(mq)^{p-1}\right)}{1-mq}+\frac{mq\left(1-(mq)^{p-1}\right)}{1-mq}+q\frac{m\left(1-m^{p-1}\right)}{1-m}+$$

$$\left.+\left(-3m-2m^2+\ldots+(p-5)m^{p-1}\right)\right) \text{ операцій.}$$

Проаналізуємо останній вираз. Для цього проаналізуємо окремо усі його доданки.

а) Оцінка виразу $\frac{m^p-1}{m-1}(3mq-m-6q-4)$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, $T(q)=\Theta(q)$, $T(p)=\Theta\left(m^p\right)$.

б) Оцінка виразу $\frac{m^2q^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-1}\right)}{1-mq^2}=\frac{m^2q^4-m^{p+1}q^{2p+1}}{1-mq^2}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{2p}\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^pq^{2p}\right)$.

в) Оцінка виразу $\frac{5m^2q^4-5m^{p+1}q^{p+1}}{1-mq}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^p\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^pq^p\right)$.

г) Оцінка виразу $\frac{m^2q\left(1-(mq)^{p-1}\right)}{1-mq}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{p-1}\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^pq^p\right)$.

д) Оцінка виразу $\frac{qm^2-qm^{p+1}}{1-m}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, від q не залежить, $T(p)=\Theta\left(m^p\right)$.

є) Оцінка виразу $m\left(-3m-2m^2+...+(p-5)m^{p-1}\right)$ складає $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, від q не залежить, $T(p)=\Theta\left(pm^p\right)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 4.1. Час роботи методу гілок та меж залежить від кількості смужок як $T(m)=\Theta\left(m^p\right)$, від кількості прямокутників як $T(p)=\Theta\left(m^p\left(q^{2p}+p\right)\right)$, від максимальної потужності нечітких множин, які характеризують довжини прямокутників, як $T(q)=\Theta\left(q^{2p}\right)$.

4.5.2. Оцінка складності методу розв'язування задачі упакування нечітких прямокутників як задачі на розбиттях

Проведемо аналіз алгоритму методу повного перебору для розв'язування задачі (4.4.)–(4.5).

Для одного деякого розбиття маємо: в кожній смужці додаємо максимум $p-m+1$ прямокутників, тобто виконуємо максимум $q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4$ операцій, тобто маємо оцінку $\Theta\left(q^{2(p-m+1)}\right)$. Тобто для m смужок виконуємо максимум $m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)$ операцій, оцінка складає $\Theta\left(mq^{2(p-m+1)}\right)$. Серед довжин зайнятих смужок знаходимо найбільшу довжину, тобто виконуємо не більше, ніж $3mq-m-1$ операцій.

Тобто, для кожного розбиття час роботи складає не більше, ніж
$m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)+3mq-m-1=mq^{2(p-m+1)}+$ $+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+4mq+mp-m^2-m-1$, тобто маємо оцінку $\Theta\left(mq^{2(p-m+1)}\right)$.

Кількість розбиттів числа n на m доданків, серед яких немає нульових доданків, дорівнює [див. напр. 116, с. 216–217]

$$\frac{1}{m!}\left(m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^n - \ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-2))}{(m-1)!}\times\right.$$

$$\left.\times(m-(m-1))^n\right).$$

Для $\frac{1}{m!}\left(m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^n - \ldots\right)$ розбиттів час роботи буде не більше, ніж $\frac{1}{m!}\left(m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \right.$

$$\left.+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^n - \ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-2))}{(m-1)!}(m-(m-1))^n\right)\times$$

$$\times\left(mq^{2(p-m+1)} + 5mq^{p-m+1} + mq^{p-m} + 4mq + mp - m^2 - m - 1\right) + \left[\frac{3q-1}{m!}\times\right.$$

$$\times\left(m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^n - \ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-2))}{(m-1)!}\times\right.$$

$$\left.\left.\times(m-(m-1))^n\right) - 1\right].$$

В квадратних дужках – кількість операцій необхідних виконати для вибору з $\frac{1}{m!}\left(m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^n - \ldots\right)$ цільових функцій найбільшу, тобто маємо оцінку $\Theta\left(\frac{m\cdot m^{m+n-1}}{m!}\left(mq^{2(p-m+1)} - m^2\right)\right) = = \Theta\left(\frac{m^{m+n+1}q^{2(p-m+1)} + m^{m+n+2}}{m!}\right).$

Враховуючи, що $n = m(p-m+1)$, маємо: час роботи алгоритму методу повного перебору буде не більше, ніж

$$\frac{1}{m!}\left(m^{m(p-m+1)} - \frac{m}{1}(m-1)^{m(p-m+1)} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m(p-m+1)} - \ldots\right)\times$$

$$\times\left(mq^{2(p-m+1)}+5mq^{p-m+1}+mq^{p-m}+4mq+mp-m^2-m-1\right)+\left[\frac{3q-1}{m!}\times\right.$$

$$\left.\times\left(m^{m(p-m+1)}-\frac{m}{1}(m-1)^{m(p-m+1)}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-2)^{m(p-m+1)}-\ldots\right)-1\right].$$

Оцінка набуває вигляду:

$$\Theta\left(\frac{m\cdot m^{m+m(p-m+1)-1}}{m!}\left(mq^{2(p-m+1)}-m^2\right)\right)=$$

$$=\Theta\left(\frac{m^{2m+mp-m^2+1}q^{2(p-m+1)}+m^{2m+mp-m^2+2}}{m!}\right).$$

Таким чином, час роботи методу повного перебору залежить від кількості смужок як $T(m)=\Theta\left(\frac{m^{2m+mp-m^2+1}q^{2(p-m+1)}+m^{2m+mp-m^2+2}}{m!}\right)$, від кількості прямокутників як $T(p)=\Theta\left(m^{2m+mp-m^2+1}\times\right.$ $\left.\times q^{2(p-m+1)}+m^{2m+mp-m^2+2}\right)$, від максимальної потужності нечітких множин, що характеризують довжини прямокутників, як $T(q)=\Theta\left(q^{2(p-m+1)}\right)$.

Проведемо аналіз алгоритму методу гілок та меж для розв'язування задачі (4.4)–(4.5).

Підрахуємо кількість вузлів дерева розв'язків в найгіршому випадку (без врахування кількості операцій для знаходження початкового розміщення $\tilde{x}$ і значення цільової функції $\tilde{F}(\tilde{x})$). Після розташування прямокутника з довжиною a_1 маємо 1 вузол. Після розміщення прямокутника з довжиною a_2 додаються ще m вузлів. Після розташування прямокутника з довжиною a_3 додаються ще m^2 вузлів тощо. Тобто після розміщення $p-m+1$-го прямокутника з довжиною a_{p-m+1} усього отримуємо $1+m+m^2+m^3+\ldots+m^{p-m}$ вузлів. Отримана послідовність є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює 1, а знаменник геометричної прогресії дорівнює m. Сума перших $p-m+1$ членів геометричної прогресії дорівнює $1+m+m^2+...+m^{p-m}=\dfrac{m^{p-m}-1}{m-1}$. Таким чином, в найгіршому випадку кількість вузлів дерева розв'язків складає не більше, ніж $\dfrac{m^{p-m}-1}{m-1}$ вузлів.

Для кожного вузла визначаємо скільки прямокутників в найгіршому випадку додаємо: для вузлів 1-го рівня прямокутників не додаємо, для вузлів 2-го рівня в найгіршому випадку додаємо 2 прямокутника, для вузлів 3-го рівня – 3 прямокутника, ..., для вузлів рівня $p-m+1$ – додаємо $p-m+1$ прямокутник. Тобто в найгіршому випадку кількість операцій для знаходження суми прямокутників для вузлів 1-го рівня – 0, для вузлів 2-го рівня – $m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)$, для вузлів 3-ого рівня – $m\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)$, ..., для вузлів рівня $p-m+1$– $m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)$. У підсумку, в найгіршому випадку кількість операцій для знаходження суми прямокутників для всіх вузлів складає

$$0\cdot 1+m\cdot m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)+m^2m\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)+$$

$$+m^3\cdot m\left(q^8+5q^4+q^3+q-1\right)+...+m^{p-m}\cdot m\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+\right.$$

$$\left.+q^{p-m}+q+p-m-4\right)=m\cdot\left(m\left(q^4+5q^2+q+q-3\right)\right)+$$

$$+m\left(m^2\left(q^6+5q^3+q^2+q-2\right)\right)+m\left(m^3\left(q^8+5q^4+q^3+q-1\right)\right)+...+$$

$$+m\left(m^{p-m}\left(q^{2(p-m+1)}+5q^{p-m+1}+q^{p-m}+q+p-m-4\right)\right)=$$

$$=m\cdot\left(\left(mq^4+5mq^2+mq+mq-3m\right)+\left(m^2q^6+\right.\right.$$

$$+5m^2q^3+m^2q^2+m^2q-2m^2\Big)+...+\Big(m^{p-m}q^{2(p-m+1)}+5m^{p-m}q^{p-m+1}+$$

$$+m^{p-m}q^{p-m}+m^{p-m}q+m^{p-m}\left(p-m-4\right)\big)\big)=m\cdot\Big(mq\big({}^4+m^2q^6+\ldots+$$

$$+m^{p-m}q^{2(p-m+1)}\big)+\left(5mq^2+5m^2q^3+\ldots+5m^{p-m}q^{p-m+1}\right)+\big(mq+m^2q^2+$$

$$+\ldots+m^{p-m}q^{p-m}\big)+\left(mq+mq^2+\ldots+m^{p-m}q\right)+\big(-3m-2m^2+\ldots+$$

$$+\left(p-m-4\right)m^{p-m}\big)\Big)=m\left(\frac{mq^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-m}\right)}{1-mq^2}+5\frac{mq^2\left(1-\left(mq\right)^{p-m}\right)}{1-mq}+\right.$$

$$\left.+\frac{mq\left(1-\left(mq\right)^{p-m}\right)}{1-mq}+q\frac{m\left(1-m^{p-m}\right)}{1-m}+\big(-3m-2m^2+\ldots+\left(p-m-4\right)\times\right.$$

$\left.\times m^{p-m}\big)\right)$, але до $p-m+1$ рівня порівнюємо довжини зайнятих частин смужок і вибираємо найбільшу довжину – це ще $\frac{m^{p-m}-1}{m-1}\left(3mq-m-1\right)$ операцій.

Для кожного вузла включно до $p-m+1$ рівня найбільшу довжину порівнюємо із значенням цільової функції $\tilde{F}\left(\tilde{x}\right)$ – це ще $\frac{m^{p-m}-1}{m-1}\left(6q-3\right)$ операцій.

Таким чином, для всіх вузлів включно до $p-m+1$ рівня маємо не більше, ніж $\frac{m^{p-m}-1}{m-1}\left(3mq-m-6q-4\right)+$

$$+m\left(\frac{mq^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-m}\right)}{1-mq^2}+5\frac{mq^2\left(1-\left(mq\right)^{p-m}\right)}{1-mq}+\frac{mq\left(1-\left(mq\right)^{p-m}\right)}{1-mq}+\right.$$

$$\left.+q\frac{m\left(1-m^{p-m}\right)}{1-m}+\left(-3m-2m^2+\ldots+\left(p-m-4\right)m^{p-m}\right)\right)$$ операцій.

Проаналізуємо останній вираз. Для цього проаналізуємо окремо усі його доданки.

а) Оцінка виразу $\frac{m^{p-m}-1}{m-1}(3mq-m-6q-4)$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m}\right)$, $T(q)=\Theta(q)$, $T(p)=\Theta\left(m^{p}\right)$.

б) Оцінка виразу $\frac{m^2q^4\left(1-\left(mq^2\right)^{p-m}\right)}{1-mq^2}=\frac{m^2q^4-m^{p-m+2}q^{2p-2m+4}}{1-mq^2}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+1}\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{2p-2m+2}\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^{p}q^{2p}\right)$.

в) Оцінка виразу $5\frac{m^2q^2\left(1-(mq)^{p-m}\right)}{1-mq}=\frac{5m^2q^2-5m^{p-m+2}q^{p-m+2}}{1-mq}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+1}\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{p-m+1}\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^{p}q^{p}\right)$.

г) Оцінка виразу $\frac{m^2q\left(1-(mq)^{p-m}\right)}{1-mq}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+1}\right)$, $T(q)=\Theta\left(q^{p-m}\right)$, $T(p)=\Theta\left(m^{p}q^{p}\right)$.

д) Оцінка виразу $\frac{qm^2-qm^{p-m+2}}{1-m}$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+1}\right)$, $T(q)=\Theta(q)$, $T(p)=\Theta\left(m^{p}\right)$.

є) Оцінка виразу $m\left(-3m+2m^2+\ldots+(p-m-4)m^{p-m}\right)$ складає $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+2}\right)$, від q не залежить, $T(p)=\Theta\left(pm^{p}\right)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 4.2. Час роботи методу гілок та меж залежить від кількості смужок як $T(m)=\Theta\left(m^{p-m+2}\right)$, від кількості прямокутників як $T(p)=\Theta\left(m^{p}\left(q^{2p}+p\right)\right)$, від максимальної потужності нечітких множин, які характеризують довжини прямокутників, як $T(q)=\Theta\left(q^{2p-2m+2}\right)$.

4.5.3. Числові експерименти

На мові Delphi 6.0 була написана програма, що знаходить розв'язок задачі (4.1)–(4.2) методом гілок та меж і повним перебором. Довжини прямокутників генерувалися за допомогою датчика випадкових чисел. Було проведено серію числових експериментів на ПК Pentium II з тактовою частотою 233МГц. За результатами цих експериментів було порівняно час роботи програми методу повного перебору з часом роботи програми методу гілок і меж (див. табл. 4.1), потужність носія нечіткої множини у цій серії дорівнювала трьом.

З таблиці 4.1 видно, що алгоритм методу гілок та меж є набагато ефективнішим ніж алгоритм методу повного перебору.

Таблиця 4.1

Порівняння часу роботи програм методу повного перебору та методу гілок і меж

№	$n = m(p - m + 1)$	Кількість смужок, m	Кількість прямокутників, p	Час роботи програми, хв	
				методу повного перебору	методу гілок та меж
1	4	2	3	1	1
2	6	2	4	1	1
3	6	3	4	1	1
4	8	2	5	1	1
5	8	4	5	1	1
6	9	3	5	2	1
7	10	5	6	14	1
8	10	2	6	17	1

В іншій серії числових експериментів з 240 розрахунків перевірялась ефективність роботи програми методу гілок і меж. Кількість прямокутників було сталою і дорівнювала двадцяти, кількість смужок змінювалась від одного до двадцяти одного, потужність носія нечіткої множини змінювалась від одиниці до двадцяти.

Виявилось, що в 236 випадках програма розв'язала задачу за 1 хвилину, в 1 випадку (кількість смужок дорівнювала 7, потужність носія нечіткої множини дорівнювала 13) – за 6 хвилин, в

2 випадках (кількість смужок дорівнювала 16 та 18, потужність носія нечіткої множини дорівнювала 16 та 18 відповідно) – більше ніж 30 хвилин, в 1 випадку (кількість смужок дорівнювала 15, потужність носія нечіткої множини дорівнювала 14) – більше ніж 90 хвилин. Ця серія експериментів підтвердила працездатність та ефективність роботи алгоритму методу гілок та меж.

4.6. Висновки до розділу

В розділі на прикладі однієї задачі евклідової комбінаторної оптимізації як задачі на нечітких переставленнях та як задачі на нечітких розбиттях було показано застосування апарату нечітких чисел.

Запропоновано і здійснено розв'язування задачі методом гілок і меж. Дані верхні оцінки складності задачі на основі повного перебору, а також оцінки розв'язування методом гілок та меж.

Наведено ілюстративні приклади роботи методів.

Проведені числові експерименти, на основі яких зроблено висновок про практичну ефективність запропонованих методів.

Проведенні у цьому розділі дослідження збільшують адекватність, отриманих результатів моделювання, завдяки урахуванню нечіткості вхідної інформації, та розширюють апарат евклідової комбінаторної оптимізації в умова невизначеності вихідних даних, заданих нечіткими множинами. Досліджені тут методи та їх оцінки можуть бути використані для побудови і аналізу алгоритмів розв'язування задач в умовах невизначеності, заданої нечіткими числами на інших евклідових комбінаторних множинах.

Результати, що викладені в розділі, опубліковані в [96, 98–100, 104, 105, 112, 115].

РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В НЕЧІТКІЙ ПОСТАНОВЦІ НАБЛИЖЕНИМИ ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

В розділі розглядається розв'язування двох задач (задачі упакування прямокутників та задачі про ранець) як задач оптимізації на нечітких комбінаторних множинах наближеними методами. Викладені алгоритми знаходження наближеного розв'язку, оцінена їх складність, наведені результати обчислювальних експериментів.

5.1. Задача упакування прямокутників в нечіткій постановці

5.1.1. Алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі упакування на нечітких множинах

Задача упакування прямокутників в нечіткій постановці була сформульована в підрозділі 4.1.1.

Ця задача була розв'язана методом гілок і меж (див. підрозділ 4.2). Цей метод дає оптимальний розв'язок. Але на практиці, при великій кількості прямокутників, потрібен метод, який має нехай і не самий оптимальний, але достатньо «добрий» розв'язок за прийнятний час.

Поширимо на задачу упакування прямокутників з довжинами, заданими нечіткими числами (див. розділ 4), евристичний алгоритм [117, ст. 119], [103, 118].

Крок 1. Впорядкуємо нечіткі довжини прямокутників таким чином: $w_1 \prec w_2 \prec \ldots \prec w_p$.

Крок 2. Прямокутник з довжиною w_1 розміщуємо в першу смужку, з довжиною w_2 – в другу, ..., з довжиною w_m – в смужку m. Нехай $i = m+1$.

Крок 3. Серед m смужок визначаємо смужку з найменшою нечіткою довжиною і розміщуємо в ній прямокутник з довжиною w_i.

Крок 4. Збільшуємо і на одиницю, якщо $i \le p$ переходимо на крок 3, інакше – на крок 5.

Крок 5. Визначаємо смугу з найбільшою довжиною.

Зауваження. Таким чином, на кроці 5 всі прямокутники розміщені. Найбільше значення довжини і буде давати значення цільової функції.

Виникає питання, а чи буде запропонований алгоритм давати оптимальний розв'язок? Найбільш простим випадком здається задача, в якій потрібно упаковувати прямокутники в дві смужки, а самі прямокутники задаються «чіткими» довжинами. Але навіть в цьому випадку можна привести контраргумент. Нехай необхідно упакувати в 2 смужки прямокутники з довжинами 5, 4, 3, 3, 3. Згідно алгоритму отримаємо таке розташування: прямокутники з довжинами 5 і 3 в першу смужку полосу, з довжинами 4, 3, 3 – в другу. Довжина зайнятої смуги дорівнює 10. Оптимальним буде розміщення прямокутників з довжинами 5 і 4 в першу смужку, з довжинами 3, 3, 3 – в другу. Довжина зайнятої смуги дорівнює 9.

5.1.2. Оцінка складності алгоритму та числові експерименти

Оцінимо складність розв'язування задачі за евристичним алгоритмом.

Проведемо аналіз евристичного алгоритму.

В підрозділі 2.11 було оцінено складність роботи операцій суми нечітких чисел, знаходження максимального, мінімального з нечітких чисел. Під час оцінки складності роботи евристичного алгоритмі скористаємось цим.

На першому кроці впорядковуємо прямокутники, щоб: $w_1 \prec w_2 \prec \ldots \prec w_p$. Тобто потрібно порівняти p нечітких чисел або виконати $3pq-1$ операцій.

На третьому кроці алгоритму визначаємо смужку, довжина якої найменша, тобто потрібно порівняти m нечітких чисел або виконати $3mq-1$ операцій. Після розміщення в смужку з найменшою довжиною прямокутника з довжиною w_i додаємо довжину смужки і w_i, тобто додаємо два нечітких числа або виконуємо q^4+4q^2-2 операцій.

Оскільки крок 3 виконується $p-m$ раз (так як перші m прямокутників розмістили на кроці 2, а потрібно розмістити всі p прямокутників), то на кроці 3 виконуємо $(p-m)(3mq-1+q^4+4q^2-2)$ операцій.

На кроці 5 вже розміщені всі прямокутники і необхідно вибрати смужку з найбільшою довжиною, тобто порівняти m нечітких чисел або виконати $3mq-1$ операцій.

Таким чином, при використанні евристичного методу необхідно виконати таку кількість операцій: $3pq-1+(p-m)\times$ $\times(3mq-1+q^4+4q^2-2)+3mq-1$.

Таким чином, час роботи евристичного алгоритму залежить від кількості смужок як $T(m)=\Theta(m^2q)$, від кількості прямокутників як $T(p)=\Theta(3pq+3mpq-3p+pq^4+4pq^2)$, от максимальної потужності нечітких множин, які характеризують довжини прямокутників як $T(q)=\Theta(q^4(p-m))$.

Тобто, доведена наступна теорема.

Теорема 5.1. *Розглянутий евристичний метод для задачі упакування прямокутників має поліноміальну складність.*

Запропонований метод реалізований в середовищі Delphi 6.0. Довжини прямокутників генерувалися наступним чином: кожне число з множини носія генерувалось за допомогою датчика випадкових чисел від 1 до 20, кожне число з множини функції належності генерувалось як десяткове число виду 0,*x*, де *x* генерувалось за допомогою датчика випадкових чисел від 1 до 9. При цьому виключалась ситуація, коли в одному нечіткому числі елементи з множини носія будуть рівними (тобто не допускалось генерування числа, напр. виду $\{(5|0{,}3),(5|0{,}8)\}$). Проведена серія числових експериментів на ПК DualCore Intel Core 2 Duo E6550 з тактовою частотою 2333МГц. За результатами цих експериментів досліджено час роботи програми за евристичним методом (див. табл. 5.1, 5.2), потужність носія нечіткої множини в цих серіях дорівнювала трьом.

Таблиця 5.1

Час роботи програми за евристичним методом для першої серії експериментів

№	Кількість смужок, *m*	Кількість прямокутників, *p*	Час роботи
1	3	< 1 000	< 30 с
2	3	1 000	30 с
3	3	2 000	3 хв 30 с
4	3	3 000	12 хв 10 с
5	3	4 000	30 хв
6	3	5 000	54 хв
7	4	1 000	20 с
8	4	2 000	2 хв 10 с
9	4	3 000	6 хв 45 с
10	4	4 000	17 хв
11	4	5 000	31 хв
12	5	1 000	15 с
13	5	2 000	1 хв 20 с
14	5	3 000	4 хв 20 с
15	5	4 000	10 хв 10 с
16	5	5 000	21 хв
17	6	1 000	10 с
18	6	2 000	1 хв
19	6	3 000	3 хв 25 с
20	6	4 000	7 хв 40 с
21	6	5 000	14 хв 30 с
22	7	1 000	7 с
23	7	2 000	45 с
24	7	3 000	2 хв 25 с
25	7	4 000	5 хв 30 с
26	7	5 000	11 хв
27	8	1 000	5 с
28	8	2 000	35 с
29	8	3 000	1 хв 40 с
30	8	4 000	4 хв 10 с
31	8	5 000	9 хв
32	9	1 000	5 с
33	9	2 000	25 с
34	9	3 000	1 хв 30 с
35	9	4 000	3 хв 25 с
36	9	5 000	6 хв 20 с

Таблиця 5.

Час роботи програми за евристичним методом для другої серії експериментів

№	Кількість смужок, *m*	Кількість прямокутників, *p*	Час роботи, секунди
1	10	1 000	5
2	10	2 000	23
3	10	3 000	72
4	10	4 000	174
5	10	5 000	316
6	20	1 000	3
7	20	2 000	9
8	20	3 000	22
9	20	4 000	49
10	20	5 000	82
11	30	1 000	2
12	30	2 000	5
13	30	3 000	12
14	30	4 000	23
15	30	5 000	44
16	40	1 000	2
17	40	2 000	4
18	40	3 000	8
19	40	4 000	17
20	40	5 000	29
21	50	1 000	2
22	50	2 000	3
23	50	3 000	7
24	50	4 000	12
25	50	5 000	21
26	60	1 000	1
27	60	2 000	3
28	60	3 000	6
29	60	4 000	10
30	60	5 000	17
31	70	1 000	1
32	70	2 000	3
33	70	3 000	5
34	70	4 000	9
35	70	5 000	14

№	Кількість смужок, *m*	Кількість прямокутників, *p*	Час роботи, секунди
36	80	1 000	1
37	80	2 000	3
38	80	3 000	5
39	80	4 000	8
40	80	5 000	12
41	90	1 000	1
42	90	2 000	3
43	90	3 000	5
44	90	4 000	7
45	90	5 000	11

Як бачимо, час розв'язування в задачах, наведених в таблицях 5.1, 5.2, є малим, тобто експерименти показують практичну ефективність методу з точки зору часових затрат.

Для того, щоби перевірити, наскільки розв'язування задачі, отримане цим евристичним методом, близьке до оптимального, можна запропонувати наступні способи, описані нижче.

1 спосіб. Коли отриманий розв'язок, знаходимо середню довжину зайнятої частини смужок $\sum$: $\sum = \frac{\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i}{m}$, де m – кількість смужок, ε_i – довжина зайнятої частини смужки i, $i \in J_m$. Визначаємо Δ: $\Delta = \varepsilon_{max} - \Sigma$, де $\varepsilon_{max} = \max\limits_{1 \le i \le m} \{\varepsilon_i\}$. Дефазифікуємо Δ, отримане значення позначимо через δ. Якщо метод працює добре, то при достатньо великий кількості прямокутників δ повинно бути близьким до нуля.

2 спосіб. Дефазифікуємо довжину кожної зайнятої смужки. Позначимо ці дефазифіковані величини через σ_i. Знаходимо їх середнє σ_{cp}: $\sigma_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i}{m}$, де m – кількість смужок. Знаходимо величину ψ: $\psi = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{cp}}{\sigma_{cp}}$, де $\sigma_{max} = \max\limits_{1 \le i \le m} \{\sigma_i\}$. При великих кількостях прямокутників, в яких елементи множини носія випадкові рівномірно розподілені числа, слід очікувати, що, якщо розв'язок близький до оптимального, то величина ψ повинна бути близькою до нуля.

Було проведено 3 серії випробувань. Потужність носія нечіткої множини в випробуваннях дорівнювала трьом. Елементи множини носія генерувалися за допомогою датчика випадкових чисел в інтервалі від 1 до 20.

В кожному випробуванні визначалась ефективність розв'язування обома методами. Результати експериментів представлені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Результати перевірки ефективності евристичного методу

№ серії	Кількість смужок, m	Кількість прямокутників, p	Кількість випробувань в серії	1 спосіб: Найменше δ в серії, %	1 спосіб: Найбільше δ в серії, %	1 спосіб: Середнє по серії δ, %	2 спосіб: Найменше ψ в серії, %	2 спосіб: Найбільше ψ в серії, %	2 спосіб: Середнє по серії ψ, %
1	10	100	100	2,85	14,96	9,84	2,94	17,60	10,38
3	5	100	100	1,00	9,85	3,82	1,02	10,96	4,02
2	10	1000	10	0,77	1,71	1,28	0,49	1,42	0,93

Таким чином, результати числових експериментів, наведені в табл. 5.3, свідчать о достатній практичній ефективності запропонованого евристичного методу з точки зору точності розв'язку за цільовою функції.

5.2. Задача про ранець в нечіткій постановці

5.2.1. Постановка задачі

Є n пакетів акцій з вартістю $a_1, \dots, a_n$ і прибутком $c_1, \dots, c_n$. Обсяг вкладень в акції – b грошових одиниць. Треба визначити, які пакети акцій вибрати, щоб вистачало грошей та прибуток максимізувався.

Ця задача відома як задача про ранець в наступній інтерпретації.

Ранець ємністю b необхідно так упакувати неподільними предметами n видів з вартістю $c_1, \ldots, c_n$ і ємністю $a_1, \ldots, a_n$, щоб сумарна вартість упакованих предметів була максимальною.

Математична модель задачі має вигляд [106, 119–122]:

$$c^* = \max_{x \in R^n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{5.1}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \tag{5.2}$$

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ предмет } i \text{ не включено в ранець,} \\ 1, \text{ інакше.} \end{cases} \tag{5.3}$$

В сформульованій задачі про акції a_i, c_i, b містять певну невизначеність, яку можна врахувати, вважаючи числа b, $a_1, \ldots, a_n$, $c_1, \ldots, c_n$ нечіткими.

5.2.2. Алгоритм знаходження наближеного розв'язку

Для поставленої задачі про ранець в нечіткій постановці можна знаходити наближені розв'язки за допомогою наступного евристичного методу.

Крок 1. Знаходимо $d_i = \dfrac{c_i}{a_i}$ для усіх $i = \overline{1,n}$.

Крок 2. Впорядковуємо нечіткі числа d_i таким чином: $d_{\alpha_1} \prec d_{\alpha_2} \prec \cdots \prec d_{\alpha_n}$, $i = \overline{1,n}$.

Крок 3. Присвоюємо $i := 1$, $S := \{(0|1)\}$ (вважаємо S – нечітким нулем).

Крок 4. Перевіряємо чи виконується умова $S + a_{\alpha_i} \preccurlyeq b$. Якщо так, то переходимо до кроку 5. Якщо ні, то переходимо до кроку 6.

Крок 5. $S := S + a_{\alpha_i}$, $x_{\alpha_i} = 1$. Переходимо до кроку 7.

Крок 6. $x_{\alpha_i} = 0$. Переходимо до кроку 7.

Крок 7. $i \le n$? Якщо так, то $i := i + 1$ і переходимо до кроку 4. Якщо ні, то переходимо до кроку 8.

Крок 8. Знаходимо значення цільової функції c^* : $c^* = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

5.2.3. Оцінка складності алгоритму та числові експерименти

Під час знаходження оцінки складності алгоритму скористаємось оцінками операцій ділення, знаходження максимального, мінімального нечіткого числа, додання, знайденими в підрозділі 2.9.

Позначимо через q – максимальну потужність множин носії нечітких чисел b, $a_1, \ldots, a_n$, $c_1, \ldots, c_n$.

На кроці 1 знаходимо d_i $i \in J_n$, тобто виконуємо n операцій ділення двох нечітких чисел. Якщо ділимо числа за першим способом, то потрібно виконати $n(4q-1)$ операцій. Якщо за другим способом, то потрібно виконати $n\left(q^4 + 4q^2 - 2\right)$ операцій.

На кроці 2 впорядковуємо d_i $i \in J_n$, тобто знаходимо максимум, мінімум з n нечітких чисел або виконуємо $3nq - 1$ операцій.

На кроці 4–7 в найгіршому випадку необхідно використати операцію додавання двох нечітких чисел $n-1$ раз і операцію знаходження максимального, мінімального з двох нечітких чисел n раз. Тобто виконати $(n-1)\left(q^4 + 4q^2 - 2\right) + n(6q-1)$ операцій.

На кроці 8 додаємо в найгіршому випадку n чисел c_i, $i \in J_n$, тобто виконуємо $q^{2n} + 4q^n - 2$ операцій.

Таким чином, при використанні евристичного алгоритму необхідно виконати не більше, ніж $n(4q-1) + 3nq - 1 + (n-1) \times \left(q^4 + 4q^2 - 2\right) + n(6q-1) + q^{2n} + 4q^n - 2 = q^{2n} + 4q^n + nq^4 - q^4 + 4nq^2 - 4q^2 + 13nq - 4n - 1$ операцій, якщо ділимо нечіткі числа за першим способом, і не більше, ніж $n\left(q^4+4q^2-2\right)+3nq-1+(n-1)\times$ $\times\left(q^4+4q^2-2\right)+n(6q-1)+q^{2n}+4q^n-2=q^{2n}+4q^n+2nq^4-q^4+$ $+8nq^2-4q^2+9nq-4n-2$ операцій, якщо – за другим способом.

Тобто, доведена така теорема.

Теорема 5.2. Розглянутий евристичний алгоритм для задачі про ранець має поліноміальну складність.

Запропонований евристичний метод був реалізований в середовищі Delphi 6.0. Окремо був реалізований евристичний метод, із застосуванням першого способу ділення нечітких чисел, і евристичний метод, з застосуванням другого способу ділення нечітких чисел. Для порівняння отриманих результатів був також запрограмований метод повного перебору для поставленої задачі.

Нечіткі числа $b,\ a_1,\dots,a_n,\ c_1,\dots,c_n$ – генерувалися як трикутні, потужність носія генерованих нечітких чисел дорівнювала 3. Для нечіткого числа b елементи множини носія генерувалися за допомогою генератора випадкових рівномірно розподілених чисел від 30 до 50, для $a_1,\dots,a_n,\ c_1,\dots,c_n$ – в межах від 1 до 20. Проведена серія числових експериментів на ПК DualCore Intel Core 2 Duo E6550 з тактовою частотою 2333 МГц. В кожній серії було по 20 випробувань. За результатами цих експериментів досліджено час роботи програми за евристичним методом, що використовує різні способи ділення нечітких чисел, і час роботи методу повного перебору. Для першого – час роботи склав менше 1 секунди в усіх випробуваннях. Середній по серії час роботи програми за методом повного перебору представлено в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Час роботи програми за методом повного перебору

Кількість предметів, *n*	**Час роботи в форматі год: хв: с**
20	0:01:30
21	0:03:15
22	0:06:54
23	0:14:52
24	0:30:58
25	1:07:32

Як бачимо, евристичний метод дозволяє розв'язувати задачі за час до 1 секунди, в той час як метод повного перебору потребує значно більше часу. Тобто експерименти показують практичну ефективність евристичного методу з точки зору часових затрат.

Для того, щоби перевірити наскільки розв'язок задачі, отриманий евристичним методом, є близьким до оптимального, можна запропонувати наступні способи, описані нижче.

1 спосіб. Коли знайшли розв'язок задачі методом повного перебору – $F_{точн}$; евристичним методом із застосуванням першого способу ділення нечітких чисел – $F_{евр.1}$; евристичним методом із застосуванням другого способу ділення нечітких чисел – $F_{евр.2}$, то дефазифікуємо отримані значення. Позначимо дефазифіковані значення цільових функцій відповідно $f_{точн}$, $f_{евр.1}$, $f_{евр.2}$. Тоді оцінити точність розв'язування евристичного методу можна за формулами:

$$\delta_1 = \frac{f_{точн} - f_{евр.1}}{f_{евр.1}}, \quad \delta_2 = \frac{f_{точн} - f_{евр.2}}{f_{евр.2}}.$$

Якщо метод працює добре, то δ_1 і δ_2 повинні бути достатньо малими величинами.

2 спосіб. Знаходимо різницю $F_{точн}$ і $F_{евр}$ за означенням 2.10 (див. підрозділ 2.7) і ділимо отриману різницю на $F_{точн}$ за означенням 2.11 (див. підрозділ 2.8):

$$\varepsilon = \frac{F_{точн} - F_{евр}}{F_{точн}}.$$

Можливі наступні комбінації:

$$\varepsilon_{11} = \frac{F_{точн} - F_{евр.1}}{F_{точн}}$$ – ділення за першим способом;

$$\varepsilon_{12} = \frac{F_{точн} - F_{евр.1}}{F_{точн}}$$ – ділення за другим способом;

$$\varepsilon_{21} = \frac{F_{точн} - F_{евр.2}}{F_{точн}}$$ – ділення за першим способом;

$$\varepsilon_{22} = \frac{F_{точн} - F_{евр.2}}{F_{точн}}$$ – ділення за другим способом.

Якщо метод працює добре, то ε_{ij}, $i, j \in J_2$ повинні бути достатньо малими величинами.

Порівнюючи значення ε_{11}, ε_{12}, ε_{21}, ε_{22}, можна зробити висновок, зокрема і про те, наскільки вдало були введені операція ділення нечітких чисел за першим і другим способами.

Були проведені 23 серії випробувань, по 20 випробувань в серії. Результати наведені в табл. 5.5. Оскільки розв'язки, отримані евристичними методами з використанням першого і другого методів ділення нечітких чисел, мають незначну відмінність, то ε_{21}, ε_{22} в табл. 5.5 не наводимо.

Таблиця 5.5.

Результати перевірки ефективності евристичного методу

Кількість предметів, n	Середнє по серії δ_1, %	Середнє по серії ε_{11}, %	Середнє по серії ε_{12}, %	Середнє по серії δ_2, %	Відсоток випробувань, в яких $\delta_1 = 0$	Відсоток випробувань, в яких $\delta_2 = 0$
3	1,094	1,088	1,208	1,094	90	90
4	1,000	0,985	1,042	1,000	90	90
5	2,316	2,275	2,402	2,316	75	75
6	1,376	1,376	1,458	2,092	80	75
7	3,312	3,403	3,566	3,312	50	50
8	2,835	2,876	2,986	2,835	60	60
9	1,932	1,899	1,957	1,932	60	60
10	1,047	1,017	1,046	1,103	60	65
11	1,230	1,205	1,245	1,503	80	75
12	2,797	2,823	2,885	2,797	50	50
13	1,651	1,647	1,705	1,651	50	50
14	1,955	1,986	2,033	2,122	55	50
15	0,927	0,868	0,891	0,822	65	65
16	1,355	1,328	1,372	1,592	75	70
17	1,569	1,530	1,567	1,569	45	45

Продовж. табл. 5.5

Кількість предметів, n	Середнє по серії δ_1, %	Середнє по серії ε_{11}, %	Середнє по серії ε_{12}, %	Середнє по серії δ_2, %	Відсоток випробувань, в яких $\delta_1 = 0$	Відсоток випробувань, в яких $\delta_2 = 0$
18	2,030	2,081	2,136	2,176	30	30
19	1,606	1,577	1,612	1,829	45	30
20	2,458	2,478	2,555	2,458	35	35
21	2,382	2,380	2,428	2,960	45	35
22	1,314	1,312	1,346	1,251	55	60
23	0,978	0,940	0,961	1,159	65	65
24	0,824	0,837	0,860	0,680	65	65
25	0,773	0,785	0,786	0,982	55	50
Середнє значення	1,685	1,682	1,741	1,793	60	58,261
Макс. знач. по всім випроб.	$max\,\delta_1 =$ $= 19{,}391$	$max\,\varepsilon_{11} =$ $= 19{,}447$	$max\,\varepsilon_{12} =$ $= 19{,}665$	$max\,\delta_{21} =$ $= 19{,}391$		
Мінімальне значення по всім випроб.	$min\,\delta_1 =$ $= 0$	$min\,\varepsilon_{11} =$ $= 0$	$min\,\varepsilon_{12} =$ $= 0$	$min\,\delta_2 =$ $= 0$		

Таким чином, результати числових експериментів, наведені в табл. 5.5, говорять о достатній практичній ефективності запропонованого евристичного методу з точки зору точності розв'язування за цільовою функцією.

5.3. Висновки до розділу

В розділі запропоновано один евристичний алгоритм для розв'язування задачі упакування прямокутників, довжини яких задаються нечіткими множинами. Отримана поліноміальна оцінка складності алгоритму. Проведені числові експерименти, які показали, що алгоритм є ефективним для знаходження наближеного розв'язку практичних задач як з точки зору часових затрат, так і з точки зору точності, що отримуємо.

Сформульована задача про ранець в умовах невизначеності, яка задається нечіткими множинами. Побудована математична модель цієї задачі. Запропонований евристичний метод для знаходження наближеного розв'язку. Отримана поліноміальна оцінка алгоритму. Проведені числові експерименти, які підтвердили, ефективність запропонованого алгоритму як з точки зору часових затрат, так і з точки зору близькості значення цільової функції, що отримуємо, до оптимального.

Наведені в цьому розділі евристичні алгоритми для задачі упакування та для задачі про ранець, дозволяють, знаходити розв'язки цих задач досить швидко (за прийнятний для дослідника час) і при цьому отримувати добрі розв'язки (близькі до оптимального). А врахування нечіткої інформації вхідних даних, дозволяє отримувати більш адекватні до реального світу розв'язки.

Результати, що викладені в розділі, опубліковані в [103, 106, 119–122].

РОЗДІЛ 6. МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Не зважаючи на потреби практики, задачі комбінаторної оптимізації на нечітких множинах ще не знайшли достатнього дослідження. Для таких задач практично немає методів, що враховують їх специфіку. Тому актуальним є розгляд таких задач та методів їх дослідження. В роботі обґрунтовується загальний підхід в рамках методу гілок та меж (МГМ) до розв'язування задачі мінімізації в нечіткій постановці, який ілюструється комбінаторною транспортною задачею на переставленнях з нечіткими даними.

6.1. Постановка задачі

Нехай є функція $F(x)$, задана на множині X ($x \in X$) – нечітких чисел; $F(x) \in X$, тобто значення, яке вона приймає, також є нечітким числом. Нехай $D \subset X$ – множина допустимих нечітких чисел.

Використовуючи операції [96–124] (в т. ч. знаходження мінімуму і максимуму), задача оптимізації на множині нечітких чисел може бути сформульована так: знайти

$$\min_{x \in D} F(x). \tag{6.1}$$

6.2. Метод гілок та меж при оптимізації на нечітких множинах

Позначимо S – деякий список (масив), n_{rec} – змінна, що має сенс номеру переглянутого методом допустимого розв'язку. Алгоритм МГМ для (1) викладено в наступних кроках.

0. $S = \varnothing$; $n_{rec} = 0$. Задання допустимої області D ($D \neq \varnothing$), та цільової функції F на D.

1. Множина D розбивається на підмножини $D_1, \ldots, D_n$ з властивостями: $D_i \neq \varnothing$; $D_i \bigcap D_j = \varnothing \quad \forall i, j \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $D = D_1 \bigcup \ldots \bigcup D_n$. Множини $D_1, \ldots, D_n$ вважаємо нерозгалуженими і невідсіченими. Назвемо таку множину «брунькою», а властивості таких множин – «властивості бруньок».

2. Кожній множині, що не належить S і що є брунькою, припишемо оцінку $\nu_i\left(D_i\right)=\nu_i\in X$ – нечітке число з властивістю $\nu_i \prec F\left(x\right)\quad \forall x\in D_i$, де знак $\prec$ – знак лінійного порядку на множині нечітких чисел X [96–124]. Дозапишемо їх в список S бруньок з оцінками. Позначимо кількість бруньок $|S|$ через n.

2. Перевірка: $S=\varnothing$? Якщо «так» – на крок 16. Якщо «ні» – на крок 3.

3. Вибираємо довільну бруньку D_i.

4. Перевіряємо: чи кількість елементів $|D_i|$ в множині D_i дорівнює одиниці: $|D_i|=1$? Якщо «так» – на крок 6. Якщо «ні» – на крок 5.

5. Маємо $|D_i|\neq 1$ (точніше, це означає $|D_i|>1$), розбиваємо (розгалужуємо) D_i як D, перейшовши на крок 1.

6. Одноелементну бруньку називаємо «листом», тобто $D_i=\left\{x_{n_{rec}}\right\}$, $x_{n_{rec}}\in D$. Лист D_i виключаємо з S. Обчислимо $F_{n_{rec}}=F\left(x_{n_{rec}}\right)$, використовуючи операції [96–124] для нечітких чисел.

7. Перевіряємо: $n_{rec}>0$? Якщо «ні» (тобто $n_{rec}=0$), то перехід на крок 8. Інакше (тобто $n_{rec}>0$) – на крок 14.

8. Привласнюємо точці, що дає рекордне значення цільової функції, точку x_0; $n_{rec}=1$.

9. Задаємо $i=1$ (організовуємо початок циклу перебору бруньок).

10. Перевірка: $\nu_i \prec F_0$? Якщо «так» – на крок 12, якщо «ні» – на крок 11.

11. Бруньку D_i виключаємо зі списку S. (Зауважимо, що при цьому n не змінюється, воно змінюється лише на кроці 1). Це означає відсікання бруньки D_i.

12. Збільшуємо на одиницю i. Тобто $i:=i+1$.

13. Перевірка: $i>n$? Якщо «так» – перехід на крок 2. Якщо «ні» – перехід на крок 10.

14. Перевірка: $F_{n_{rec}} \succ F_0$? Якщо «так» – перехід на крок 2. Якщо «ні» – перехід на крок 15.

15. Привласнюємо рекорду цільової функції F_0 значення $F_{n_{rec}}$, тобто $F_0 := F_{n_{rec}}$, далі $x_{rec} := x_{n_{rec}}$; $n_{rec} = n_{rec} + 1$. Перехід на крок 9.

16. Вивід результату: мінімальне значення F_0 цільової функції та точка x_{rec}, що його дає. Зупинка.

Блок-схема алгоритму наведена на рис. 6.1–6.2.

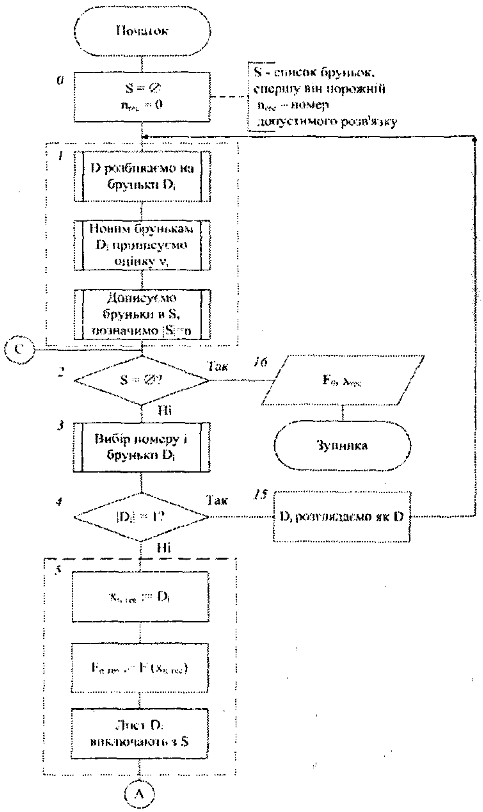


Рис. 6.1. Схема методу гілок та меж для мінімізації на множині нечітких чисел

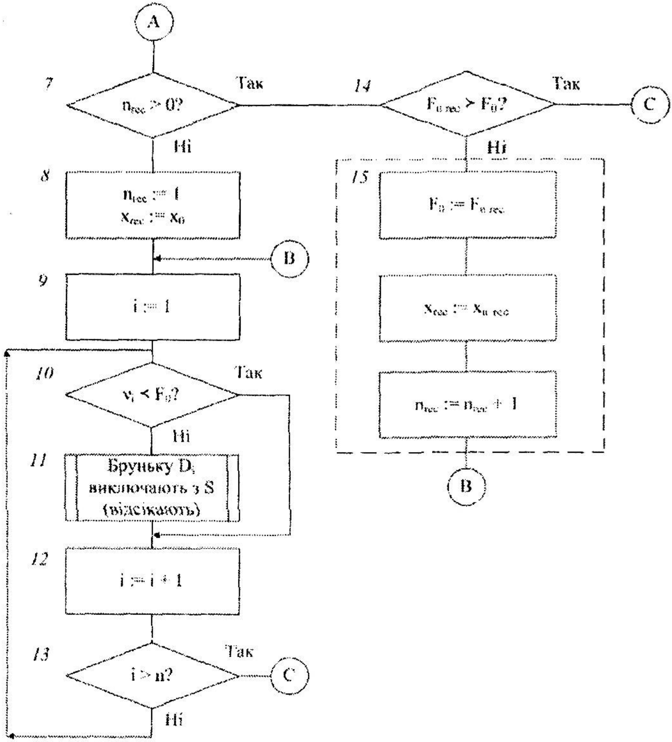


Рис. 6.2. Продовження схеми методу гілок
та меж для мінімізації на множині нечітких чисел

Зауваження. Цей алгоритм є алгоритмом МГМ взагалі (тобто для чіткої або нечіткої постановки задачі (1)), якщо визначено лінійний порядок $\prec$ в множині значень цільової функції (в зв'язку з цим в дійсних числах в алгоритмі такі конкретизації: на кроці 14 це $\geq$; $<$ на кроці 10).

Суттєво впливає на ефективність МГМ спосіб галуження допустимої множини (крок 1 (розбиття D на бруньки D_i); крок 3 – вибір D_i) та оцінювання D_i (визначення оцінки на кроці 1). Немає, в силу загальності задачі, рецептів, які б діяли ефективно в цих випадках. Способи галуження, відсікання, оцінювання визначаються специфікою класу задач, що розглядається.

Відсікання відбувається, як видно з алгоритму, за аналогом класичної для МГМ умови: якщо $\nu_i(D_i) \prec F_0$ не виконується, то D_i відсікається.

6.3. Розв'язування методом гілок та меж комбінаторної транспортної задачі на переставленнях в нечіткій постановці

Як відомо [123–124], комбінаторна транспортна задача на переставленнях (КТЗП) в нечіткій постановці має вигляд: знайти мінімум

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{6.2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \prec a_i \quad \forall i \in J_m, \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \succ b_j \quad \forall j \in J_n, \tag{6.4}$$

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{mn}) \in E_k(G), \tag{6.5}$$

де c_{ij}, a_i, b_j, x_{ij} – нечіткі числа [96–124], їх мінімум, сума, добуток, лінійний порядок $\prec$ означено в [96–124], *m, n, k* – натуральні сталі, а $E_k(G)$ – множина нечітких переставлень [96–124], $m \cdot n = k$, $G = \{g_1, ..., g_k\}$ – мультимножина можливих обсягів перевезень, $J_m = \{1, 2, ..., m\}$ – як і раніше множина перших m натуральних чисел.

Зауважимо, що за економічним змістом задачі елементи носіїв чисел c_{ij}, a_i, b_j, g_t є додатними.

Розглянемо спосіб розбиття D на бруньки D_i. Впорядкуємо тарифи c_{ij}, $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_m$:

$$c_{i_1\tau_1} \succ c_{i_2\tau_2} \succ \ldots \succ c_{i_k\tau_k}; \tag{6.6}$$

перепозначивши їх так

$$c_1^* \succ c_2^* \succ \ldots \succ c_k^*. \tag{6.7}$$

Тут i_l – це номер рядка, а τ_l – номер стовпця, в яких стоїть тариф $c_{i_l j_l} = c_l^*$, який в упорядкуванні (6.7) стоїть на l-му місці.

Нехай обсяги перевезень g_j, що складають мультимножину $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ пронумеровані згідно порядку:

$$g_1 \prec g_2 \prec \ldots \prec g_k. \tag{6.8}$$

Перепозначимо це для зручності подальшого викладу так: $g_1^0 \prec g_2^0 \prec \ldots \prec g_k^0$, $G^0 = G$.

Бруньки утворюємо в такому порядку. Множина D розбивається на підмножини згідно порядку:

D_1 – це підмножина D, де $x_{i_1 j_1} = g_k^0$;

$D_2 :\ x_{i_1 j_1} = g_{k-1}^0$;

...

$D_i :\ x_{i_1 j_1} = g_{k-i+1}^0$;

...

$D_k :\ x_{i_1 j_1} = g_1^0$.

Вибір номеру i бруньок першого рівня $D_1, \ldots, D_k$ на кроці 3 МГМ відбувається почергово від 1-ої до k-ої.

Якщо вибрана брунька першого рівня $D_i = D_{\tau_1}$, то на кроці 5 вона розглядається як D. Це означає наступне. Утворюється різниця мультимножини G та $\{g_{k-i+1}\}$ і використовується в якості $G^1 = G^0 - \{g_{k-\tau_1+1}^0\}$, де $G^1 = \{g_1^1, \ldots, g_{k-1}^1\}$ і елементи пронумеровані так: $g_1^1 \prec \ldots \prec g_{k-1}^1$. Бруньки другого рівня утворюються в такому порядку:

$(D_{\tau_1})_1 = D_{\tau_1 1}$ – це підмножина множини D_{τ_1}, в якій $x_{i_2 j_2} = g_{k-1}^1$.

$(D_{\tau_1})_2 = D_{\tau_1 2}$, це підмножина множини D_{τ_1}, в якій $x_{i_2 j_2} = g_{k-2}^1$.

...

$D_{\tau_1\tau_2}$: це підмножина множини D_{τ_1}, в якій $x_{i_2 j_2} = g^1_{k-\tau_2}$.

...

$D_{\tau_1(k-1)}$: $x_{i_2 j_2} = g^1_1$.

Вибір номеру τ_2 бруньок другого рівня $D_{\tau_1\tau_2}$ на кроці 3 МГМ відбувається почергово від $\tau_2 = 1$ до $\tau_2 = k-1$.

Якщо на кроці 1 вибрана брунька r-го рівня $D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}$, яка на кроці 5 розглядається як D, то це означає таке.

Утворюється різниця G^r мультимножин G^{r-1} та $\left\{g^{r-1}_{k-\tau+1}\right\}$, тобто $G^r = G^{r-1} - \left\{g^{r-1}_{k-\tau+1}\right\}$, де $G^r = \left\{g^r_1, \ldots, g^r_{k-r}\right\}$ і елементи G^r упорядковані так:

$$g^r_1 \prec \ldots \prec g^r_{k-r}.$$

Бруньки $(r+1)$-го рівня утворюються в такому порядку:

$\left(D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}\right)_1 = D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r 1}$ – це підмножина $D_{\tau_1\ldots\tau_r}$, коли $x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r}$;

$\left(D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}\right)_2 = D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r 2}$: $x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r-1}$;

...

$D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r\tau_{r+1}}$: $x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_{k-r-\tau_{r+1}+1}$;

...

$D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r(k-r)}$: $x_{i_{\tau_r} j_{\tau_r}} = g^r_1$.

Зрозуміло, що рівнів бруньок не більше ніж k.

Зрозуміло, що деякі бруньки будуть порожніми, оскільки для них може не виконатися одне з обмежень в (6.3).

Зауваження. Замість (6.6)–(6.8) можна використовувати будь-який лінійний порядок на множині тарифів обсягів перевезень.

Зауваження. Легко бачити, що для нечітких чисел з дискретним носієм [96–122] і сумою [96–122] порожню бруньку можна відсікати. Тобто, якщо $(a+b) \prec (a+b)+c$, то, якщо $d = \left\{(d_1 \mid \mu_1), \ldots, (d_t \mid \mu_t)\right\}$ $\forall i \in J_t$ $d_i \geq 0$, то

$$(a+b) \prec (a+b)+c+d. \qquad (6.9)$$

Іншими словами, якщо умова (6.3) на деякому рівні для бруньки не виконалась, то вона не виконається для бруньок, що утворені розбиттям цієї бруньки (на подальших рівнях).

6.4. Оцінювання допустимих підмножин в методі гілок та меж

Опишемо, як обчислюються оцінка підмножини $D_{\tau_1\tau_2...\tau_r}$ – бруньки r-го рівня.

Коли данні – дійсні числа, властивістю оцінки $\xi(D)$ підмножини D, яка забезпечує роботу МГМ, є така: якщо $D_i \subset D$, то $\xi(D_i) \geq \xi(D)$.

З цієї властивості випливає таке твердження.

Теорема 6.1. Якщо $D_{i_1} \supset D_{i_2} \supset ... \supset D_{i_n} = \{x\}$, тобто $|D_{i_n}| = 1$, а функціонал ξ, що задано на множинах $D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}$ такий, що $\xi\left(D_{i_n}\right) = \xi(x) = F(x)$, $\xi\left(D_{i_j}\right) \prec \xi\left(D_{i_{j+1}}\right)$, $\forall j \in J_{n-1}$, то значення функціонала $\xi(D)$ може бути оцінкою допустимої підмножини в МГМ.

Доведення. З того, що $\xi\left(D_{i_j}\right) \prec \xi\left(D_{i_{j+1}}\right)$ $\forall j \in J_{n-1}$ та $\xi\left(D_{i_n}\right) = \xi(x) = F(x)$ випливає, $\xi\left(D_{i_j}\right) \prec F(x)$ $\forall x \in D_{i_j}$ $\forall j \in J_n$. Що треба було довести.

Теорема 6.2. Якщо $c_\tau = \left\{\left(c_1^\tau \mid \mu_1^{c_\tau}\right), ..., \left(c_k^\tau \mid \mu_k^{c_\tau}\right)\right\}$, $g_t = \left\{\left(g_1^t \mid \mu_1^{g_t}\right), ..., \left(g_l^t \mid \mu_l^{g_t}\right)\right\}$, де $c_i^\tau \geq 0$ $\forall i \in J_n$; $g_j^t \geq 0$ $\forall j \in J_l$, то оцінкою $\xi(D)$ множини D в МГМ може слугувати число $H(C)$ – характеристичний порівнювач нечіткого числа C, де

$$C = \sum_{x \in G^B} c_j x_j^B \tag{6.10}$$

– значення частини цільової функції, тобто тих її доданків, у яких визначені змінні.

Доведення. Доведення проведемо для нечітких чисел з дискретним носієм. Нехай a, b – нечіткі числа з дискретним носієм. Якщо $a \prec b$, то $H(a) \leq H(b)$ (див. твердження 2.7 розділу 2).

Якщо $a \prec b$, то $a \prec b + c$, якщо $c = \{(c_1 \mid \mu_1), ..., (c_k \mid \mu_k)\}$ та $c_i \geq 0 \ \ \forall i \in J_k$ (див. теорему 2.8 розділу 2).

Доведемо, що за оцінку можна взяти характеристичний порівнювач $H(C)$.

Підмножина наступного рівня МГМ дає ще один доданок у визначену частину цільової функції – нехай це $\Delta C = c_\tau g_t$ (зауважимо, що $c_\tau = \{(c_1^\tau \mid \mu_1^{c_\tau}), ..., (c_k^\tau \mid \mu_k^{c_\tau})\}$, $g_t = \{(g_1^t \mid \mu_1^{g_t}), ..., (g_l^t \mid \mu_l^{g_t})\}$, де $c_i^\tau \geq 0 \ \ \forall i \in J_n$; $g_j^t \geq 0 \ \ \forall j \in J_l$).

Доведемо, що

$$H(C) \leq H(C + \Delta C).$$

Очевидно, $C \prec C + \Delta C$. Доведена така властивість характеристичного порівнювача (див. твердження 2.7 розділу 2): якщо $a \prec b$, то $H(A) \leq H(B)$. Тобто $H(C)$, де C – це (6.10) – «часткове» значення цільової функції, яке визначає підмножину D, має властивість функціонала $\xi(D) = H(C)$ і згідно теореми 6.1 є оцінкою підмножини. Що і треба було довести.

Зауваження. Оцінювання допустимих множин, розглянуте при розв'язуванні КТЗП, як видно, не використовує конкретної постановки цієї задачі і, отже, застосовне і до загальної задачі (6.1), де D – множина нечітких переставлень.

Справедливе таке твердження.

Теорема 6.3. Викладений МГМ, застосований до задачі (6.1), дає її рішення, яким виступає F_0 – значення цільової функції та x_{rec} – точка, в якому воно досягається.

Доведення. Згідно кроку 11 виключають з розгляду тільки бруньки D_i, у яких не виконується умова $\nu_i(D_i) \prec F_0$.

Якщо $F_{n_{rec}} \prec F_0$, то на кроці 15 F_0 оновлюється і стає рівним $F_{n_{rec}}$, що досягається в точці x_{rec}.

Отже, в силу властивості оцінки: $\nu(D) \prec F(x) \quad \forall x \in D$, ланцюжка:

$$F_1 \succ \ldots \succ F_{n_{rec}}$$

та правила відсікання $\nu_i(D_i) \prec F_0$ маємо: $F_{n_{rec}} \prec F(x) \quad \forall x \in D$. Що і треба було довести.

6.5. Висновок до розділу

Запропоновано та обґрунтовано алгоритм МГМ для задачі мінімізації в нечіткій постановці. Проілюстровано застосування МГМ до КТЗП з нечіткими даними.

Оскільки викладений алгоритм в частковому випадку діє і на «чітких» множинах, то доцільним є матеріал, що стосується МГМ для деяких комбінаторних задач в чіткій постановці, який розглянуто в наступних розділах.

РОЗДІЛ 7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ З УМОВОЮ СТАЛОСТІ СУМИ ЕЛЕМЕНТІВ РОЗМІЩЕНЬ

Розвиваючись, комбінаторна оптимізація створює апарат для моделювання та розв'язування все більш широкого класу задач. Часто нові моделі вимагають розвитку методів і алгоритмів, які враховують особливості цих моделей. При розв'язуванні задач комбінаторної оптимізації ігрового типу [125–135] на розміщеннях ітераційним методом виникає задача мінімізації лінійної функції на множині розміщень, коли сума елементів розміщення є сталою величиною. В задачах з [125–135] – ця сума є одиницею, змістовна інтерпретація якої – сума ймовірностей в повній групі подій.

Задачі на розміщеннях з лінійними цільовими функціями розглядалися в [58], але специфіка обмеження спонукає шукати методи, що є більш ефективними за рахунок врахування наявних властивостей задачі.

7.1. Постановка задачі

Розглянемо таку лінійну умовну повністю комбінаторну задачу евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях [17]:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j \to min \tag{7.1}$$

$$y = (y_1, ..., y_k) \in E_{\eta\nu}^{k}\left(G^{y}\right); \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = C, \tag{7.3}$$

де $c_j \in R^1$, $\forall j \in \{1, ..., k\} = J_k$, $C = const \in R^1$, $G^y = \{g_1^y, ..., g_\eta^y\}$ – мультимножина [17], $g_i^y \in R^1 \in J_\eta$, множина $E_{\eta\nu}^{k}(G)$ – загальна множина k-розміщень [17] з η елементів мультимножини G^y, серед яких ν різних.

Не порушуючи загальності міркувань, можна розглянути задачу вигляду (7.1)–(7.3), яка одержана з задачі (7.1)–(7.3) шляхом ділення всіх змінних y_j, $j \in J_k$, та всіх елементів g_t^y, $t \in J_\eta$, на сталу C. Задача (7.1)–(7.3) набуде вигляду

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to min \tag{7.4}$$

$$x = (x_1, ..., x_k) \in E_{\eta\nu}^k(G); \tag{7.5}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1, \tag{7.6}$$

де $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ – відома мультимножина, $g_j \in R^1$. Зв'язок між еквівалентними задачами (7.1)–(7.3) та (7.4)–(7.6) встановлюють співвідношення $x_j C = y_j \;\; \forall j \in J_k; \;\; g_t C = g_t^y \;\; \forall t \in J_\eta$.

Далі розглянемо задачу (7.4)–(7.6). Для її розв'язування пропонується застосувати методологію методу гілок та меж (МГМ).

7.2. Оптимізація лінійної функції на розміщеннях за умов одиничності суми їх елементів

В методі гілок та меж для його реалізації для задачі чи певного класу задач необхідно визначити три елементи: 1) спосіб оцінювання допустимих підмножин; 2) спосіб галуження множини допустимих розв'язків на підмножини; 3) правила відсікання безперспективних (або порожніх) підмножин допустимих розв'язків.

Розглянемо **спосіб галуження** множини допустимих розв'язків на підмножини. Для галуження пропонується зробити таке. Упорядкуємо коефіцієнти цільової функції згідно таких нерівностей:

$$c_{\alpha_1} \ge c_{\alpha_2} \ge ... \ge c_{\alpha_l} \ge 0 > c_{\alpha_{l+1}} \ge ... \ge c_{\alpha_k}, \tag{7.7}$$

а елементи мультимножини G вважаємо, без обмежень загальності міркувань, пронумерованими так, що виконуються співвідношення:

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_k \le g_{k+1} \le \ldots \le g_\eta . \quad (7.8)$$

Галуження пропонується робити «в глиб», визначаючи одну за одною змінні в векторі $x \in E_{\eta\nu}^k$ в порядку номерів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_l$, а потім $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{l+2}, \alpha_{l+1}$, де порядок визначається умовами (7.7), надаючи значення змінним з номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ послідовно $g_1, g_2, \ldots$, а змінним з номерами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_{l+1}$ – послідовно значення $g_\eta, g_{\eta-1}, \ldots$. Якщо подальше галуження «в глиб» не можливе (множина порожня, або одноелементна), відбувається повертання на попередній рівень дерева галужень з наданням попередньо визначеній змінній наступного значення.

Розглянемо **спосіб оцінювання** допустимих підмножин розв'язків.

Нехай при описаному способі галуження при утворенні підмножини Q множини допустимих розв'язків задачі (7.4)–(7.6) вже визначилися змінні $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_t}$, нумерацію яких без порушення загальності міркувань зробимо так, що виконуються співвідношення:

$$c_{\beta_1} \ge c_{\beta_2} \ge \ldots \ge c_{\beta_t} . \quad (7.9)$$

Змінні, що залишилися невизначеними позначимо $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\tau$, де $t + \tau = k$. Нумерацію цих невизначених змінних, не порушуючи загальності міркувань, здійснимо так, щоб виконувалися наступні співвідношення для коефіцієнтів $\tilde{c}_j$ цільової функції при змінних $\tilde{x}_j$ $\forall j \in J_\tau$:

$$\tilde{c}_1 \ge \tilde{c}_2 \ge \ldots \ge \tilde{c}_\lambda \ge 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \ge \ldots \ge \tilde{c}_\tau . \quad (7.10)$$

Значення t змінних

$$x_{\beta_1} = g_{i_1}, \ldots, x_{\beta_t} = g_{i_t}, \quad (7.11)$$

що визначено згідно описаних правил галуження при утворенні підмножини Q, об'єднаємо в мультимножину $G_B = \left\{ g_{i_1}, \ldots, g_{i_t} \right\}$. Тоді значення невизначених змінних можуть вибиратися з мультимножини $\tilde{G}$, яка є різницею мультимножин G та G_B: $\tilde{G} = G - G_B = \left\{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_\chi\right\}$, де $\chi + t = \eta$. Нехай елементи $\tilde{G}$ пронумеровані так, що

$$\tilde{g}_1 \le \tilde{g}_2 \le ... \le \tilde{g}_\chi. \tag{7.12}$$

При підстановці значень змінних $x_{\beta_1}, ..., x_{\beta_t}$ в цільову функцію (7.4) одержимо такий доданок

$$\nu = \sum_{p=1}^{t} c_{\beta_p} g_{i_p}. \tag{7.13}$$

Як відомо (див., наприклад, [136]), число ξ в задачі мінімізації функцій $F(x)$ на множині $x \in D$ в МГМ є оцінкою підмножини $D_i \subset D$, якщо $\xi \le F(x)$ $\forall x \in D_i$.

Теорема 7.1. Оцінкою ξ підмножини Q множини допустимих розв'язків задачі (7.4)–(7.6) є величина

$$\xi = \nu + c^*, \tag{7.14}$$

де ν обчислюється за формулою (7.13), а

$$c^* = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} \tag{7.15}$$

за умов (7.10), (7.12).

Доведення. Для довільної точки x з підмножин Q значення цільової функції є таким:

$$F(x) = \nu + \sum_{j=1}^{\tau} \tilde{c}_j \tilde{x}_j, \tag{7.16}$$

де $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_\tau) \in E_{\chi\theta}^{\tau}(\tilde{G})$, $E_{\chi\theta}^{\tau}(\tilde{G})$ – загальна множина τ-розміщень з мультимножини $\tilde{G}$, остання має χ елементів, серед яких кількість різних елементів є θ.

Очевидно, що $\forall x \in Q$ значення $F(x)$ не менше мінімального значення $\tilde{c}$ правої частини в формулі (7.16). Тобто $\forall x \in Q$, враховуючи, що за (7.13) $\nu = const$, маємо

$$F(x) \geq \nu + \tilde{c}\,. \tag{7.17}$$

Знайдемо

$$\tilde{c} = \min_{\tilde{x} \in E^{\tau}_{\chi\theta}(\tilde{G})} \sum_{j=1}^{\tau} \tilde{c}_j \tilde{x}_j, \tag{7.18}$$

скориставшись теоремою 3.1 з [17]. Одержуємо

$$\tilde{c} = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}\,. \tag{7.19}$$

Порівнюючи (7.19) та (7.15), бачимо, що $\tilde{c} = c^*$, отже з використанням нерівності (7.17) маємо: $\xi = \nu + c^* \leq F(x)$ $\forall x \in Q$, що і треба було довести.

Розглянемо **правила відсікання** безперспективних або порожніх підмножин (вершин дерева галуження).

Використовується стандартне правило відсікання: якщо для підмножини Q оцінка $\xi \geq F_0 = F(x_0)$ – значення цільової функції на одноелементній допустимій множині x_0 – тобто деякий допустимий розв'язок, – то підмножина Q – відсікається (не галузиться далі). Теж, – якщо $Q = \varnothing$ (жодна точка в ній не задовольняє (7.6)).

Якщо $F_0 < F_1 = F(x_1)$, $\{x_1\} = Q$, тобто $|Q| = 1$, то значення F_0 (поточний «рекорд») оновлюється: $F_0 := F_1$ (заміняється на F_1). Нове F_0 порівнюють з оцінкою ξ кожної допустимої множини Q (що не відсічена). Якщо $\xi \geq F_0$, то множину Q відсікають.

Позначимо підмножину Q допустимих розв'язків в МГМ для задачі (7.4)–(7.6) так:

$$D^{\beta_1 \ldots \beta_r}_{i_1 \ldots i_r} = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \mid x_{\beta_j} = g_{i_j} \ \forall j \in J_r, \forall r \in J_n,$$

$$\left(\beta_1, \dots, \beta_r\right) \in E_k^r\left(J_k\right), \left(i_1, \dots, i_r\right) \in E_\eta^r\left(J_\eta\right)\Big\},$$

де $E_k^r\left(J_k\right)$ позначає множину r-розміщень без повторень з множини J_k (див. [17]), β_j, i_j задовольняють (7.9), (7.11) за умови $r = t$. Оцінку ξ цієї множини, визначену за формулами (7.13)–(7.15) за умов (7.9)–(7.10), (7.12) позначимо $\xi_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r}$. Має місце така теорема.

Теорема 7.2. Між оцінками підмножин $D_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r}$ та $D_{i_1 \dots i_r \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_r \dots \beta_{r+\chi}}$ справедливе співвідношення:

$$\xi_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} \le \xi_{i_1 \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_{r+\chi}}, \tag{7.20}$$

де $r + \chi \le k$, $\forall r \in J_{k-1}$ $\forall \chi \in J_{k-1}^0 = J_{k-1} \cup \{0\}$, $\left(\beta_1, \dots, \beta_q\right) \in E_k^q\left(J_k\right)$; $\left(i_1, \dots, i_q\right) \in E_\eta^q\left(J_\eta\right)$, $q \in \{r; r + \chi\}$; величини $i_j \in J_\eta$ та $\beta_1, \dots, \beta_{r+\chi}$ задовольняють умовам (7.9), (7.11).

Доведення. Оцінка $\xi_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} = \nu_1 + \tilde{c}_1$, де за умови $r = t$ величина ν_1 – це оцінка підмножини $D_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r}$ за (7.12), $\tilde{c}_1$ – це $\tilde{c}$ для $D_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r}$ за формулою (7.17). Оцінка $\xi_{i_1 \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_{r+\chi}} = \nu_2 + \tilde{c}_2$, де ν_2 та $\tilde{c}_2$ для підмножини $D_{i_1 \dots i_r \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_r \dots \beta_{r+\chi}}$ – це відповідно оцінка за (7.12) та $\tilde{c}$ за (7.17).

Оскільки $D_{i_1 \dots i_r \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_r \dots \beta_{r+\chi}} \subset D_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r}$, то $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$, а $\Delta\nu + \tilde{c}_2$ – це значення при $\tau = k - r$ лінійної функції $\sum_{j=1}^{\tau} \tilde{c}_j \tilde{x}_j$ з формули (7.16) на деякому розміщенні $\tilde{x} \in E_{\chi\theta}^{\tau}\left(\tilde{G}\right)$, а $\tilde{c}_1$ за (7.18) – це $\tilde{c}_1 = \min\limits_{\tilde{x} \in E_{\chi\theta}^{\tau}} \sum_{j=1}^{\tau} \tilde{c}_j \tilde{x}_j$, то з означення мінімуму, маємо: $\Delta\nu + \tilde{c}_2 \ge \tilde{c}_1$.

Додавши до останньої нерівності по ν_1 в праву і ліву частину, маємо:

$$\xi_{i_1 \dots i_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} = \nu_1 + \tilde{c}_1 \le \nu_1 + \Delta\nu + \tilde{c}_2 = \xi_{i_1 \dots i_{r+\chi}}^{\beta_1 \dots \beta_{r+\chi}},$$

що і треба було довести.

Доведемо твердження, що виражає ще одне співвідношення між оцінками допустимих підмножин. Для цього спершу введемо необхідні позначення та викладемо попередні міркування.

Розглянемо співвідношення між оцінками допустимих підмножин, що є підмножинами однієї допустимої підмножини і одна не є підмножиною іншої (на відміну від випадку, що розглянуто в теоремі 7.2).

Оцінка підмножини $D_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}$ за (7.14)

$$\xi_1 = \xi_{i_1 \ldots i_r \beta_{r+1}}^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}} = \nu_{r+1} + c_{r+1}^*,$$

де при $t = \tau$ за (7.13)

$$\nu_{r+1} = \sum_{p=1}^{r+1} c_{\beta_p} g_{i_p} = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}},$$

а оцінка підмножини $D_{i_1 \ldots i_r i_{r+j}}^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}}$ за (7.14)

$$\xi_j = \xi_{i_1 \ldots i_r \beta_{r+j}}^{\beta_1 \ldots \beta_r \beta_{r+1}} = \nu_{r+j} + c_{r+j}^*,$$

де при $t = \tau$ за (7.13)

$$\nu_{r+j} = \sum_{p=1}^{r} c_{\beta_p} g_{i_p} + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}}.$$

Тут величина ν_0 – це однакова частина виразів ν_{r+1} та ν_{r+j} (перший доданок в середній частині останньої формули).

За умовою (7.8), при якій утворюються підмножини:

1) якщо $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$, то $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$, отже

$$\nu_{r+1} - \nu_{r+j} = c_{\beta_{r+1}} \left(g_{i_{r+1}} - g_{i_{r+j}} \right) \leq 0;$$

$$\nu_{r+1} \leq \nu_{r+j}; \tag{7.21}$$

2) якщо $c_{\beta_{r+1}} < 0$, то $g_{i_{r+1}} \geq g_{i_{r+j}}$, отже знову $\nu_{r+1} - \nu_{r+j} \leq 0$.

Порівняємо c^*_{r+1} та c^*_{r+j}, які обчислюються за допомогою формул вигляду (7.14), (7.15), разом з доданками $\nu_{r+1}-\nu_0$ та $\nu_{r+j}-\nu_0$ відповідно, що необхідно для порівняння ξ_1 та ξ_j.

Позначимо $G_B=\left\{g_{i_1},\dots,g_{i_r}\right\}$, $G_0=G-G_B$.

Позначимо різниці мультимножин $G_1=G_0-\left\{g_{i_{r+1}}\right\}=\left\{\tilde{g}^1_1,\dots,\tilde{g}^1_\chi\right\}$; $G_2=G_0-\left\{g_{i_{r+j}}\right\}=\left\{\tilde{g}^2_1,\dots,\tilde{g}^2_\chi\right\}$, для елементів G_1, G_2 виконується умова вигляду (7.12), $\chi+t=\eta$.

Нехай $t=r+1;$ $t+\tau=k$, нехай виконується (7.10).

За формулою (7.15)

$$c^*_{r+1}=c^*_{11}+c^*_{12},$$

де

$$c^*_{11}=\sum_{j=1}^{\lambda}\tilde{c}_j\tilde{g}^1_j; \tag{7.22}$$

$$c^*_{12}=\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}, \tag{7.23}$$

а також

$$c^*_{r+j}=c^*_{21}+c^*_{22},$$

де

$$c^*_{21}=\sum_{j=1}^{\lambda}\tilde{c}_j\tilde{g}^2_j; \tag{7.24}$$

$$c^*_{22}=\sum_{j=1}^{\tau-\lambda}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}. \tag{7.25}$$

При знаходженні c^*_{r+1}, c^*_{11}, c^*_{12} елемент $g_{i_{r+j}}$ може в G_1 знаходитися серед перших λ елементів мультимножини G_1, серед елементів з номерами $\lambda+1$, $\lambda+2$, …, $\chi-\tau-\lambda-1$, $\chi-\tau-\lambda;$ серед елементів з номерами $\chi-\tau-\lambda+1$, $\chi-\tau-\lambda+2;$ …, χ.

Нагадаємо, що елементи G_1 упорядковані так

$$\tilde{g}_1^1 \le \tilde{g}_1^2 \le \ldots \le \tilde{g}_\chi^1 . \qquad (7.26)$$

Позначимо названі першу, другу та третю мультимножини відповідно A_1; B_1; C_1 ($A_1 + B_1 + C_1 = G_1$).

Аналогічно, при знаходженні c^*_{r+j}, c^*_{21}, c^*_{22} елемент $g_{i_{r+1}}$ в G_2 може знаходитися в таких підмультимножинах A_2, B_2, C_2, що в сумі дають мультимножину G_2 ($G_2 = A_2 + B_2 + C_2$):

$$A_2 = \left\{ \tilde{g}_1^2, \tilde{g}_2^2, \ldots, \tilde{g}_\lambda^2 \right\};$$

$$B_2 = \left\{ \tilde{g}_{\lambda+1}^2, \tilde{g}_{\lambda+2}^2, \ldots, \tilde{g}_{\chi-\tau-\lambda-1}^2, \tilde{g}_{\chi-\tau-\lambda}^2 \right\};$$

$$C_2 = \left\{ \tilde{g}_{\chi-\tau-\lambda+1}^2, \tilde{g}_{\chi-\tau-\lambda+2}^2, \ldots, \tilde{g}_\chi^2 \right\},$$

де елементи мультимножини G_2 упорядковані згідно умови:

$$\tilde{g}_1^2 \le \tilde{g}_2^2 \le \ldots \le \tilde{g}_\chi^2 . \qquad (7.27)$$

Таким чином, при порівнянні c^*_{r+1} та c^*_{r+j} потрібно розглянути 9 варіантів утворення цих виразів, що відповідають дев'яти комбінаціям розташування елементів $g_{i_{r+j}}$ та $g_{i_{r+1}}$ в G_1 і G_2 відповідно. Позначимо ці варіанти так: A_1A_2; A_1B_2; A_1C_2; B_1A_2; B_1B_2; B_1C_2; C_1A_2; C_1B_2; C_1C_2. Ілюстрація цих варіантів на рис. 7.1, 7.2, де зліва стоять назви варіантів. A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ – позначають підмультимножини, точки з позначками 1 та j показують розташування елементів $g_{i_{r+1}}$ та $g_{i_{r+j}}$ відповідно. Лінії, що з'єднують G_1 та G_2, показують місця розташування однакових елементів в G_1 та G_2. При цьому у випадках A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2 можливі під випадки в залежності, що виконується: $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$, чи навпаки $g_{i_{r+1}} \ge g_{i_{r+j}}$ (див. рис. 7.3).

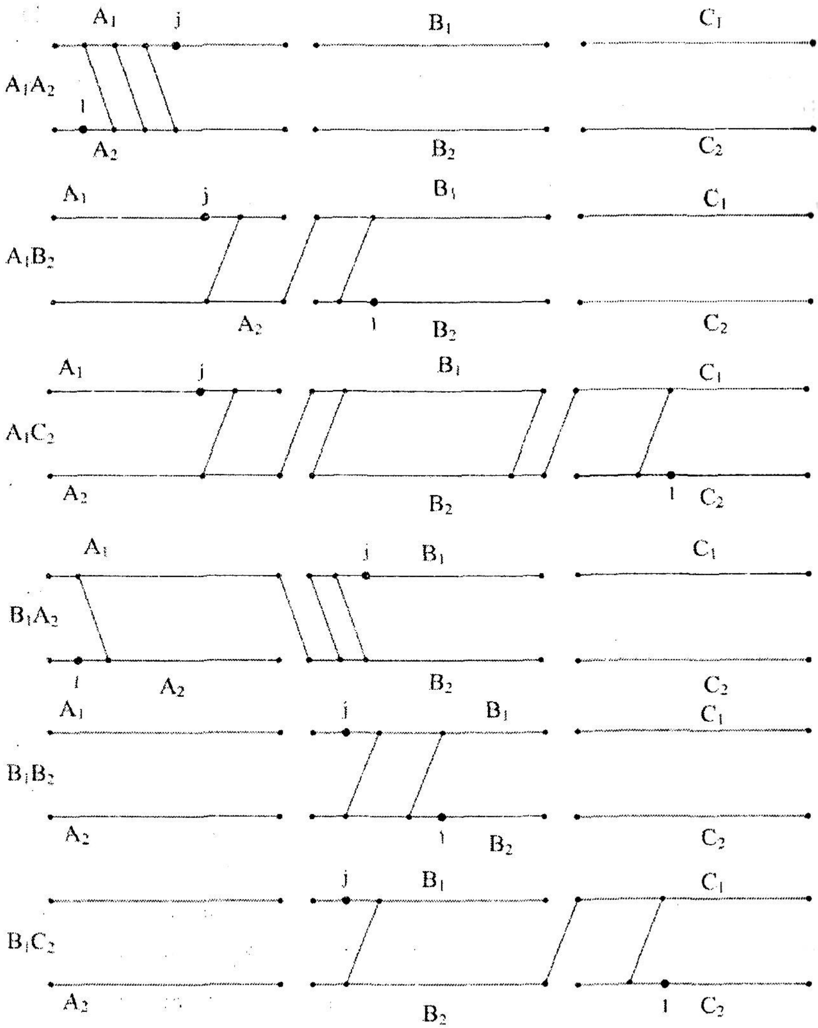


Рис. 7.1. Ілюстрація можливих варіантів розташування $g_{i_{r+1}}$ та $g_{i_{r+j}}$

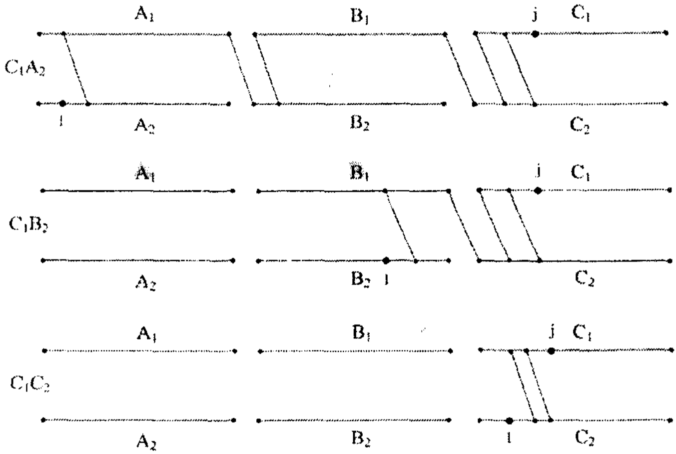


Рис. 7.2. Продовження ілюстрації можливих варіантів розташування $g_{i_{r+1}}$ та $g_{i_{r+j}}$

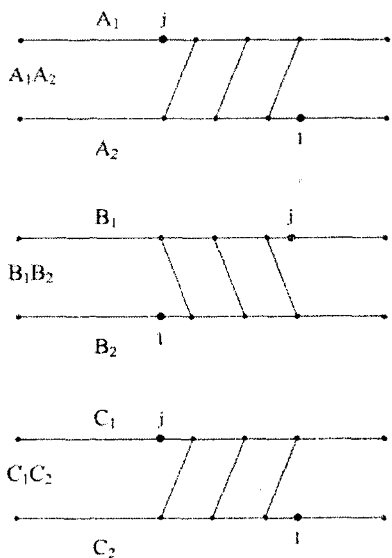


Рис. 7.3. Підвипадки випадків A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2, що не показані на рис. 7.1, 7.2

Теорема 7.3. Між оцінками ξ_1 та ξ_j підмножин $D^{\beta_1\ldots\beta_r\beta_{r+1}}_{i_1\ldots i_r i_{r+1}}$ **та** $D^{\beta_1\ldots\beta_r\beta_{r+1}}_{i_1\ldots i_r i_{r+j}}$ відповідно у всіх випадках крім B_1C_2 та C_1C_2 справедливе співвідношення:

$$\xi_1 = \xi^{\beta_1\ldots\beta_r\beta_{r+1}}_{i_1\ldots i_r i_{r+1}} \le \xi^{\beta_1\ldots\beta_r\beta_{r+1}}_{i_1\ldots i_r i_{r+j}} = \xi_j,$$

де $(\beta_1,\ldots,\beta_{r+1})\in E_k^{r+1}(J_k)$, $(i_1,\ldots,i_r,i_{r+j})\in E_\eta^{r+1}(J_\eta)$, $(i_1,\ldots,i_{r+1})\in E_\eta^{r+1}(J_\eta)$; $r\in J_{k-1}^0$; $j>1$, $j\in\{i_{r+2},\ldots,i_k\}$; числа $i_j\in J_\eta$ та $\beta_1,\ldots,\beta_{r+1}$ – задовольняють (7.9), (7.11). У випадку C_1C_2 знак нерівності – протилежний: $\xi_1\ge\xi_j$. У випадку B_1C_2 справедлива невірність:

$$\xi_1\le\xi_j,$$

якщо

$$\Delta = c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}\right) + \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} - \tilde{c}_{\lambda+1}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \ge 0$$

та у випадку, коли остання нерівність виконується як $\Delta\le 0$, то $\xi_1\ge\xi_j$; в формулі для Δ параметр ω – це місце елемента $g_{i_{r+1}}$ в множині C_2 (від її початку).

Доведення. Розглянемо співвідношення між ξ_1 та ξ_j у всіх можливих випадках.

У випадку A_1A_2, коли $g_{\beta_{i_{r+j}}}\ge g_{i_{r+1}}$, маємо: $B_1=B_2$; $C_1=C_2$, а отже $c_{12}^*=c_{22}^*$.

$$\Delta_1 = c_{11}^* - c_{21}^* = \sum_{j=1}^{\lambda_1}\tilde{c}_j\left(\tilde{g}_j^1-\tilde{g}_j^2\right) + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda_2}\tilde{c}_j\left(\tilde{g}_j^1-\tilde{g}_j^2\right) +$$

$$+\sum_{j=\lambda_2+1}^{\lambda}\tilde{c}_j\left(\tilde{g}_j^1-\tilde{g}_j^2\right), \qquad (7.28)$$

де λ_1+1 та λ_2 – місця $g_{i_{r+1}}$ та $g_{i_{r+j}}$ в A_1, A_2, а отже перша $\sigma_1=\sigma_{11}-\sigma_{12}$ і третя $\sigma_2=\sigma_{21}-\sigma_{22}$ суми в правій частині (7.28) нульові, оскільки $\tilde{g}_j^1=\tilde{g}_j^2$ в них.

Зазначимо, що за умови A_1A_2 у випадку, коли $g_{i_{r+j}} \geq g_{i_{r+1}}$ (див. рис. 7.1), тоді згідно правила галуження $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$. Зауважимо, що згідно способу галуження та умови (7.7) всі змінні, що не визначилися, мають коефіцієнти менші, ніж $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$, а за умов ситуації A_1A_2 – в (7.28) вони невід'ємні. Тобто

$$c_{\beta_{r+1}} \geq \tilde{c}_{\lambda_1+1} \geq \tilde{c}_{\lambda_1+2} \geq \ldots \geq \tilde{c}_{\lambda_2} \geq 0. \qquad (7.29)$$

Зауважимо, що $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$; отже

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda_2-1} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^1 + \tilde{c}_{\lambda_2} g_{i_{r+j}} + \sigma_{11} + \sigma_{21} + c_{12}^*; \qquad (7.30)$$

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \tilde{c}_{\lambda_1+1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+2}^{\lambda_2} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^2 + \sigma_{12} + \sigma_{22} + c_{22}^*. \qquad (7.31)$$

В силу (7.26), (7.27) елементи G_1 і G_2 упорядковані, зокрема з упорядкування G_1 маємо:

$$\tilde{g}_{\lambda_1+1}^1 \leq \tilde{g}_{\lambda_1+2}^1 \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda_2-1}^1 \leq g_{i_{r+j}}. \qquad (7.32)$$

З упорядкування G_2 маємо:

$$g_{i_{r+1}} \leq \tilde{g}_{\lambda_1+2}^2 \leq \tilde{g}_{\lambda_1+3}^2 \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda_2-2}^2 \leq \tilde{g}_{\lambda_2-1}^2. \qquad (7.33)$$

Причому (див. рис. 7.1) в (7.32), (7.33) для всіх можливих пар індексів j, $j+1$ маємо рівність (де $\tilde{g}_j$ позначка однакових в G_1 та G_2 елементів):

$$\tilde{g}_j^1 = \tilde{g}_{j+1}^2 = \tilde{g}_j. \qquad (7.34)$$

Отже, з (7.32)–(7.34) маємо:

$$g_{i_{r+1}} \leq \tilde{g}_{\lambda_1+1} \leq \tilde{g}_{\lambda_1+2} \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda_2-1} \leq g_{i_{r+j}}. \qquad (7.35)$$

Причому згідно теореми 3.1. з [17] вираз $\xi_1 - \nu_0 - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*$ з (7.30) є мінімальним значенням лінійної цільової функції з коефіцієтами, які упорядковані згідно (7.29), на множині переставлень елементів виписаних в нерівностях (7.35).

Тоді вираз $\xi_j - \nu_0 - \sigma_{12} - \sigma_{22} - c_{22}^*$, який можна розглядати як значення такої же цільової функції, але на іншому переставленні елементів (7.35), згідно означення мінімуму не може бути меншими $\xi_1 - \nu_0 - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*$, отже:

$$\xi_j - \nu_0 - \sigma_{12} - \sigma_{22} + c_{22}^* \geq \xi_1 - \nu_0 - \sigma_{11} - \sigma_{21} - c_{12}^*.$$

Отже, враховуючи $\sigma_{11} = \sigma_{12}$; $\sigma_{21} = \sigma_{22}$; $c_{12}^* = c_{22}^*$, одержуємо $\xi_j \geq \xi_1$ у випадку $A_1 A_2$ при $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$.

Розглянемо випадок $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$, тоді згідно правила галуження $c_{\beta_{r+1}} < 0$ (див. рис. 7.3). Зауважимо, що згідно способу галуження, якщо визначена змінна біля від'ємного коефіцієнта цільової функції $c_{\beta_{r+1}} < 0$, то не визначеними залишилися лише змінні при від'ємних коефіцієнтах цільової функції. Отже ситуація $A_1 A_2$, яка означає, що є невизначені змінні з додатними коефіцієнтами в цільовій функції, і умова $c_{\beta_{r+1}} < 0$ не можливі одночасно. Розгляд випадку $A_1 A_2$ завершено.

Розглянемо випадок $A_1 B_2$, тобто $g_{i_{r+j}} \in A_1$; $g_{i_{r+1}} \in B_2$, а значить $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$, що означає за правилами галуження $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Отже, невизначені тільки змінні при менших $c_{\beta_{r+1}}$ в (7.7) від'ємних коефіцієнтах цільової функції. Тобто ситуація $A_1 B_2$ при цьому не можлива, як така що суперечить цьому (бо A_1 – означає наявність невизначених змінних з додатними коефіцієнтами в цільовій функції).

Розглянемо випадок $A_1 C_2$, тобто $g_{i_{r+j}} \in A_1$; $g_{i_{r+1}} \in B_2$, що означає $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$, що згідно способу галуження може бути тільки при $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Останнє згідно способу галуження означає, що не визначеними є лише змінні при від'ємних змінних. Тобто $g_{i_{r+j}} \notin A_1$. Що є протиріччям з можливістю випадку $A_1 C_2$.

Розглянемо випадок B_1A_2. Це означає $g_{i_{r+j}} \in B_1$; $g_{i_{r+1}} \in A_2$ (див. рис. 7.4), що тягне згідно способу галуження (оскільки $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$) нерівність $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$.

Запишемо ξ_1 у вигляді:

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + c^*_{r+1}, \tag{7.36}$$

а ξ_j у вигляді:

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + c^*_{r+j}, \tag{7.37}$$

де

$$c^*_{r+1} = c^*_{11} + c^*_{12}, \tag{7.38}$$

$$c^*_{r+j} = c^*_{21} + c^*_{22}, \tag{7.39}$$

а складові (7.38), (7.39) обчислюються за (7.22)–(7.25).

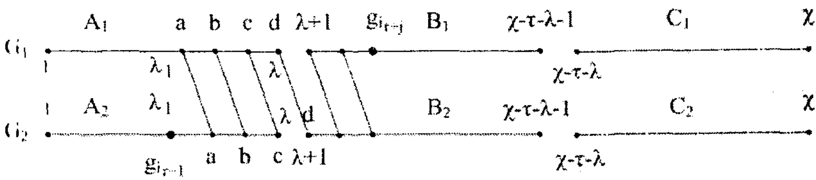


Рис. 7.4. Схема розташування елементів у випадку B_1A_2, де нумерація елементів в G_1, G_2 – це $1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda, \lambda+1, \ldots,$ $\chi-\tau-\lambda-1,\ \chi-\tau-\lambda, \ldots, \chi$; елементи – це $a, b, c, d, g_{i_{r+j}}, g_{i_{r+1}}$

Очевидно, що $c^*_{12} = c^*_{22}$ ($C_1 = C_2$; див. рис. 7.4)

$$c^*_{11} = \sigma_{11} + \sum_{j=\lambda_1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}^1_j; \tag{7.40}$$

$$c^*_{21} = \sigma_{21} + \tilde{c}_{\lambda_1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}^2_j, \tag{7.41}$$

де

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sum_{j=1}^{\lambda_1-1} \tilde{c}_j \tilde{g}_j,\quad \tilde{g}_j = \tilde{g}^1_j = \tilde{g}^2_j \quad \forall j \in J_{\lambda_1-1}; \tag{7.42}$$

$$\tilde{g}_{j+1}^{2} = \tilde{g}_{j}^{1} = \tilde{g}_{j} \quad \forall j \in J_{\lambda} \setminus J_{\lambda_1 - 1}. \tag{7.43}$$

Знайдемо різницю $\xi_j - \xi_1$:

$$\xi_j - \xi_1 = \left(c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}}\right) + \tilde{c}_{\lambda_1}\left(g_{i_{r+1}} - \tilde{g}_{\lambda_1}^{1}\right) +$$

$$+ \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \tilde{c}_j \left(\tilde{g}_j^2 - \tilde{g}_j^1\right). \tag{7.44}$$

Зазначимо, що в силу способу галуження

$$c_{\beta_{r+1}} \geq \tilde{c}_{\lambda_1} \geq \tilde{c}_{\lambda_1+1} \geq \ldots \geq \tilde{c}_{\lambda} \geq 0. \tag{7.45}$$

В силу (7.26), (7.27) та (7.43) маємо

$$g_{i_{r+1}} \leq \tilde{g}_{\lambda_1} \leq \tilde{g}_{\lambda_1+1} \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda} \leq g_{i_{r+j}}. \tag{7.46}$$

Зазначимо, що $\xi_j - \xi_1$ – це різниця значень лінійної цільової функції з коефіцієнтами з (7.45) на двох векторах: перший g^1 складається з послідовних $\lambda - \lambda_1 + 2$ елементів взятих так: перший зліва – це $g_{i_{r+j}}$, а далі $\lambda - \lambda_1 + 1$ елементів з (7.46) взятих зліва в (7.46), а другий вектор g^j складається з послідовних $\lambda - \lambda_1 + 2$ значень елементів, взятих зліва в (7.46).

Введемо позначення:

$$\overline{c} = \left(\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{\lambda-\lambda_1+2}\right); \;\; \overline{x} = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{\lambda-\lambda_1+2}\right); \;\; \lambda - \lambda_1 + 2 = L.$$

Перепозначимо відповідно числа з (7.45): $\overline{c}_1 \geq \overline{c}_2 \geq \ldots \geq \overline{c}_L$.

Нехай G_0 – це мультимножина лівих L елементів з (7.46), тобто до $\tilde{g}_{\lambda}$ включно; нехай ν – в ній різних; $E_{L\nu}\left(G_0\right) = E_{\lambda-\lambda_1+2,\nu}\left(G_0\right)$ – множина переставлень з цих елементів.

$\xi_1 = \min\limits_{\overline{x} \in E_{L\nu}} \sum\limits_{j=1}^{L} \overline{c}_j \overline{x}_j$ згідно [17] (теорема 3.1).

Вектор на якому досягається ξ_1 – це згідно теореми 3.1 з [17] вектор $g^1 = \left(g_{i_{r+1}}; \tilde{g}_{\lambda_1}, \tilde{g}_{\lambda_1+1}, \ldots, \tilde{g}_{\lambda-1}; \tilde{g}_{\lambda}\right)$, елементи якого задовольняють (7.46).

Оскільки, g^1 – це мінімаль, то на іншому векторі $g^0 = \left(g_1^0, \ldots, g_L^0\right) \in E_{L\nu}\left(G_0\right)$ значення лінійної функції $\xi_0 = \sum_{j=1}^{L} \overline{c}_j g_j^0 \geq \xi^1$.

Візьмемо в якості g^0 вектор $\left(\tilde{g}_\lambda, g_{i_{r+1}}, \tilde{g}_{\lambda_1}; \tilde{g}_{\lambda_1+1}, \ldots, \tilde{g}_{\lambda-1}\right) = g^0$.

Зазначимо, що всі $\overline{c}_j$ $\forall j \in J_L$ за (7.45) – невід'ємні.

Отже, маючи $\xi_0 \geq \xi_1$, змінимо в g^0 перший елемент на $g_{i_{r+j}}$ одержимо g^j, тобто змінимо в ξ_0 один доданок $\overline{c}_1 g_1^0 = c_{\beta_{r+1}} \tilde{g}_\lambda$ на $c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} = \overline{c}_1 g_1^j$.

Згідно (7.46) та $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$ маємо $c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} \geq c_{\beta_{r+1}} \tilde{g}_\lambda$. Ця заміна з ξ_0 дає $\xi_j \geq \xi_0$, тобто $\xi_j \geq \xi_0 \geq \xi_1$. Таким чином, маємо: $\xi_j \geq \xi_1$ у випадку $B_1 A_2$.

Розглянемо випадок $B_1 B_2$. Очевидно, що в цьому випадку ξ_1, ξ_j представляється як (7.36), (7.37), c_{r+1}^*, c_{r+j}^* – як (7.38), (7.39) за умов (7.22)–(7.25) та $c_{11}^* = c_{21}^*$; $c_{21}^* = c_{22}^*$, отже $c_{r+1}^* = c_{r+j}^*$. Тобто, різниця $\xi_j - \xi_1$ така:

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}\right) = \nu_{r+j} - \nu_{r+1} \geq 0,$$

як було показано раніше в (7.21) (і цей результат не залежить від підвипадків $B_1 B_2$ з рис. 7.1 та 7.3).

Розглянемо випадок ${}_1C\, B_2$ (див. рис. 7.5).

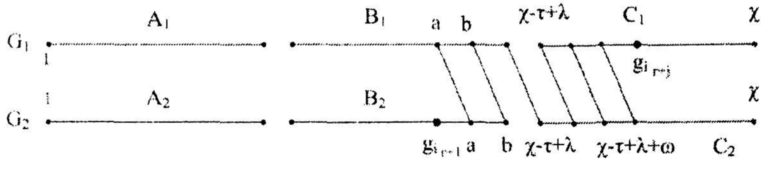


Рис. 7.5. Схема випадку $C_1 B_2$, де ω – місце $g_{i_{r+1}}$ в C_1 від її початку (в G_2 – це $\chi - \tau + \lambda + \omega$), інші позначки такі ж як і на рис. 7.4

Отже, маємо $g_{i_{r+1}} \le g_{i_{r+j}}$, тобто згідно правил галуження $c_{\beta_{r+1}} \ge 0$. При цьому врахуємо, що ξ_1, ξ_j обчислюються за допомогою формул (7.36)–(7.39) за умов (7.22)–(7.25).

При цьому у випадку C_1B_2, в силу $A_1 = A_2$, очевидно, $c_{11}^* = c_{21}^*$. Проаналізуємо c_{12}^* та c_{22}^*, які визначаються (7.23), (7.25) відповідно. Ці суми мають однакові складові

$$\sigma_1 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j},\ \sigma_2 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j},$$

оскільки, $\tilde{g}^1_j = \tilde{g}^2_j$, $\forall j \in J_\chi \setminus J_{\chi-\tau+\lambda+\omega}$. Тут ω – місце $g_{i_{r+j}}$ в множині C_1 від початку з урахуванням порядку (7.26). Тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. З (7.23) та (7.25) тоді маємо:

$$c_{12}^* - \sigma = \sum_{j=1}^{\omega} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}; \tag{7.47}$$

$$c_{22}^* - \sigma = \sum_{j=1}^{\omega} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}. \tag{7.48}$$

Причому $\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j} = \tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j+1} = \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}\quad \forall j \in J^0_{\omega-1} = J_{\omega-1} \bigcup \{0\}$.
Зазначимо, що

$$g_{i_{r+1}} \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda} \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \le \ldots \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} \le g_{i_{r+j}}. \tag{7.49}$$

$$c_{\beta_{r+1}} \ge 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \ge \tilde{c}_{\lambda+2} \ge \ldots \ge \tilde{c}_{\lambda+\omega}. \tag{7.50}$$

Виходячи з (7.36)–(7.39) за умов (7.22)–(7.25) та представлень (7.47), (7.48), нерівностей (7.49), (7.50), маємо, що $\xi_j - \xi_1$ є таким:

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=1}^{\omega} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} -$$

$$-\sum_{j=1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} - \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+j}} =$$

$$= c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}\right) + \sum_{j=1}^{\omega-1}\tilde{c}_{\lambda+j}\left(\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} - \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}\right) +$$

$$+\tilde{c}_{\lambda+\omega}\left(\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega} - g_{i_{r+j}}\right). \quad (7.51)$$

В силу того, що $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$, а $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$, нерівностей (7.49) та (7.50), де підкреслимо $\forall j \in J_\omega$ $\tilde{c}_{\lambda+j} < 0$, маємо з (7.51) $\xi_j - \xi_1 \geq 0$, як сума всіх невід'ємних доданків. Отже, $\xi_j \geq \xi_1$ у випадку C_1B_2.

Розглянемо випадок B_1C_2 (рис. 7.6).

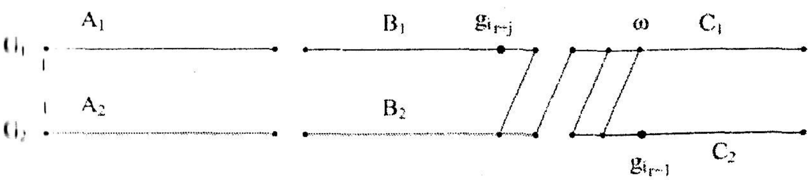


Рис. 7.6. Схема випадку B_1C_2, ω – місце $g_{i_{r+1}}$ в C_2 (від початку), інші позначення як на рис. 7.4, 7.5

Отже, $g_{i_{r+j}} \leq g_{i_{r+1}}$, за правилами галуження $c_{\beta_{r+1}} < 0$. Як і раніше проаналізуємо ξ_1 та ξ_j, що обчислюються за (7.36)–(7.39) за умов (7.22)–(7.25). В цих формулах у випадку B_1C_2, очевидно (див. рис. 7.6) $c_{11}^* = c_{21}^*$ в силу $A_1 = A_2$. Проаналізуємо c_{12}^* та c_{22}^* на основі їх виразів (7.23), (7.25) відповідно. Якщо ω позначити місце $g_{i_{r+1}}$ в C_2 (від початку C_2 з урахуванням порядку (7.27)), то можна записати однакові частини сум (7.23) та (7.25):

$$\sigma_1 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}, \quad (7.52)$$

$$\sigma_2 = \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda}\tilde{c}_{\lambda+j}\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}. \quad (7.53)$$

Дійсно, (7.52) та (7.53) однакові, бо $\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}=\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}$ $\forall j\in J_{\tau-\lambda}\setminus J_\omega$. Позначимо $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ та розглянемо $c^*_{12}-\sigma$ та $c^*_{22}-\sigma$, які формально визначаються (7.47), (7.48), де ω – місце $g_{i_{r+1}}$ в C_2 (від початку C_2). Зауважимо, що $\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j}=\tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j-1}=\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}$ $\forall j\in J_\omega$.

Зазначимо, що

$$g_{i_{r+j}}\le\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1}\le\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+2}\le\ldots\le\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}\le g_{i_{r+1}}. \tag{7.54}$$

$$0>c_{\beta_{r+1}}\ge\tilde{c}_{\lambda+1}\ge\tilde{c}_{\lambda+2}\ge\ldots\ge\tilde{c}_{\lambda+\omega}. \tag{7.55}$$

Виходячи з (7.36)–(7.39) за умов (7.22)–(7.25), формул (7.47), (7.48), (7.52), (7.53) та нерівностей (7.54), (7.55) маємо:

$$\xi_j-\xi_1=c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}}\right)+\sum_{j=1}^{\omega-1}\tilde{c}_{\lambda+j}\left(\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j+1}-\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}\right)+$$

$$+\tilde{c}_{\lambda+\omega}\left(g_{i_{r+1}}-\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}\right). \tag{7.56}$$

З іншого боку, перегрупувавши доданки в (7.56), з урахуванням попарної рівності елементів з G_1 та G_2, що обнуляє відповідні різниці, маємо

$$\xi_j-\xi_1=c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}}-g_{i_{r+1}}\right)+\tilde{c}_{\lambda+\omega}g_{i_{r+1}}-\tilde{c}_{\lambda+1}g_{\chi-\tau+\lambda+1}=\Delta.$$

Не важко бачити, що цей вираз для $\xi_j-\xi_1=\Delta$ може бути як не від'ємними так і не додатній у випадку B_1C_2 (приклади цього наведено після доведення). Це і треба було показати у випадку B_1C_2.

Розглянемо випадок C_1A_2 (рис. 7.7).

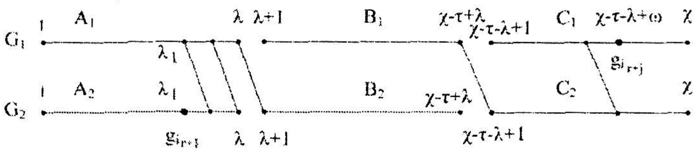


Рис. 7.7. Схема випадку C_1A_2, позначення такі ж як на рис. 7.4–7.6

Отже, $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$, що означає $c_{\beta_{r+1}} \geq 0$. Нехай λ_1 позначає місце $g_{i_{r+1}}$ в A_2, а ω – місце від початку в C_1 елемента $g_{i_{r+j}}$ (враховуючи порядки (7.26), (7.27)).

Знайдемо

$$\xi_j - \xi_1 = \nu_j + c_j^* - \nu_1 - c_1^* = c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^2 + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^1 - \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 =$$

$$= c_{\beta_{r+1}}\left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}}\right) + \tilde{c}_{\lambda_1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^2 + \sum_{j=1}^{\omega} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^2 -$$

$$-\sum_{j=\lambda_1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^1 - \sum_{j=1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 - \tilde{c}_{\lambda+\omega} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}^1 . \qquad (7.57)$$

В останньому запису

$$\tilde{g}_j^1 = \tilde{g}_{j+1}^2 = \tilde{g}_j \quad \forall j \in J_{\chi-\tau+\lambda+\omega} \setminus J_{\lambda_1}; \qquad (7.58)$$

$$\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}^1 = g_{i_{r+j}};$$

при цьому

$$c_{\beta_{r+1}} \geq \tilde{c}_{\lambda_1} \geq \tilde{c}_{\lambda_1+1} \geq \ldots \geq \tilde{c}_{\lambda-1} \geq \tilde{c}_{\lambda} \geq 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \geq \ldots \geq \tilde{c}_{\lambda+\omega}; \quad (7.59)$$

$$g_{i_{r+1}} \leq \tilde{g}_{\lambda_1} \leq \tilde{g}_{\lambda_1+1} \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda-1} \leq \tilde{g}_{\lambda} \leq \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda} \leq \ldots \leq$$

$$\leq \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+1} \leq \ldots \leq \tilde{g}_{\lambda-\tau+\chi+\omega-1} \leq g_{i_{r+j}} . \qquad (7.60)$$

Перепишемо (7.57) у вигляді:

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \tilde{c}_{\lambda_1} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_{j-1} + \sum_{j=1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} +$$

$$+\tilde{c}_{\lambda+\omega} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} - \tilde{c}_{\lambda_1} \tilde{g}_{\lambda_1} - \sum_{j=\lambda_1+1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j - \sum_{j=1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} -$$

$$-\tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+j}} . \qquad (7.61)$$

Згідно справедливості (7.59), (7.60) в різниці $\xi_j - \xi_1$ в (7.61) віднімається мінімальне значення ξ_1 лінійної функції з коефіцієнтами з множини чисел, упорядкованих за (7.59), з додаванням одного нуля між $\tilde{c}_\lambda \geq 0$ та $\tilde{c}_{\lambda+1} < 0$ на множині переставлень з $\lambda - \lambda_1 + 3 + \omega$ елементів з (7.60). (Див. теорему 3.1 з [17]). Причому віднімається ξ_1 не від мінімального значення ξ_j цієї ж функції (бо вектор значень змінних цієї функції, що дає ξ_j, не упорядковано за (7.60)).

Отже $\xi_j - \xi_1 \geq 0$, що і треба довести у випадку $C_1 A_2$.

Залишився один випадок $C_1 C_2$, до розгляду якого і переходимо.

Можливі два варіанти співвідношення $g_{i_{r+1}}$ та $g_{i_{r+j}}$: 1) $g_{i_{r+1}} \leq g_{i_{r+j}}$; 2) $g_{i_{r+1}} \geq g_{i_{r+j}}$. Оскільки $g_{i_{r+j}} \in C_1$; $g_{i_{r+1}} \in C_2$, це означає, що $c_{\beta_{r+1}} < 0$, а отже згідно правил галуження $g_{i_{r+1}} \geq g_{i_{r+j}}$, тобто перший варіант є неможливим. Маємо для $C_1 C_2$ схему, зображену на рис. 7.8.

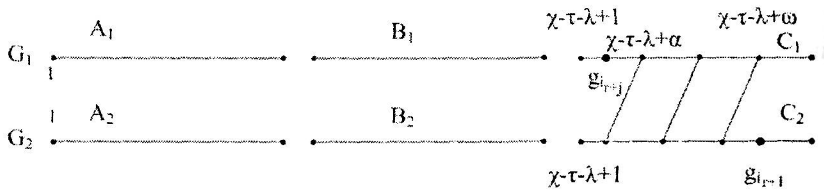


Рис. 7.8. Схема випадку $C_1 C_2$. Позначення як на інших рисунках, а α – місце від початку C_1, на якому стоїть $g_{i_{r+j}}$

Запишемо у цьому випадку вирази для ξ_1, ξ_j:

$$\xi_1 = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^1 + \sum_{j=1}^{\alpha-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 + \tilde{c}_{\lambda+\alpha} g_{i_{r+j}} +$$

$$+ \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1 + \tilde{c}_{\lambda+\omega} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega}^1 + \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}^1; \quad (7.62)$$

$$\xi_j = \nu_0 + c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j^2 + \sum_{j=1}^{\alpha-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j} + \tilde{c}_{\lambda+\alpha} g^2_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} +$$

$$+ \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j} + \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} + \sum_{j=\omega+1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j}, \qquad (7.63)$$

де

$$\tilde{g}^1_j = \tilde{g}^2_j \quad \forall j \in J_\lambda; \quad \tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j} = \tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j} \quad \forall j \in J_{\alpha-1}$$

$$\forall j \in J_{\tau-\lambda} \setminus J_\omega; \qquad (7.64)$$

α – місце від початку C_1, на якому стоїть $g_{i_{r+j}}$; ω – місце від початку C_2, на якому стоїть $g_{i_{r+1}}$; $\tilde{g}^1_{\chi-\tau+\lambda+j+1} = \tilde{g}^2_{\chi-\tau+\lambda+j} = \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}$ $\forall j \in J_{\omega-1} \setminus J_{\alpha-1}$.

При цьому маємо:

$$g_{i_{r+j}} \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha+1} \le \ldots \le \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} \le g_{i_{r+1}}; \qquad (7.65)$$

$$0 > c_{\beta_{r+1}} \ge \tilde{c}_{\lambda+\alpha} \ge \tilde{c}_{\lambda+\alpha+1} \ge \ldots \ge \tilde{c}_{\lambda+\omega-1} \ge \tilde{c}_{\lambda+\omega}. \qquad (7.66)$$

Віднімемо від рівності (7.63) рівність (7.62); при цьому в силу (7.64) треті, четверті і останні суми взаємознищуються (вони попарно однакові):

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} - c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \tilde{c}_{\lambda+\alpha}\left(\tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} - g_{i_{r+j}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j}\left(\tilde{g}_{\chi-\tau+j} + \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1}\right) + \tilde{c}_{\lambda+\omega}\left(g_{i_{r+1}} - \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1}\right) =$$

$$= c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+j}} + \tilde{c}_{\lambda+\alpha} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\alpha} + \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j} + \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} -$$

$$-\left[c_{\beta_{r+1}} g_{i_{r+1}} + \tilde{c}_{\lambda+\alpha} g_{i_{r+j}} + \sum_{j=\alpha+1}^{\omega-1} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j-1} + \tilde{c}_{\lambda+\omega} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+\omega-1} \right]. \qquad (7.67)$$

Права частина рівності (7.67) – це різниця двох значень лінійної цільової функції з коефіцієнтами з (7.66) на переставленні, що упорядковано згідно (7.65) (а це за теоремою 3.1 з [17] є мінімум) та іншим значенням (це сума в квадратних дужках), що за означенням мінімуму не менше першої суми. Отже, у випадку C_1C_2 $\xi_j \le \xi_1$, що і треба було показати в цьому разі.

Розглянуто всі випадки. Доведення завершено.

7.3. Ілюстративні приклади

Приклад 7.1. Розв'язати задачу:

$$5x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \to min$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_j = 1,$$

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{\eta\nu}^{k}(G),$$

$$G = \{0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1\}.$$

(Зазначимо, що $k = 4;\ \eta = 17;\ \nu = 10$).

Розгалужуємо множину $E_{\eta\nu}^{k}$, використовуючи порядок змінних, що відповідає упорядкуванню $c_1 = 5 > c_3 = 1 > c_2 = -1 > c_4 = -4$. При цьому для c_1, c_3 беремо значення x_1, x_3 зліва направо в G, для c_2, c_4 – справа наліво в G. Беремо $x_1 = 0{,}1$ (див. рис. 7.9).

Доданок оцінки $\nu = c_1 \cdot g_1 = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$. Оцінка $\xi = \nu + c^*$, $c^* = 1 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}9 - 4 \cdot 1 = -4{,}8$, $\xi = 0{,}5 - 4{,}8 = -4{,}3$.

Розгалужуємо вузол $x_1 = 0{,}1$ «вглиб»: беремо $x_3 = 0{,}1$ (див. рис. 7.9).

Доданок оцінки $\nu = 5 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$. Оцінка $c^* = 1 \cdot (-0{,}9) - 4 \cdot 1 = -4{,}9$, $\xi = \nu + c^* = 0{,}6 - 4{,}9 = -4{,}3$.

Розгалужуємо вузол $x_3 = 0{,}1$ «вглиб» (див. рис. 7.9).

$$x^0 = (0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}6),\ F_0 = 5 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}1 - 4 \cdot 0{,}6 = -2{,}0.$$

$$x^1=(0,1;\,0,3;\,0,1;\,0,5),\quad F_1=5\cdot 0,1-0,3\cdot 1+0,1-4\cdot 0,5=-1,7\,.$$

$$x^2=(0,1;\,0,4;\,0,1;\,0,4),\quad F_2=5\cdot 0,1-0,4+0,1-4\cdot 0,4=-1,4\,.$$

$$x^3=(0,1;\,0,5;\,0,1;\,0,3),\quad F_3=5\cdot 0,1-0,5+0,1-4\cdot 0,3=-1,1\,.$$

$$x^4=(0,1;\,0,6;\,0,1;\,0,2),\quad F_4=5\cdot 0,1-0,6+0,1-4\cdot 0,2=-0,8\,.$$

Повертаємось на другий рівень: $x_3=0,2$ (див. рис. 7.9). Доданок оцінки $\nu=0,5+0,2=0,7$. Оцінка $c^*=-1\cdot 0,9-4\cdot 1=-4,9$, $\xi=\nu+c^*=0,7-4,9=-4,2$.

Розгалужуємо вузол $x_3=0,2$ «вглиб» (див. рис. 7.9).

$$x^5=(0,1;\,0,1;\,0,2;\,0,6),\quad F_5=5\cdot 0,1-0,1+0,2-4\cdot 0,6=-1,8\,.$$

$$x^6=(0,1;\,0,2;\,0,2;\,0,5),\quad F_6=5\cdot 0,1-0,2+0,2-4\cdot 0,5=-1,5\,.$$

$$x^7=(0,1;\,0,3;\,0,2;\,0,4),\quad F_7=5\cdot 0,1-0,3+0,2-1,6=-1,2\,.$$

$$x^8=(0,1;\,0,4;\,0,2;\,0,3),\quad F_8=0,5-0,4+0,2-1,2=-0,9\,.$$

$$x^9=(0,1;\,0,5;\,0,2;\,0,2),\quad F_9=0,5-0,5+0,2-0,8=-0,6\,.$$

$$x^{10}=(0,1;\,0,6;\,0,2;\,0,1),\quad F_{10}=0,5-0,6+0,2-0,4=-0,3\,.$$

На цьому рівні все розгалужено, повертаємось на рівень 2: $x_3=0,3$ (рис. 7.9).

$$\nu=0,5+0,3=0,5\,.\quad c^*=-0,9-4=-4,9,\quad \xi=\nu+c^*=0,8-4,9=-4,1\,.$$

$$x^{11}=(0,1;\,0,1;\,0,3;\,0,5),\quad F_{11}=0,5-0,1+0,3-2=-1,3\,.$$

$$x^{12}=(0,1;\,0,2;\,0,3;\,0,4),\quad F_{12}=0,5-0,2+0,3-1,6=-1\,.$$

$$x^{13}=(0,1;\,0,3;\,0,3;\,0,3),\quad F_{13}=0,5-0,3+0,3-1,2=-0,7\,.$$

$$x^{14}=(0,1;\,0,4;\,0,3;\,0,2),\quad F_{14}=0,5-0,4+0,3-0,8=-0,4\,.$$

$$x^{15}=(0,1;\,0,5;\,0,3;\,0,1),,\quad F_{15}=0,5-0,5+0,3-0,4=-0,1\,.$$

Повернення на рівень 2: $x_3 = 0,4$ (рис. 7.9). $\nu = 0,5 + 0,4 = 0,9$. $c^* = -4,9,\ \xi = -4,0$.

$$x^{16} = (0,1;\ 0,1;\ 0,4;\ 0,4),\ F_{16} = 0,5 - 0,1 + 0,4 - 1,6 = -0,8 .$$

$$x^{17} = (0,1;\ 0,2;\ 0,4;\ 0,3),\ F_{17} = 0,5 - 0,2 + 0,4 - 1,2 = -0,5 .$$

$$x^{18} = (0,1;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,2),\ F_{18} = 0,5 - 0,3 + 0,4 - 0,8 = -0,2 .$$

$$x^{19} = (0,1;\ 0,4;\ 0,4;\ 0,1),\ F_{19} = 0,5 - 0,4 + 0,4 - 0,4 = 0,1 .$$

Повернення до x_3; $x_3 = 0,5$ (рис. 7.10). $\nu = 0,5 + 0,5 = 1$. $c^* = -4,9,\ \xi = -3,9$.

$$x^{20} = (0,1;\ 0,1;\ 0,5;\ 0,3),\ F_{20} = 0,5 - 0,1 + 0,5 - 1,2 = -0,3 .$$

$$x^{21} = (0,1;\ 0,2;\ 0,5;\ 0,2),\ F_{21} = 0,5 - 0,2 + 0,5 - 0,8 = 0 .$$

$$x^{22} = (0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 0,1),\ F_{22} = 0,5 - 0,3 + 0,5 - 0,4 = 0,3 .$$

Повернення до x_3; $x_3 = 0,6$ (рис. 7.10). $\nu = 0,5 + 0,6 = 1,1$. $c^* = -4,9,\ \xi = -3,8$.

$$x^{23} = (0,1;\ 0,1;\ 0,6;\ 0,2),\ F_{23} = 0,5 - 0,1 + 0,6 - 0,8 = 0,2 .$$

$$x^{24} = (0,1;\ 0,2;\ 0,6;\ 0,1),\ F_{24} = 0,5 - 0,2 + 0,6 - 0,4 = 0,5 .$$

Повернення до x_3; $x_3 = 0,7$ (рис. 7.10). $\nu = 0,5 + 0,7 = 1,2$. $c^* = -4,9,\ \xi = -3,7$. Всі порожні множини. Це також при інших x_3, що залишились.

Повертаємось на перший рівень: $x_1 = 0,2$ (рис. 7.11). $\nu = 0,2 \cdot 5 = 1$. $c^* = -4,8,\ \xi = -3,8$.

Другий рівень: $x_3 = 0,1$ (рис. 7.11). $\nu = 5 \cdot 0,2 + 0,1 = 1,1$. $c^* = -4,9$. $\xi = -3,8$.

$$x^{25} = (0,2;\ 0,1;\ 0,1;\ 0,6),\ F_{25} = 1,0 - 0,1 + 0,1 - 2,4 = -1,4 .$$

$$x^{26} = (0,2;\ 0,2;\ 0,1;\ 0,5),\ F_{26} = 1 - 0,2 + 0,1 - 2 = -1,1 .$$

$$x^{27}=(0,2;\,0,3;\,0,1;\,0,4),\quad F_{27}=1-0,3+0,1-1,6=-0,8.$$

$$x^{28}=(0,2;\,0,4;\,0,1;\,0,3),\quad F_{28}=1-0,4+0,1-1,2=-0,5.$$

$$x^{29}=(0,2;\,0,5;\,0,1;\,0,2),\quad F_{29}=1-0,5+0,1-0,8=-0,2.$$

$$x^{30}=(0,2;\,0,6;\,0,1;\,0,1),\quad F_{30}=1-0,6+0,1-0,4=0,1.$$

Повертаємось на другий рівень: $x_3=0,2$ (рис. 7.11). $\nu=1,2$. $c^*=-4,9$, $\xi=-3,7$.

$$x^{31}=(0,2;\,0,1;\,0,2;\,0,5),\quad F_{31}=1-0,1+0,2-2=-0,9.$$

$$x^{32}=(0,2;\,0,2;\,0,2;\,0,4),\quad F_{32}=1-0,2+0,2-1,6=-0,6.$$

$$x^{33}=(0,2;\,0,3;\,0,2;\,0,3),\quad F_{33}=1-0,3+0,2-1,2=-0,3.$$

$$x^{34}=(0,2;\,0,4;\,0,2;\,0,2),\quad F_{34}=1-0,4+0,2-0,8=0.$$

$$x^{35}=(0,2;\,0,5;\,0,2;\,0,1),\quad F_{35}=1-0,5+0,2-0,4=0,3.$$

Другий рівень: $x_3=0,3$ (рис. 7.11). $\nu=1,3$. $c^*=-4,9$, $\xi=-3,6$.

$$x^{36}=(0,2;\,0,1;\,0,3;\,0,4),\quad F_{36}=1-0,1+0,3-1,6=-0,4.$$

$$x^{37}=(0,2;\,0,2;\,0,3;\,0,3),\quad F_{37}=1-0,2+0,3-1,2=-0,1.$$

$$x^{38}=(0,2;\,0,3;\,0,3;\,0,2),\quad F_{38}=1-0,3+0,3-0,8=0,2.$$

$$x^{39}=(0,2;\,0,4;\,0,3;\,0,1),\quad F_{39}=1-0,4+0,3-0,4=0,5.$$

Другий рівень: $x_3=0,4$ (рис. 7.11). $\xi=-3,5$.

$$x^{40}=(0,2;\,0,1;\,0,4;\,0,3),\quad F_{40}=1-0,1+0,4-1,2=0,1.$$

$$x^{41}=(0,2;\,0,2;\,0,4;\,0,2),\quad F_{41}=1-0,2+0,4-0,8=0,4.$$

$$x^{42}=\left(0,2;\,0,3;\,0,4;\,0,1\right),\;\; F_{42}=1-0,3+0,4-0,4=0,7\,.$$

Другий рівень: $x_3=0,5$ (рис. 7.12). $\xi=-3,4$.

$$x^{43}=\left(0,2;\,0,1;\,0,5;\,0,2\right),\;\; F_{43}=1-0,1+0,5-0,8=0,6\,.$$

$$x^{44}=\left(0,2;\,0,2;\,0,5;\,0,1\right),\;\; F_{44}=1-0,2+0,5-0,4=0,9\,.$$

Другий рівень: $x_3=0,6$ (рис. 7.12). $\xi=-3,3$.

$$x^{45}=\left(0,2;\,0,1;\,0,6;\,0,1\right),\;\; F_{45}=1-0,1+0,6-0,4=1,1\,.$$

Перший рівень: $x_1=0,3$ (рис. 7.12). $\nu=1,5$, $c^*=-4,8$, $\xi=-3,3$.

Другий рівень: $x_3=0,1$ (рис. 7.12). $\xi=-3,3$.

$$x^{46}=\left(0,3;\,0,1;\,0,1;\,0,5\right),\;\; F_{46}=1,5-0,1+0,1-2=-0,5\,.$$

$$x^{47}=\left(0,3;\,0,2;\,0,1;\,0,4\right),\;\; F_{47}=1,5-0,2+0,1-1,6=-0,2\,.$$

$$x^{48}=\left(0,3;\,0,3;\,0,1;\,0,3\right),\;\; F_{48}=1,5-0,3+0,1-1,2=0,1\,.$$

$$x^{49}=\left(0,3;\,0,4;\,0,1;\,0,2\right),\;\; F_{49}=1,5-0,4+0,1-0,8=0,4\,.$$

$$x^{50}=\left(0,3;\,0,5;\,0,1;\,0,1\right),\;\; F_{50}=1,5-0,5+0,1-0,4=0,7\,.$$

Другий рівень: $x_3=0,2$ (рис. 13). $\xi=-3,2$.

$$x^{51}=\left(0,3;\,0,1;\,0,2;\,0,4\right),\;\; F_{51}=1,5-0,1+0,2-1,6=0\,.$$

$$x^{52}=\left(0,3;\,0,2;\,0,2;\,0,4\right),\;\; F_{52}=0,3\,.$$

$$x^{53}=\left(0,3;\,0,3;\,0,2;\,0,2\right),\;\; F_{53}=0,6\,.$$

$$x^{54}=\left(0,3;\,0,4;\,0,2;\,0,1\right),\;\; F_{54}=0,9\,.$$

Другий рівень: $x_3=0,3$ (рис. 7.13). $\xi=-3,1$.

$$x^{55} = (0,3;\ 0,1;\ 0,3;\ 0,3),\ \ F_{55} = 1,5 - 0,1 + 0,3 - 1,2 = 0,5\ .$$

$$x^{56} = (0,3;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,2),\ \ F_{56} = 0,8\ .$$

$$x^{57} = (0,3;\ 0,3;\ 0,3;\ 0,1),\ \ F_{57} = 1,1\ .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,4$ (рис. 7.13). $\xi = -3,0$.

$$F_{58} = 1,5 - 0,1 + 0,4 - 0,8 = 1,0\ .$$

$$F_{59} = 1,3\ .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,5$ (рис. 7.13). $\xi = -2,9$.

$$F_{60} = 1,5 - 0,1 + 0,5 - 0,4 = 1,5\ .$$

Перший рівень: $x_1 = 0,4$ (рис. 7.14). $\nu = 2$. $c^* = -4,8$, $\xi = -2,8$.

Другий рівень: $x_3 = 0,1$ (рис. 7.14). $\xi = -2,8$.

Третій рівень: $x_4 = 1 - \varnothing$ (рис. 7.14), $x_4 = 0,9;\ 0,8;\ 0,7;\ 0,6 - \varnothing$.

$$x^{61} = (0,4;\ 0,1;\ 0,1;\ 0,4),\ \ F_{61} = 2 - 0,1 + 0,1 - 1,6 = 0,4\ .$$

$$x^{62} = (0,4;\ 0,2;\ 0,1;\ 0,3),\ \ F_{62} > F_{61}\ .$$

$$x^{63} = (0,4;\ 0,3;\ 0,1;\ 0,2),\ \ F_{63} > F_{62}\ .$$

$$x^{64} = (0,4;\ 0,4;\ 0,1;\ 0,1),\ \ F_{64} = 2 - 0,4 + 0,1 - 0,4 = 1,3 > F_{63} > F_0\ .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,2$ (рис. 7.14). $\xi = -2,7$.

$$F_{65} = 2 - 0,1 + 0,2 - 1,2 = 0,9\ .$$

$$F_{66} = 1,2\ .$$

$$F_{67} = 1,5\ .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,3$ (рис. 7.14). $\xi = -2,6$.

$$F_{68} = 2 - 0,1 + 0,3 - 0,8 = 1,4 .$$

$$F_{69} = 1,7 .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,4$ (рис. 7.14). $\xi = -2,5$.

$$F_{70} = 2 - 0,1 + 0,4 - 0,4 = 1,9 .$$

Перший рівень: $x_1 = 0,5$ (рис. 7.15), $\xi = 2,5 - 4,8 = -2,3$.

Другий рівень: $x_3 = 0,1$ (рис. 7.15). $\xi = -2,3$.

Третій рівень: (рис. 7.15).

$$F_{71} = 2,5 - 0,1 + 0,1 - 1,2 = 1,3 .$$

$$F_{72} = 1,6 .$$

$$F_{73} = 1,9 .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,2$ (рис. 7.15). $\nu = 0,5 \cdot 5 + 0,2 = 2,7$. $c^* = -4,9$, $\xi = -2,2$.

Третій рівень: (рис. 7.15).

$$F_{74} = 2,5 - 0,1 + 0,2 - 0,8 = 1,8 .$$

$$F_{74} = 2,5 - 0,2 + 0,2 - 0,4 = 2,1 .$$

Другий рівень: $x_3 = 0,3$ (рис. 7.15). $\xi = -2,1$.

$$F_{75} = 2,5 - 0,1 + 0,3 - 0,4 = 2,3 .$$

Перший рівень: $x_1 = 0,6$ (рис. 7.15), $\nu = 3$. $c^* = -4,8$, $\xi = 3 - 4,8 = -1,8 > F_0$.

Перший рівень: $x_1 = 0,7$ (рис. 7.15), $\nu = 3,5$. $c^* = -4,8$, $\xi = -1,3$.

Отже, F_0 – розв'язок, який досягається в точці. $x^* = x^0 = \left(0,1; 0,2; 0,1; 0,6\right)$.

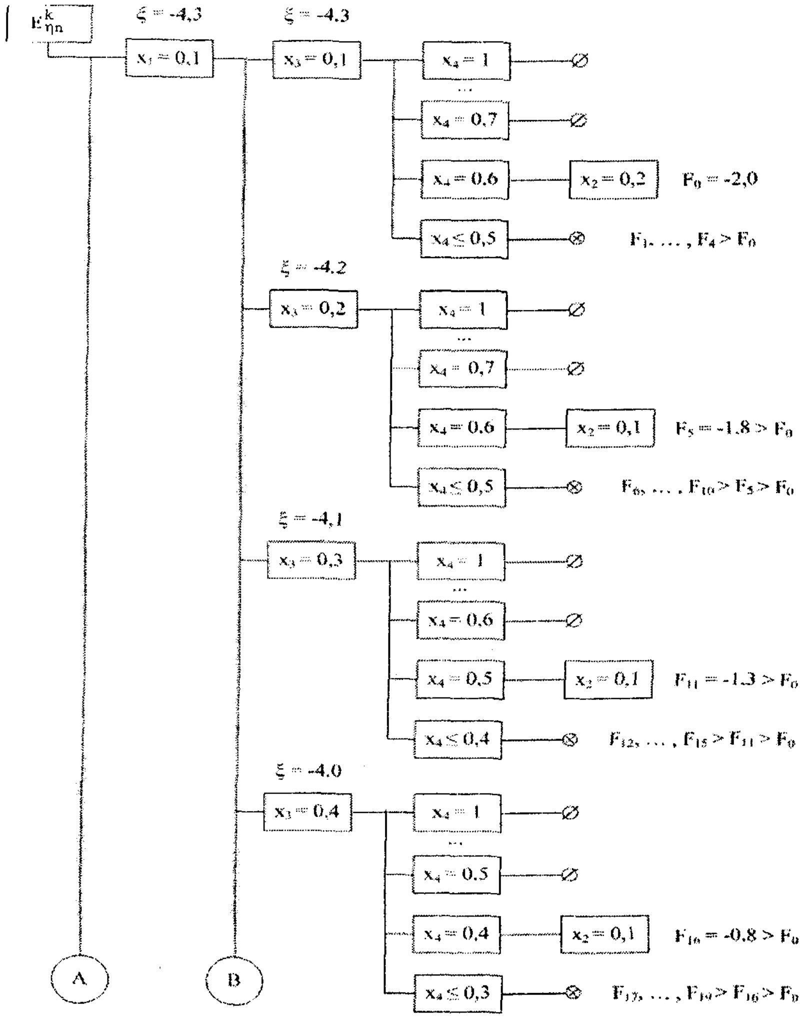


Рис. 7.9. Дерево галуження (початок), літера в колі на цьому та наступних рисунках означає розрив гілки, продовження якої на наступних рисунках. Знак ⊗ на цьому та наступних рисунках означає відсікання вершин за теоремами 7.3 та 7.2

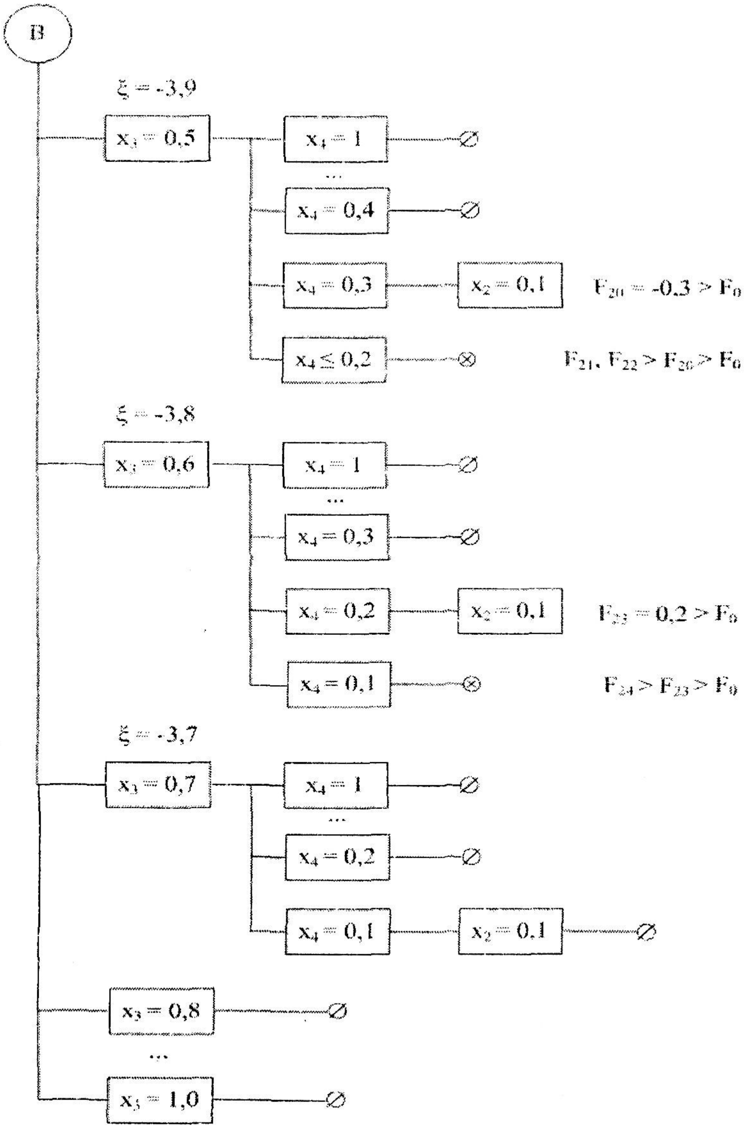


Рис. 7.10. Продовження 1 дерева галужень

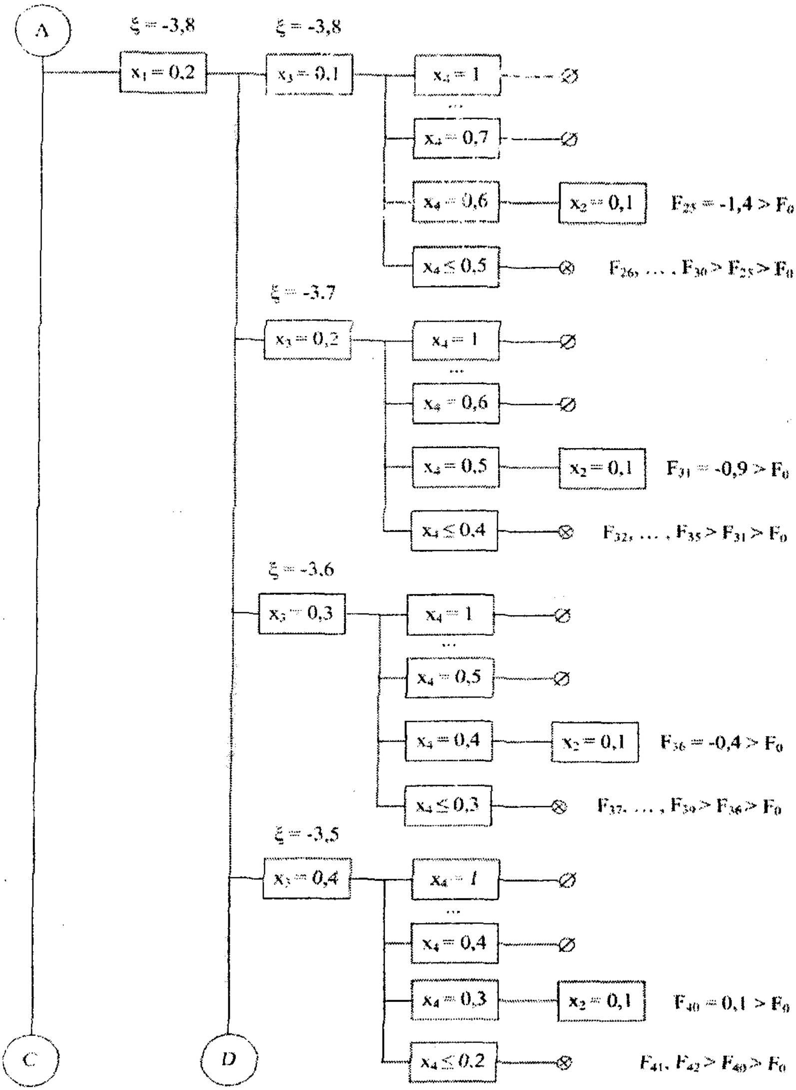


Рис. 7.11. Продовження 2 дерева галужень

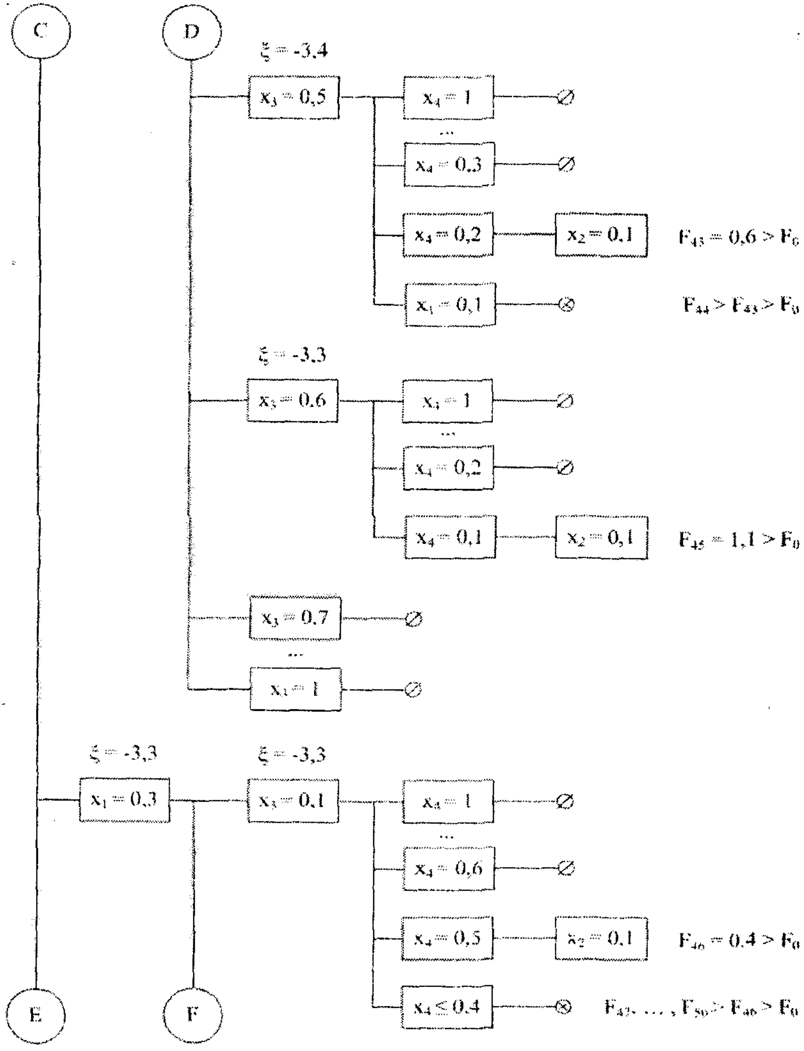


Рис. 7.12. Продовження 3 дерева галужень

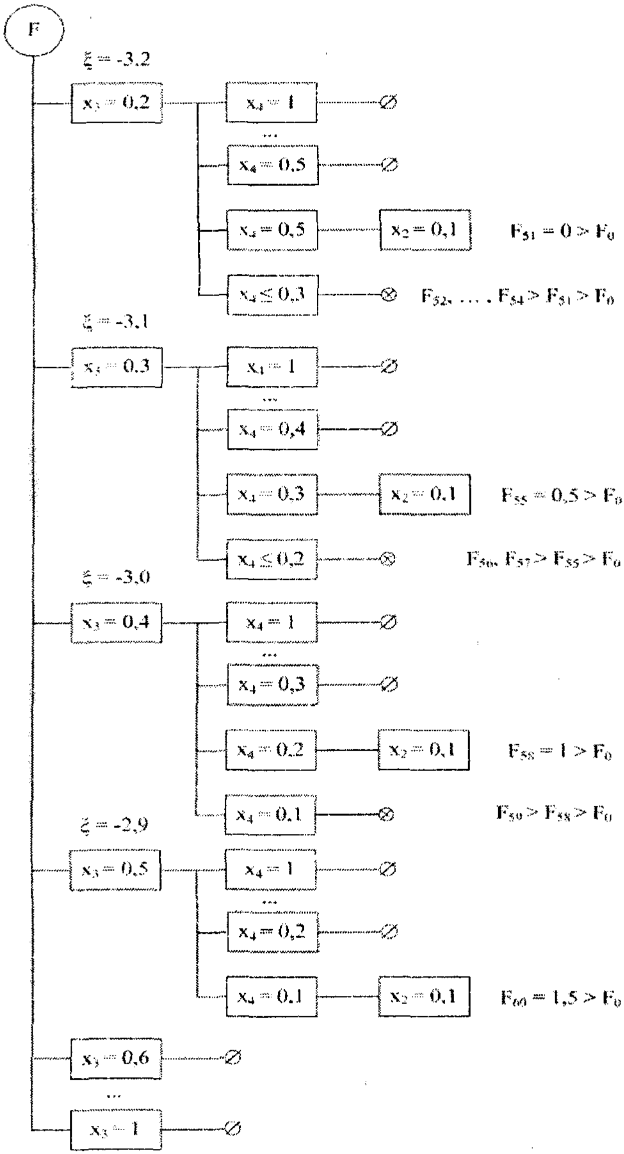


Рис. 7.13. Продовження 4 дерева галужень

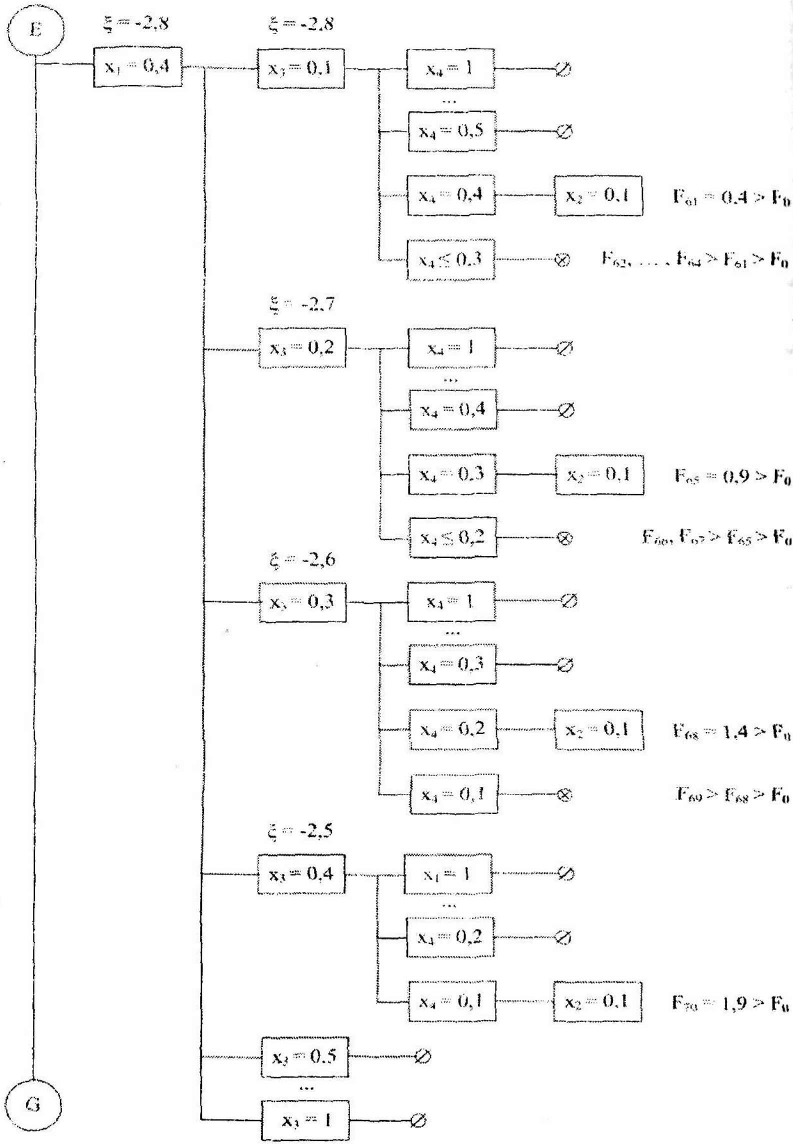


Рис. 7.14. Продовження 5 дерева галужень

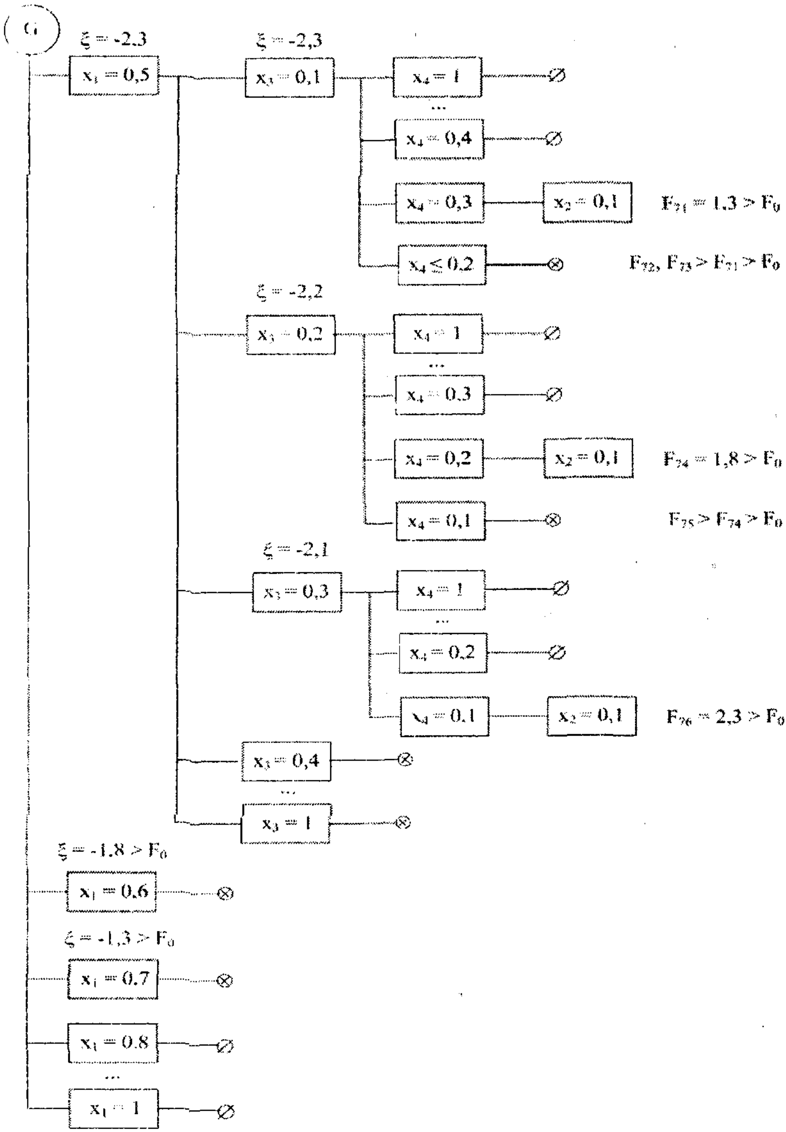


Рис. 7.15. Продовження 6 дерева галужень

Приклад 7.2. Розглянемо приклад застосування МГМ, коли спрацьовує випадок C_1C_2 з теореми 7.3.

$$-4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \to min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = C; \;\; x \in E_{55}^4(G), \;\; G = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$x_4 = 5 = x_{\beta_{r+1}}; \;\; \nu = -1 \cdot 5 = -5;$$

$$c^* = -4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -16 - 9 - 4 = -29;$$

$$\xi_1 = -5 - 29 = -34.$$

$$x_4 = 4 = x_{\beta_{r+j}}; \;\; \nu = -1 \cdot 4 = -4; \;\; c^* = -4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -33.$$

$$\xi_j = -37; \;\; \xi_1 > \xi_j.$$

Приклад 7.3. Розглянемо приклад застосування МГМ, коли спрацьовує випадок B_1A_2 з теореми 7.3.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to min$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = C; \;\; G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$(x_1, \ldots, x_4) \in E_6^4(G).$$

Галуження першого рівня:

$$x_1 = 1; \;\; \nu = 3; \;\; c^* = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 6 = 1; \;\; \xi_1 = \nu + c^* = 3 + 1 = 4.$$

$$x_1 = 4; \;\; \nu = 3 \cdot 4 = 12; \;\; c^* = 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3 - 6 = 2;$$

$$\xi_j = 12 + 2 = 14; \;\; \xi_j > \xi_1.$$

Галуження другого рівня:

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 2; \;\; \nu = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7; \;\; c^* = 3 - 6 = -3; \;\; \xi_1 = 7 - 3 = 4.$$

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 4; \;\; \nu = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11; \;\; c^* = 2 - 6 = -4;$$

$$\xi_1 = 11 - 4 = 7;\ \ \xi_j > \xi_1 .$$

Те ж саме, по-іншому викладене (див. рис. 7.16).

$$\xi_j - \xi_1 = [1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1] - [3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 6] =$$

$$= [3 + 8 + 2 - 6] - [3 + 4 + 3 - 6] = 7 - 4 = 3 .$$

$$\xi_j > \xi_1$$

	Розподіл змінних за множинами		
Визначені змінні для ξ_1	A_1	B_1	C_1
1, 2	3	4, 5	6
	Розподіл змінних за множинами		
Визначені змінні для ξ_j	A_2	B_2	C_2
1, 4	2	3, 5	6

Рис. 7.16

Приклад 7.4. Випадок B_1C_2 . Маємо:

$$\xi_j - \xi_1 = c_{\beta_{r+1}} \left(g_{i_{r+j}} - g_{i_{r+1}} \right) + \tilde{c}_{\lambda+\omega} g_{i_{r+1}} - \tilde{c}_{\lambda+1} g_{\chi-\tau+\lambda+1} .$$

$$0 > c_{\beta_{r+1}} \geq \tilde{c}_{\lambda+1} \geq \tilde{c}_{\lambda+\omega} ,$$

$$g_{i_{r+j}} \leq g_{\chi-\tau+\lambda+1} \leq g_{i_{r+1}} .$$

Нехай $c_{\beta_{r+1}} = -1$, $\tilde{c}_{\lambda+1} = -2$, $\tilde{c}_{\lambda+\omega} = -10$, $g_{i_{r+j}} = 0$, $g_{\chi-\tau+\lambda+1} = 1$, $g_{i_{r+1}} = 10$. Тоді

$$\xi_j - \xi_1 = -1 \cdot (0 - 10) + (-10) \cdot 10 - (-2) \cdot 1 = -88 < 0 .$$

Якщо маємо інші набори необхідних коефіцієнтів та елементів в G, наприклад: $c_{\beta_{r+1}}=-1$, $\tilde{c}_{\lambda+1}=-2$, $\tilde{c}_{\lambda+\omega}=-3$, $g_{i_{r+j}}=-3$, $g_{\chi-\tau+\lambda+1}=-2$, $g_{i_{r+1}}=-1$, то маємо

$$\xi_j-\xi_1=-1\cdot\left(-3-\left(-1\right)\right)-3\cdot\left(-1\right)-\left(-2\right)\cdot\left(-2\right)=1>0\,.$$

Отже, у випадку B_1C_2 можливо $\xi_j\le\xi_1$ і навпаки.

7.4. Висновки до розділу

В розділі для задач мінімізації на множині розміщень зі сталою їх сумою лінійної цільової функції для методу гілок та меж запропоновано правила галуження та оцінку допустимих підмножин. Доведено дві властивості оцінок, що дозволяють значно зменшувати кількість аналізуємих допустимих підмножин.

Результати, що викладені в розділі, представлені в [137] та можуть бути використані при розвитку методів нечіткої комбінаторної оптимізації.

РОЗДІЛ 8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МЕТОДОМ ГІЛОК ТА МЕЖ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ МІНІМІЗАЦІЇ ЗВАЖЕНОЇ ДОВЖИНИ ЗВ'ЯЗУЮЧОЇ СІТКИ

Задачі комбінаторної оптимізації дозволять все більш адекватно моделювати об'єкти, процеси, явища та системи. Одна з таких задач – задача мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні елементів – розглядалися в роботах [17, 20, 30], де запропоновані алгоритми переборного типу для її розв'язування. В роботах [13–15] до розв'язування задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях запропоновано підхід в рамках методу гілок та меж (МГМ) з ефективною процедурою оцінювання допустимих підмножин. Авторам не відомі роботи з застосування МГМ до задачі мінімізації зваженої довжини зв'язучої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів. В цьому розділі пропонується розглянути застосування МГМ до анонсованої задачі з використанням ідей робіт ([138–140]).

8.1. Постановка задачі

Нехай є n прямокутників однакових розмірів $a \times 1$, які розташовані на декартовій площині вздовж осі абсцис (рис. 8.1) в лінійку так, що сторони довжини a сусідніх прямокутників збігаються, а центр симетрії першого зліва прямокутника знаходяться в початку координат. Центри симетрії прямокутників сполучені між собою зв'язками з вагою $c_{pq} \ge 0$ $p \ne q$, $p, q \in J_n = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

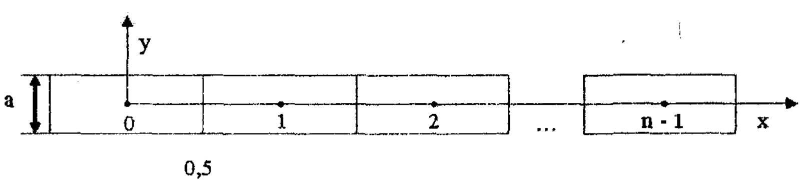


Рис. 8.1

Потрібно визначити таке розташування прямокутників, щоб зважена довжина сітки, що зв'язує центри симетрії прямокутників, мала найменше значення.

Позначимо параметри розміщення прямокутників. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – абсциси центрів симетрії прямокутників з номерами 1, …, n відповідно. Очевидно, їх ординати $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Легко бачити, що зважена довжина сітки, що зв'язує центри симетрії прямокутників, повністю визначається порядком розташування прямокутників в лінійці (рис. 8.1), тобто деяким переставленням $i = (i_1, \ldots, i_n) \in E_n(J_n)$ з множинами переставлень $E_n(J_n)$ перших n натуральних чисел $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, де i_t – номер прямокутника, який стоїть на місці t; $\forall i_t, \ t \in J_n$. Розглянемо дві рівні підстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

де в першому рядку стоять номера місць, в лінійці зліва направо (рис. 8.1), а в другому номери прямокутників, що стоять на цих місцях, тобто j_t – номер місця, на якому стоїть прямокутник з номером t; $\forall j_t, \ t \in J_n$. Тоді, очевидно, зважена довжина сітки буде визначатися функціоналом $f(j)$, який залежить від переставлення $j = (j_1, \ldots, j_n) \in E_n(J_n)$, а саме

$$f(j) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+q}^{n} c_{pq} \left| x_{j_p} - x_{j_q} \right|.$$

Параметри розміщення прямокутників x_t, $\forall t \in J_n$, очевидно, можуть приймати лише значення $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$. Це дозволяє з урахуванням співвідношення

$$x_{j_t} = j_t - 1$$

Записати $f(j)$ у вигляді:

$$f(j) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=p+1}^{n} c_{pq} \left| j_p - j_q \right|. \qquad (8.1)$$

Математична модель задачі набуває вигляду повністю комбінаторної безумовної е-задачі [17, 20] на переставленнях з опуклою цільовою функцією $f(j)$, а саме: знайти

$$f^* = f(j^*) = \min_{j \in E_n(J_n)} f(j), \tag{8.2}$$

$$j^* = arg \min_{j \in E_n(J_n)} f(j), \tag{8.3}$$

де $f(j)$ визначається співвідношенням (8.1).

З метою застосування МГМ до задачі (8.1)–(8.3) зазначимо таке. Не важко бачити, що вирази $| j_p - j_q |$ в формулі (8.1) приймають значення: 1 ($n-1$ раз). Значення 2 приймається цим виразом $n-2$ рази і т. д., значення $n-1$ приймається модулем з (8.1) один раз. Об'єднаємо всі значення в мультимножину G з основою $S(G) = (1, 2, \ldots, n-1)$ та первинною специфікацією $[G] = (n-1; n-2; \ldots; 1)$, тобто $G = \left\{1^{n-1}, 2^{n-1}, \ldots, j^{n-j}, \ldots, (n-1)^1\right\}$. Очевидно, що кількість $k = |G|$ елементів в G як кількість елементів арифметичної прогресії така: $|G| = \left[(n-1)+1\right] \times \times (n-1)/2 = 0,5n(n-1)$. Отже $k = 0,5n(n-1)$. Різних елементів в G $\nu = n-1$.

Розглянемо множину $E_{k\nu}(G)$ переставлень з мультимножини G.

Очевидно, що $\forall j \in E_n(J_n)$ $\exists x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{k\nu}(G)$ таке, що $f(j) = F(x)$, де

$$F(x) = \sum_{t=1}^{k} d_t x_t, \tag{8.4}$$

де

$$\forall p, q \in J_n \quad \exists t \in J_k; \quad d_t = c_{pq}; \quad x_t = | j_p - j_q |. \tag{8.5}$$

Легко бачити, що протилежне не вірно, тобто не для всіх $x \in E_{k\nu}(G)$ існує $j \in E_n(J_n)$, що виконується (8.4), (8.5).

Позначимо $D \subset E_{kv}(G)$ множину всіх таких переставлень $x \in E_{kv}(G)$, для яких існує переставлення $j \in E_n(J_n)$ таке, що виконується (8.4), (8.5).

Тоді задачу (8.1)–(8.3) можна записати у вигляді еквівалентної задачі: знайти

$$F^* = F(x^*) = \min_{x \in E_{kv}(G)} F(x), \tag{8.6}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{kv}(G)} F(x) \tag{8.7}$$

за умов

$$x \in D, \tag{8.8}$$

де $F(x)$ лінійна функція (8.4), а отже задача (8.4), (8.6)–(8.8) – це повністю комбінаторна умовна е-задача на переставленнях з лінійною цільовою функцією (8.4) та нелінійними додатковими обмеженнями (8.8).

Застосуємо до неї МГМ на основі підходів, розглянутих в [138–140].

8.2. Застосування методу гілок та меж

Як відомо, для організації МГМ треба визначити: 1) правила галуження допустимої множини на підмножини; 2) правила оцінювання допустимих підмножин; 3) правила відсікання безперспективних підмножин допустимих розв'язків.

1. Правила галуження допустимої підмножини

Дерево галуження матиме від кореня $n-1$ рівень зі зростанням номерів від кореня (рівень 0) по гілкам листів. Галуження відбуватиметься «вглиб» з рівня l на рівень $l+1$. А якщо це не можливо, то «вшир» – до нової множини поточного l (чи вершиною $l-1$) рівня.

Для ілюстрації дій зручно користуватись прикладом, умова якого наведена далі.

Приклад 8.1. Нехай $n=5;$ наддіагональна матриця зв'язків, наведена на рис. 8.2.

Для вибору порядку змінних при галуженні множини допустимих розв'язків упорядкуємо коефіцієнти c_{pq} (те ж саме d_t) цільових функцій (8.1), (8.4):

$$d_{\tau_1} \le d_{\tau_2} \le \ldots \le d_{\tau_k}, \qquad (8.9)$$

а елементи g_t, $t \in J_k$, мультимножини G вважаємо упорядкованими так:

$$g_1 > g_2 \ge \ldots \ge g_k. \qquad (10)$$

p \ q	1	2	3	4	5
1	×	1	5	4	7
2		×	2	9	3
3			×	8	6
4				×	10
5					×

Рис. 8.2. Умова прикладу: вага зв'язків

Допустимі підмножини першого рівня визначаються заданням змінній x_{τ_1} першого підходящого в порядку (8.10) значення $g_{t_1} = n-1$; $t_1 \in J_k$. При цьому утворюється множина $\tilde{G} = G - \{g_{t_1}\}$. Допустиму підмножину, що утворилась, позначимо $D_{t_1}^{\tau_1}$.

Для прикладу див. рис. 8.3. Врахуємо $d_{\tau_1} = 1 < d_{\tau_2} = 2 < d_{\tau_3} = 3 < \ldots \le d_{\tau_{10}} = 10$. Зрозуміло, що $g_1 = 4$; $g_2 = g_3 = 3$; $g_4 = g_5 = g_6 = 2$; $g_7 = g_8 = g_9 = g_{10} = 1$.

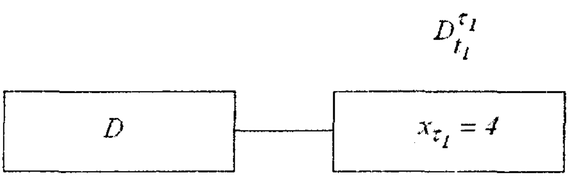


Рис. 8.3. Приклад утворення $D_1^{\tau_1}$

Зручно інтерпретувати допустиму підмножину $D_1^{\tau_1}$ в термінах вихідної задачі. Розглянемо матрицю, в якій над головною діагоналлю стоять значення $|\, j_p - j_q \,|$ для $j = (1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, тобто $j_p = p,\ \ j_q = q\ \ \forall p, q \in J_n$. Для прикладу – це на рис. 8.4.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q p	1	2	3	4	5
1	1		1	2	3	4
2	2			1	2	3
3	3				1	2
4	4					1
5	5					

Рис. 8.4

Вибір $g_1 = 4$ означає вибір для $c_{pq} = 1 = d_{\tau_1}$ $\ j_p = 1;\ \ j_q = 5$ та $p = 1;\ \ q = 2$ (або $p = 2;\ \ q = 1$) та ($p = 5;\ \ j_q = 1$).

Тобто вибір τ_1 означає вибір $c_{12} = 1$ та $|\, j_1 - j_2 \,| = 4$. Це зручно показати рисунком 8.5. (Зауважимо, що з рисунків 8.5 та 8.2 видно, що в рядку $j_q = 1$ можуть стояти тільки 2, 9, 3 (див. рядок 2 на рис. 8.2)). При цьому рис. 8.3 відповідає рис. 8.6.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q p	2			3	1
1	2					1
2						
3						
4						
5	1					

Рис. 8.5

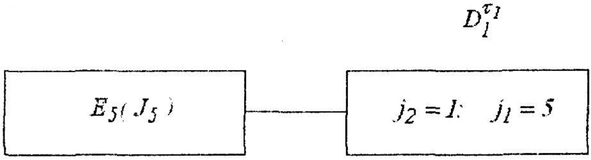


Рис. 8.6. Означення D_1^{τ} в термінах вихідної задачі

Наступний рівень галуження відповідає d_{τ_2} з (8.9). З $D_1^{\tau_1}$ утворюється $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2}$ (а взагалі $D_{i_1\,i_2}^{\tau_1\tau_2}$) $x_{\tau_2} = g_{i_2} = n-2$ (для $D_1^{\tau_1}$ $x_{\tau_2} = g_2$), якщо це можливо.

Третій рівень галуження відповідає d_{τ_3} з (8.9), для якого можливо призначити $x_{\tau_3} = g_{i_3} = n-3$ і т. д.

Для прикладу маємо: $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2}$: $x_{\tau_2} = 3$ d_{τ_2} $p = 2;$ $q = 3$ $c_{23} = 2$ $j_p = 4;$ $j_q = 1$ ($j_3 = 4;$ $j_2 = 1$). Це також означає $c_{31} = 5$ при $j_p = 4;$ $j_p = 5$.

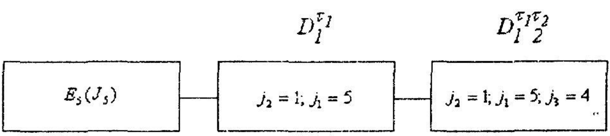


Рис. 8.7. Ілюстрація $D_{1\,2}^{\tau_1\tau_2}$

Далі для $D_{1\,2\,3}^{\tau_1\tau_2\tau_3}$ визначаються $x_{\tau_3} = n-3 = 2$ в рядку $q = 2$ ($j_q = 1$). Судячи з рис. 8.2, можливо $d_{\tau_3^3} = d_{\tau_3} = 3$ (рис. 8.9).

Отже, на першому рівні визначається один доданок в (8.1) та (8.4), на другому 2, на третьому 3, на четвертому 4, …, на ($n-1$)-му рівні $n-1$ доданок. Останній ($n-1$)-ий рівень однозначно визначається на ($n-2$)-му рівні. Тому фактично рівнів галуження $n-2$ (рис. 8.10).

j_p	q \ p	2			3	1
1	2	×			2	1
2			×			
3				×		
4	3				×	5
5	1					×

Рис. 8.8. Заповнення для $D_{1\ 2}^{\tau_1\tau_2} = Q_{213}^{154}$

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q \ p	2	4	5	3	1
1	2	×	9	3	2	1
2	4		×	10	8	4
3	5			×	6	7
4	3				×	5
5	1					×

Рис. 8.9. Заповнення для $D_{1\ 2\ 3}^{\tau_1\tau_2\tau_3}$

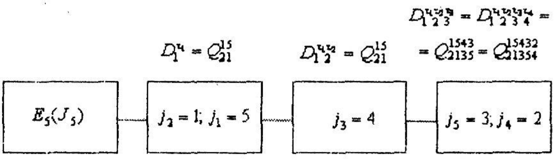


Рис. 8.10. Розгалуження вглиб до «листа»

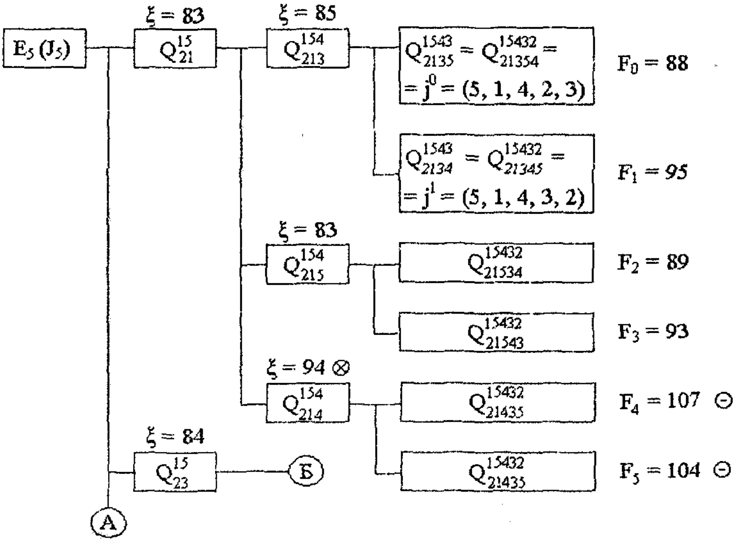


Рис. 8.11. Фрагмент дерева

Множина $D^{\tau_1\tau_2\tau_3}_{1\ 2\ 3} = D^{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}_{1\ 2\ 3\ 4}$ – це одноелементна множи-наперествлення $j_0 = (2, 4, 5, 3, 4) = (5, 1, 4, 2, 3)$ $f\left(j^0\right) = F_0 = = 1\cdot(9+10++6+5)+2(3+8+7)+3(2+4)+1\cdot 4 = 88$. Таким чином, j^0 – допустимий розв'язок, а F_0 – значення цільової функції на ньому.

При галуженні «вшир» на третьому рівні ($l = 3$) маємо $D^{\tau_1\tau_2\tau_3}_{1\ 2\ i_3} = Q^{1543}_{2134} = Q^{15432}_{21345} = j^1 = (5, 1, 4, 3, 2)$; $F_1 = f\left(j^1\right) = 4\cdot 1 + 3(2+7) + +2(9+6+4)+1(3+10+8+5) = 95$.

При повертанні на верхній рівень ($l = 2$) маємо $D^{\tau_1\tau_2\tau_3^3}_{1\ i_2\ i_3} = Q^{154}_{215}$, оскільки $c_{pq} = 3$, елемент вихідної матриці зв'язків є $d_{\tau_3} = c_{25}$. Його ставимо в клітинку з $x_{\tau_3} = 2$, це клітина в стовпці $j_q = 4$, де $q = 5$ в рядку $j_p = 1$; $p = 2$ (див. рис. 8.13). Одержуємо

$Q_{21534}^{15432} = j^2 = (5, 1, 3, 2, 4)$; $F_2 = f(j^2) = 4 \cdot 1 + 3(3+4) + 2(2+10+5) +$ $+1(9+8+6+7) = 89$.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	2	5	4	3	1
1	2		3	9	2	1
2	5			10	6	7
3	4				8	4
4	3					5
5	1					

Рис. 8.12. Заповнення для $j^1 = (5, 1, 4, 3, 2)$

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	2	4	3	5	1
1	2		9	2	3	1
2	4			8	10	4
3	3				6	5
4	5					7
5	1					

Рис. 8.13. Ілюстрація для Q_{215}^{154}, Q_{21534}^{15432}

$$j^3 = Q_{21543}^{15432} = (5, 1, 2, 3, 4);$$

$$F_3 = f(j^3) = 1 \cdot 4 + 3(3+5) + 2(9+6+4) + 1(2+8+10+7) = 93.$$

$$j^4 = (5, 1, 3, 4, 2); \quad j^5 = (5, 1, 2, 4, 3).$$

$$F_4 = f(j^4) = 1 \cdot 4 + 3(9+7) + 2(2+10+5) + 1(3+6+8+4) = 107.$$

$$F_5 = f(j^5) = 1 \cdot 4 + 3(9+5) + 2(3+8+7) + 1(2+6+10) = 104.$$

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	2	3	4	5	1
1	2	X	2	9	3	1
2	3		X	8	6	5
3	4			X	10	4
4	5				X	7
5	1					X

Рис. 8.14. Ілюстрація для Q_{21543}^{15432}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	2	5	3	4	1
1	2	X	3	2	9	1
2	5		X	6	10	7
3	3			X	8	5
4	4				X	4
5	1					X

Рис. 8.15. Ілюстрація для Q_{214}^{154} та $Q_{21435}^{15432} = j^4$

Всі можливі галуження множини Q_{21}^{15} використано, на рівні $l=1$ розгалужуємо «вшир». Тобто розглядаємо всі розв'язки, в яких в (8.4) є доданок $d_{\tau_2} = g_1 = 2 \cdot 4$. Ці розв'язки утворюються множину, що визначається $c_{pq} = 2 = c_{23}$, отже (див. рис. 8.17) маємо множину Q_{21}^{15}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	2	3	5	4	1
1	2		2	3	9	1
2	3			6	8	5
3	5				10	7
4	4					4
5	1					

Рис. 8.16. Ілюстрація для $Q_{21435}^{15423} = j^5$

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	2	4	5	1	3
1	2		9	3	1	2
2	4			10	4	8
3	5				7	6
4	1					5
5	3					

Рис. 8.17. Ілюстрація для Q_{23}^{15}, Q_{231}^{154} та Q_{23154}^{15432}

2. Правила оцінювання допустимих підмножин

Як відомо, число $\xi(D)$ може слугувати оцінкою допустимої підмножини D в задачі мінімізації $F(x)$, якщо $F(x) \geq \xi(D)$ $\forall x \in D$.

При визначенні деякої підмножини Q згідно правил галуження відбувається визначення певної множини змінних $x_{\pi_1}, \ldots, x_{\pi_t} \in X_B \subset D$ в задачі (8.4)–(8.8) при змінних з коефіцієнтами $d_{\pi_1}, \ldots, d_{\pi_t}$ шляхом набуття значень $g_{\pi_1}, \ldots, g_{\pi_t} \in G_B \subset G$, тобто $x_{\pi_\alpha} = g_{\pi_\alpha}$ $\forall \alpha \in J_t$. Позначимо $\tilde{G} = G - G_B = \{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}\}_r$, $\tilde{C} = \{d_1, \ldots, d_k\} - \{d_{\pi_1}, \ldots, d_{\pi_t}\} = \{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\tau\}$, нехай $k - t = \tau$, очевидно $|\tilde{G}| = |\tilde{C}| = \tau$. Нехай елементи $\tilde{C}$ та $\tilde{G}$ пронумеровані так:

$$\tilde{c}_1 \geq \ldots \geq \tilde{c}_\tau; \tag{8.11}$$

$$\tilde{g}_1 \leq \ldots \leq \tilde{g}_\tau. \tag{8.12}$$

Теорема 8.1. За оцінку $\xi(D)$ може деякої підмножини Q допустимих розв'язків одержаної згідно описаних правил галуження а задачі (8.4)–(8.8), може слугувати величина

$$\xi(Q) = \xi = \nu + c^*; \tag{8.13}$$

$$\nu = \sum_{p=1}^{t} d_{\pi_p} g_{\pi_p}; \tag{8.14}$$

$$c^* = \sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{g}_q \tag{8.15}$$

при виконанні умов (8.11), (8.12).

Доведення. Позначимо $\tilde{X} = \{x_1, \ldots, x_k\} - X_B = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\tau\}$. Причому нумерація змінних в множині $\tilde{X}$ без обмеження загальності нехай така, що змінна $\tilde{x}_q$ має коефіцієнт $\tilde{c}_q$ в (8.4). Тоді $\forall x \in Q$ за (8.4)

$$F(x) = \sum_{p=1}^{k} d_p x_p = \sum_{p=1}^{t} d_{\pi_p} x_{\pi_p} + \sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{x}_q \tag{8.16}$$

Перша сума в (8.16) є сталою за (8.14).

$$\nu = \sum_{p=1}^{k} d_p x_p = const,$$

а друга сума в (8.16) $\sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{x}_q$ – це значення лінійної функції на певному переставленні.

$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\tau) \in E_{\tau\tilde{\nu}}(\tilde{G})$ з елементів мультимножини $\tilde{G}$, серед яких $\tilde{\nu}$ різних.

Згідно з наслідком з теореми 3.1. з [17] (який збігається з теоремою 368 з [141]) за умов (8.11), (8.12)

$$\sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{x}_q \geq \min_{\tilde{x} \in E_{\tau\tilde{\nu}}(\tilde{G})} \sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{x}_q = \sum_{q=1}^{\tau} \tilde{c}_q \tilde{g}_q = c^*. \qquad (8.17)$$

Отже з (8.16), (8.17) маємо:

$$F(x) \geq \nu + c^*, \qquad (8.18)$$

тобто число ξ, що стоїть в правій частині нерівності (8.18):

$$\xi = \nu + c^*.$$

Можна використовувати в якості оцінки $\xi(Q)$ допустимої підмножини Q в задачі (8.1)–(8.4) при розв'язуванні її МГМ, бо $\forall x \in Q \;\; \xi(Q) \leq F(x)$. Що і треба було довести.

Підрахуємо оцінки для підмножини з рис. 8.11. Зауважимо при цьому, що оцінки «листів» дерева збігаються зі значенням цільової функції для листа. Оцінку множини $\xi(Q)$ на рисунку будемо позначати ξ біля зображення множини.

Знайдемо $\xi(Q_{21}^{1}) = \nu + c^* = \nu_{21}^{15} + c_{21}^{15}$; $\nu^* = \nu_{21}^{15} = 1 \cdot 4$; $c^* = c_{21}^{15} = (\tilde{c}, \tilde{g})$, де $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$, тобто $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 10 + 8 + 9 + 6 = 79$. $\xi(Q_{21}^{15}) = 83$.

Обчислимо $\xi\left(Q_{213}^{154}\right)=\nu+c^*=\nu_{213}^{154}+c_{213}^{154};$ к добре видно з рис. 8.8 $\nu_{231}^{154}=4\cdot1+2\cdot3+5\cdot1=15;$ $c^*=\left(\tilde{c},\tilde{g}\right)$, де $\tilde{c}=\left(10,9,8,7,6,5,4,3\right)$, $\tilde{g}=\left(1,1,1,2,2,2,3\right);$ $c^*=10+9+8+14+12+8+9=70$. $\xi\left(Q_{213}^{154}\right)=$ $=15+70=85$.

Підрахуємо $\xi\left(Q_{215}^{154}\right)=\nu_{215}^{154}+c_{215}^{154}$. Як видно з рис. 8.13 $\nu=\nu_{215}^{154}=$ $=4\cdot1+3\cdot3+7\cdot1=20;$ для $c_{215}^{154}=\left(\tilde{c},\tilde{g}\right)=c^*;$ де $\tilde{c}=\left(10,9,8,6,5,4,2\right);$ $\tilde{g}=\left(1,1,1,2,2,2,3\right);$ $c^*=10+9+8+12+10+8+6=63;$ $\xi\left(Q_{215}^{154}\right)=$ $=\nu+c^*=20+63=83$.

Визначимо $\xi\left(Q_{214}^{154}\right)=\nu_{214}^{154}+c_{214}^{154}$. Як видно з рис. 8.15 $\nu=\nu_{213}^{154}=$ $=1\cdot4+9\cdot3+4\cdot1=8+27=35$. $c^*=c_{214}^{154}=\left(\tilde{c},\tilde{g}\right)$, де $\tilde{c}=\left(10,8,7,6,5,3,2\right);$ $\tilde{g}=\left(1,1,1,2,2,2,3\right);$ $c^*=10+8+7+12+10+6+6=59;$ $\xi\left(Q_{214}^{154}\right)=$ $=\nu+c^*=35+59=94$.

Вставимо $\xi\left(Q_{23}^{15}\right)=\nu_{23}^{15}+c_{23}^{15}$. Як очевидно з рис. 8.17, $\nu=\nu_{23}^{15}=2\cdot4=8;$ $c^*=c_{23}^{15}=\left(\tilde{c},\tilde{g}\right)$, де $\tilde{c}=\left(10,9,8,7,6,5,4,3,1\right);$ $\tilde{g}=\left(1,1,1,1,2,2,2,3,3\right);$ $c^*=10+9+8+7+12+8+9+3=76$, отже $\xi\left(Q_{23}^{15}\right)=\nu+c^*=8+76=84$.

3. Правила відсікання безперспективних множин допустимих розв'язків

Пропонується використовувати класичне правило відсікання МГМ: якщо $\xi(Q)\geq F_0$, де F_0 – поточний рекорд, то Q – безперспективна і відсікається. Якщо $F_t<F_0$, то рекорд оновлюється і стає рівним F_t: $F_0:=F_t$. Після цього перевіряється правило відсікання для всіх нерозгалужених вершин (бруньок).

Таким чином, з рис. 8.11 видно, що множину Q_{214}^{154} не треба розгалужувати, а треба відсікати як безперспективну, оскільки її оцінка $\xi=91>F_0=88$.

Продовження ілюстративного прикладу

Закінчимо розв'язування прикладу МГМ (див. рис. 8.18 (а), (б)).

Розгалужуємо Q_{23}^{15}, утворюємо Q_{231}^{154}. Рахуємо $\xi = \nu + c^*$. З рис. 8.17 видно $\nu = 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 5\cdot 1 = 16$; $c^* = (\tilde{c}, \tilde{g})$, де $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 4, 3)$, $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 12 + 8 + 9 = 70$; $\xi = 16 + 70 = 86 < F_0 = 88$. Множину треба розгалужувати далі «вглиб». Одержуємо $Q_{23514}^{15432} = j^6$; $F_6 = 2\cdot 4 + 3(1+8) + 2(3+4+6) + 1(9+10+7+5) = 92 > F_0$. Рекорд не оновлюється.

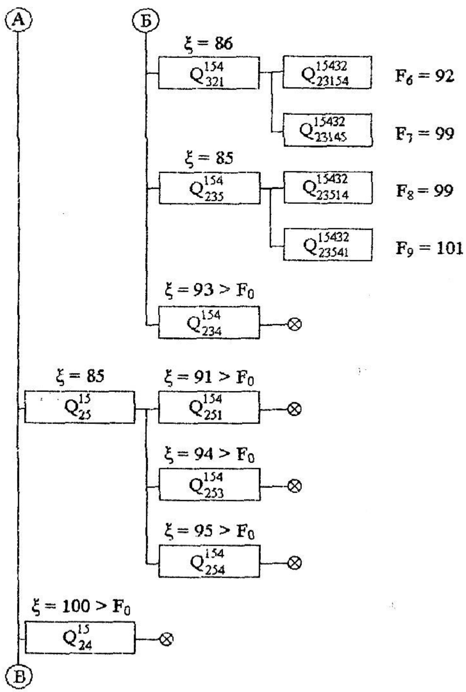


Рис. 8.18 (а). Частина схеми МГМ (продовження рис. 8.11) для прикладу

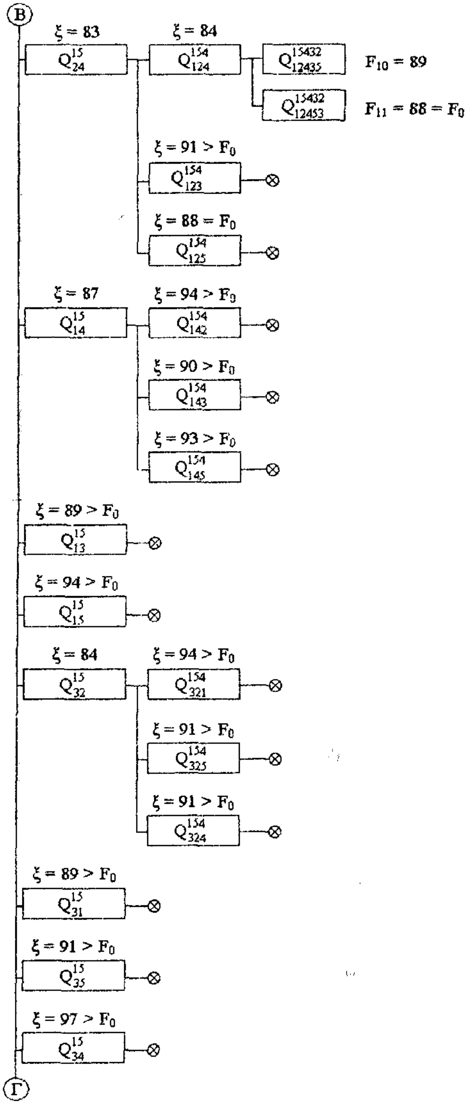


Рис. 8.18 (б). Частина схеми МГМ (продовження рис. 8.11) для прикладу

На цьому рівні утворюємо $Q_{23145}^{15432} = j^7$ (див. рис. 8.19). $F_7 = 4 \cdot 2 + 3(1+6) + 2(9+7+8) + 1(3+10+4+5) = 99 > F_0$. Рекорд не оновлюється.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	2	5	4	1	3
1	2		3	9	1	2
2	5			10	7	6
3	4				4	8
4	1					5
5	3					

Рис. 8.19. Ілюстрація для Q_{23514}^{15432}

З рис. 8.20 видно: для $\xi\left(Q_{235}^{154}\right) = v_{235}^{154} + c_{235}^{154}$, величина $v = v_{235}^{154} = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = v_{235}^{154} + 23$; $c^* = c_{235}^{154} = (\tilde{c}, \tilde{g})$, де $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 1)$, $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 10 + 8 + 3 = 62$; $\xi = v + c^* = 23 + 62 = 85 < F_0$. Множину треба розгалужувати далі («вглиб»). Утворюємо $Q_{23514}^{15432} = j^8$; $F_8 = 4 \cdot 2 + 3(3+8) + 2(1+10+5) + 1(9+4+7+6) = 99 > F_0$. Рекорд не оновлюється. Утворюємо $Q_{23541}^{15432} = j^9$ (див. рис. 8.21).

$F_9 = 2 \cdot 4 + 3(3+5) + 2(9+7+8) + 1(1+4+10+6) = 101 > F_0$; рекорд не оновлюється. Повертаємося на рівень $l = 2$. Утворюємо Q_{234}^{154} (рис. 8.22). $\xi = v + c^*$; $v = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 1 = 16 + 27 = 43$; $c^* = (\tilde{c}, \tilde{g})$, $\tilde{c} = (10, 7, 6, 5, 4, 3, 1)$, $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 3 = 50$; $\xi = 93 > F_0$. Вершина відсікається як неперспективна (знак $\otimes$ на рис. 8.18).

Піднімаємось на рівень $l = 1$, утворюємо Q_{25}^{15} (рис. 8.23).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	2	4	1	5	3
1	2	$\times$	9	1	3	2
2	4		$\times$	4	10	8
3	1			$\times$	7	5
4	5				$\times$	6
5	3					$\times$

Рис. 8.20. Ілюстрація для Q_{235}^{154}, Q_{23514}^{15432}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	2	1	4	5	3
1	2	$\times$	1	9	3	2
2	1		$\times$	4	7	5
3	4			$\times$	10	8
4	5				$\times$	6
5	3					$\times$

Рис. 8.21. Ілюстрація для Q_{23541}^{15432}

Рахуємо для неї $\xi = \nu + c^*$; $\nu = 3 \cdot 4 = 12$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 10 + 8 + 6 + 3 = 73$; $\xi = 12 + 73 = 85 < F_0$, отже множину Q_{25}^{15} треба розгалужувати. Утворюємо Q_{234}^{154}, для неї $\xi = \nu + c^*$;

$\nu = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 22;$ $c^* = (\tilde{c}, \tilde{g}),$ де $\tilde{c} = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 2)$, $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3);$ $c^* = 10 + 9 + 8 + 12 + 10 + 8 + 12 = 69;$ $\xi = 22 + 69 = 91 > F_0$. Множину Q_{234}^{154} відсікаємо. На цьому ж рівні утворюємо Q_{253}^{154}, роблячи галуження «вшир» (рис. 8.24).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	2			4	3
1	2				9	2
2						
3						
4	4					8
5	3					

Рис. 8.22. Множина Q_{234}^{154}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	2			1	5
1	2				1	3
2						
3						
4	1					7
5	5					

Рис. 8.23. Множини Q_{25}^{15}; Q_{251}^{154}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	2			3	5
1	2				2	3
2						
3						
4	3					6
5	5					

Рис. 8.24. Множина Q_{253}^{154}

$\xi = \xi\left(Q_{253}^{154}\right) = \nu + c^*$; з рис. 8.24 очевидно: $\nu = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24$; для $c^* = (\tilde{c}, \tilde{g})$ маємо $\tilde{c} = (10, 9, 8, 5, 4, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$, отже $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 10 + 8 + 3 = 70$; $\xi = 24 + 70 = 97 > F_0$. Це означає, що множину Q_{253}^{154} відсікають. На цьому ж рівні утворюємо Q_{254}^{154} (рис. 8.25).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	2			4	5
1	2				9	3
2						
3						
4	4					10
5	5					

Рис. 8.25. Множина Q_{254}^{154}

$\xi = \xi\left(Q_{254}^{154}\right) = \nu + c^*$. З рис. 8.25 очевидно: $\nu = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 49$. Для $c^* = (\tilde{c}, \tilde{g})$ маємо: $\tilde{c} = (8, 7, 6, 5, 4, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; отже $c^* = 8 + 7 + 6 + 10 + 8 + 4 + 3 = 46$, а $\xi = 49 + 46 = 95 > F_0$. Отже, підмножина відсікається. Оскільки утворені всі підмножини на цьому рівні, то піднімаємося на рівень вгору і утворюємо там наступну множину Q_{24}^{15} (рис. 8.26).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	2				4
1	2					9
2						
3						
4						
5	4					

Рис. 8.26. Множина Q_{24}^{15}

Підрахуємо $\xi = \xi\left(Q_{24}^{15}\right) = \nu + c^*$; з рис. 8.26 очевидно: $\nu = 9 \cdot 4 = 36$, для c^* маємо $\tilde{c} = (10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$, отже $c^* = 10 + 8 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 64$. Отже $\xi = 36 + 64 = 100 > F_0$ і множина відсікається. На цьому рівні утворюємо нову підмножину. Утворимо підмножину, взявши $d_1 = 1 = c_{12}$ для $g_1 = 4$; $p = 1$; $q = 5$. Отримаємо Q_{12}^{15} (рис. 8.27).

$\xi = \xi\left(Q_{124}^{154}\right) = \nu + c^*$; $\nu = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 25$; $\tilde{c} = (10, 8, 7, 6, 5, 3, 2)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$. $c^* = 10 + 8 + 7 + 12 + 10 + 6 + 6 = 59$; $\xi = 25 + 59 = 84 < F_0$. Розгалужуємо далі до Q_{1243}^{1543}, а отже до $Q_{12435}^{15432} =$

$= j^{10} = (1,5,3,4,2)$, $F_{10} = 4 \cdot 1 + 3(4+3) + 2(5+10+2) + 1(7+6+8+9) = 89 > F_0$. Рекорд не оновлюється. Утворюємо $Q_{12453}^{15432} = j^{11} = (1,3,5,4,2) = i^{11}$ (рис. 8.28); $F_{11} = 4 \cdot 1 + 3(4+2) + 2(7+8+3) + 1(5+6+10+9) = 88 = F_0$. Рекорд не оновлюється. (Це симетричне до i^0 розташування). Повертаємося на рівень $l = 2$, утворюємо (рис. 8.29) Q_{123}^{154}: $\nu = 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 21$; $\tilde{c} = (10,9,8,7,6,4,3)$; $\tilde{g} = (1,1,1,2,2,2,3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 18 + 8 + 9 = 70$; $\xi = 21 + 70 = 91 > F_0$; відсікаємо.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	1	5	3	4	2
1	1	╳	7	5	4	1
2	5		╳	6	10	3
3	2			╳	8	2
4	4				╳	9
5	2					╳

Рис. 8.27. Множини Q_{12}^{15}; Q_{124}^{154}; j^{10}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	1	3	5	4	2
1	1	╳	5	7	4	1
2	3		╳	6	8	2
3	5			╳	10	3
4	4				╳	9
5	2					╳

Рис. 8.28. Множина $j^{11} = Q_{12453}^{15432}$

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q \ p	1			3	2
1	1	X			5	1
2			X			
3				X		
4	3				X	2
5	2					X

Рис. 8.29. Множина Q_{123}^{154}

Утворюємо (рис. 8.30) Q_{123}^{154}: $\xi = \nu + c^*$; $\nu = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 34$; $\tilde{c} = (10, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $c^* = 10 + 8 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 = 54$; $\xi = 88 = F_0$; відсікаємо.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q \ p	1			5	2
1	1	X			7	1
2			X			
3				X		
4	5				X	9
5	2					X

Рис. 8.30. Множина Q_{125}^{154}

Оскільки $p = 2$ вже не можливе, то вибираємо наступну d_r за (8.10), це $d_4 = 4 = c_{14}$ як коефіцієнт біля $g_1 = 4$ з (8.10). Отже, маємо Q_{14}^{15}. $\xi=\xi\left(Q_{14}^{15}\right)=\nu+c^*$, де (див. рис. 8.31) $\nu=4\cdot4=16$, а $c^*=(\tilde{c},\tilde{g})$, $\tilde{c}=(10,9,8,7,6,5,3,2,1)$; $\tilde{g}=(1,1,1,1,2,2,2,3,3)$; $c^*=10+9+8+7+12+10+6+6+3=71$. $\xi=87<F_0$, отже, цю множину розгалужуємо далі, утворюючи Q_{142}^{154}. $\xi=\xi\left(Q_{141}^{154}\right)=\nu+c^*$; $\nu=4\cdot4+3\cdot1+9\cdot1=28$; $\tilde{c}=(10,8,7,6,5,3,2)$, $\tilde{g}=(1,1,1,2,2,2,3)$; $c^*=10+8+7+12+10+6+3=56$; $\xi=28+56=94>F_0$, множина відсікається.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q \ p	1			2	4
1	1				1	4
2						
3						
4	2					9
5	4					

Рис. 8.31. Множини Q_{14}^{15}; Q_{142}^{154}

$\xi=\xi\left(Q_{143}^{154}\right)=\nu+c^*$, з рис. 8.32 $\nu=4\cdot4+5\cdot3+8\cdot1=39$, для c^* $\tilde{c}=(10,9,7,6,3,2,1)$, $\tilde{g}=(1,1,1,2,2,2,3)$; $c^*=10+9+7+12+$ $+10+6+4+3=51$; $\xi=90>F_0$, множина відсікається.

Утворюємо Q_{145}^{154}; для неї з рис. 8.33 бачимо: $\nu=4\cdot4+$ $+7\cdot3+10\cdot1=47$; $\tilde{c}=(9,8,6,5,3,2,1)$; $\tilde{g}=(1,1,1,2,2,2,3)$, $c^*=(\tilde{c},\tilde{g})=$ $=9+8+6+10+4+3=46$; $\xi=93>F_0$, множина відсікається.

Повертаємось на рівень $l=1$. Утворюємо Q_{13}^{15} (рис. 8.34).

$\xi=\xi\left(Q_{13}^{15}\right)=\nu+c^*$; $\nu=5\cdot4=20$; $\tilde{c}=(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$; $\tilde{g}=(1,1,1,1,2,2,2,3,3)$; $c^*=10+9+8+7+12+8+6+6+3=69$; $\xi=89>F_0$, множина відсікається.

Утворюємо Q_{15}^{15} (рис. 8.35).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	1			3	4
1	1				5	4
2						
3						
4	3					8
5	4					

Рис. 8.32. Множина Q_{143}^{154}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	1			5	4
1	1				7	4
2						
3						
4	5					10
5	4					

Рис. 8.33. Множина Q_{145}^{154}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	1				3
1	1					5
2						
3						
4						
5	3					

Рис. 8.34. Множина Q_{13}^{15}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \setminus p$	1				5
1	1	×				7
2			×			
3				×		
4					×	
5	5					×

Рис. 8.35. Множина Q_{15}^{15}

$\xi = \xi\left(Q_{15}^{15}\right);$ $\nu = 7 \cdot 4 = 28;$ $\tilde{c} = \left(10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1\right);$ $\tilde{g} = \left(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\right);$ $c^* = 10 + 9 + 8 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 66;$ $\xi = 28 + 66 = 94 > F_0$, множина відсікається.

Утворюємо Q_{32}^{15} (рис. 8.36).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \setminus p$	3			1	2
1	3	×			5	2
2			×			
3				×		
4	1				×	1
5	2					×

Рис. 8.36. Множини Q_{32}^{15}; Q_{321}^{154}

$\xi = \xi\left(Q_{32}^{15}\right);$ $\nu = 2 \cdot 4 = 8;$ $\tilde{c} = \left(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 1\right);$ $\tilde{g} = \left(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\right);$ $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 10 + 8 + 9 + 3 = 76;$

$\xi = 8 + 76 = 84 < F_0$, розгалужуємо далі (рис. 8.36): Q_{321}^{154}. Шукаємо $\xi = \nu + c^*$; $\nu = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 24$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 4, 3)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 12 + 8 + 9 = 70$; $\xi = 24 + 70 = 94 > F_0$. Утворюємо (рис. 8.37) Q_{325}^{154}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	3			5	2
1	3				6	2
2						
3						
4	5					3
5	2					

Рис. 8.37. Множина Q_{325}^{154}

$\xi = \nu + c^*$; $\nu = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 29$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 10 + 8 + 3 = 62$; $\xi = 29 + 62 = 91 > F_0$. Цю множину відсікаємо. Утворюємо Q_{324}^{154} (рис. 8.38).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	3			4	2
1	3				8	2
2						
3						
4	4					9
5	2					

Рис. 8.38. Множина Q_{324}^{154}

$\xi = \xi\left(Q_{324}^{154}\right) = \nu + c^*$; $\nu = 2\cdot 4 + 3\cdot 8 + 9\cdot 1 = 41$; $\tilde{c} = (10, 7, 6, 5, 4, 3, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 3 = 50$; $\xi = 41 + 50 = 91 > F_0$. Цю множину відсікаємо. Утворюємо Q_{31}^{15} (рис. 8.39).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	3				1
1	3				5	2
2						
3						
4						1
5	1					

Рис. 8.39. Множина Q_{31}^{15}

$\xi = \nu + c^*$; $\nu = 5 \cdot 4 = 20$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 8 + 6 + 3 = 69$; $\xi = 41 + 69 = 89 > F_0$; відсікаємо. Утворюємо Q_{35}^{15} (рис. 8.40).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	3				5
1	3					6
2						
3						
4						
5	5					

Рис. 8.40. Множина Q_{35}^{15}

Для неї $\xi = \nu + c^*$; $\nu = 6 \cdot 4 = 24$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 10 + 8 + 6 + 3 = 67$; $\xi = 91 > F_0$; відсікаємо. Наступна множина Q_{34}^{15} (рис. 8.41).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	3				4
1	3					8
2						
3						
4						
5	4					

Рис. 8.41. Множина Q_{34}^{15}

На цьому ж рівні будуємо нову підмножину, користуючись $\tilde{n}_{25} = 3$, ставлячи $p = 5$ на перше місце в переставленні i. Утворюємо множину Q_{52}^{15} (рис. 8.42). Для неї $\xi = \nu + c^*$; $\nu = 3 \cdot 4 = 12$; для c^* $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 10 + 8 + 6 + 3 = 73$; $\xi = 12 + 73 = 85 < F_0$, отже розгалужуємо Q_{52}^{15} «вглиб». Одержуємо Q_{523}^{154} (рис. 8.41). Для неї $\nu = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 32$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 14 + 10 + 8 + 3 = 62$; $\xi = 32 + 62 = 94 > F_0$, множину відсікаємо.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q / p	5			3	2
1	5				6	3
2						
3						
4	3					2
5	2					

Рис. 8.42. Множини Q_{52}^{15}; Q_{523}^{154}

Наступна (рис. 8.43) – Q_{521}^{154}. Для неї $v = 3\cdot4+7\cdot3+1\cdot1 = 34$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 2)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 10+9+8+12+$ $+10+8+6 = 63$; $\xi = 34+63 = 97 > F_0$. Цю множину відсікаємо, наступна (рис. 8.44) Q_{524}^{154}.

Для неї $v = 3\cdot4+10\cdot3+9\cdot1 = 51$; $\tilde{c} = (8, 7, 6, 5, 4, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 8+7+6+10+8+4+3 = 46$; $\xi = 51+$ $+46 = 97 > F_0$. Всі підмножини множини Q_{52}^{15} утворені, повертаємося на попередній рівень ($l = 1$), утворюючи на ньому наступну множину (рис. 8.45) Q_{53}^{15}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	5			1	2
1	5	X			7	3
2			X			
3				X		
4	1				X	1
5	2					X

Рис. 8.43. Множина Q_{521}^{154}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	5			4	2
1	5	X			10	3
2			X			
3				X		
4	4				X	9
5	2					X

Рис. 8.44. Множина Q_{524}^{154}

Для неї $\nu = 6 \cdot 4 = 24$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{\mathbf{g}} =$ $= (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = \mathbf{67}$; $\xi = 24 + 67 = 91 > F_0$, відсікаємо. Утворюємо (рис. 8.46) Q_{51}^{15}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \setminus q$	5				3
1	5	X				6
2			X			
3				X		
4					X	
5	3					X

Рис. 8.45. Множина Q_{53}^{15}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \setminus q$	5				1
1	5	X				7
2			X			
3				X		
4					X	
5	1					X

Рис. 8.46. Множина Q_{51}^{15}

Для $\xi = \xi(Q_{51}^{15})$; $\nu = 7 \cdot 4 = 28$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = \mathbf{66}$; $\xi = 28 + 66 = 84 > F_0$. Відсікаємо. Утворюємо (рис. 8.47) Q_{54}^{15}.

Для неї $\nu = 4 \cdot 10 = 40$; $\tilde{c} = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 9 + 8 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 63$; $\xi = 40 + 63 = 103 > F_0$, відсікаємо. Утворюємо за допомогою $c_{14} = 4$ для $g_1 = 4$ при $p = 4$ множину Q_{41}^{15} (рис. 8.48).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	5				4
1	5					10
2						
3						
4						
5	4					

Рис. 8.47. Множина Q_{54}^{15}

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$q \backslash p$	4			3	1
1	4				8	4
2						
3						
4	3					5
5	1					

Рис. 8.48. Множини Q_{41}^{15}; Q_{413}^{154}

Для неї $\nu = 4 \cdot 4 = 16$; $\tilde{c} = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 8 + 7 + 12 + 10 + 6 + 6 + 3 = 71$; $\xi = 16 + 71 = 87 < F_0$. Множину розгалужуємо далі «вглиб», одержуємо Q_{413}^{154} (рис. 8.48).

$\xi = \xi\left(Q_{413}^{154}\right) = \nu + c^*;$ де $\nu = 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 45;$ $\tilde{c} = (10, 9, 7, 6, 3, 2, 1);$ $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3);$ $c^* = 10 + 9 + 7 + 12 + 6 + 4 + 3 = 51;$ $\xi = 45 + 51 = 96 > F_0$, відсікаємо. Утворюємо (рис. 8.49) Q_{412}^{154}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	4			2	1
1	4	$\times$			8	4
2			$\times$			
3				$\times$		
4	2				$\times$	1
5	1					$\times$

Рис. 8.49. Множина Q_{412}^{154}

$\nu = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 44;$ $\tilde{c} = (10, 8, 7, 6, 5, 3, 2);$ $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3);$ $c^* = 10 + 8 + 7 + 12 + 10 + 6 + 6 = 59;$ $\xi = 44 + 59 = 103 > F_0$, відсікаємо. Утворюємо (рис. 8.50) Q_{415}^{154}.

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	4			5	1
1	4	$\times$			10	4
2			$\times$			
3				$\times$		
4	5				$\times$	7
5	1					$\times$

Рис. 8.50. Множина Q_{415}^{154}

$\nu = 4\cdot 4 + 10\cdot 3 + 7\cdot 1 = 53$; $\tilde{c} = (9, 8, 6, 5, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$; $c^* = 9 + 8 + 6 + 10 + 6 + 4 + 3 = 46$; $\xi = 53 + 46 = 99 > F_0$, відсікаємо. Повертаємось на рівень $l = 1$. Утворюємо Q_{43}^{15} (рис. 8.51).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	4				3
1	4					8
2						
3						
4						
5	3					

Рис. 8.51. Множина Q_{43}^{15}

$\nu = 8\cdot 4 = 32$; $\tilde{c} = (10, 9, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$; $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$; $c^* = 10 + 9 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 65$; $\xi = 32 + 65 = 97 > F_0$, відсікаємо. Наступна множина Q_{42}^{15} (рис. 8.52).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	$p \backslash q$	4				2
1	4					9
2						
3						
4						
5	2					

Рис. 8.52. Множина Q_{43}^{15}

$\nu = 9 \cdot 4 = 36;$ $\tilde{c} = (10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1);$ $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3);$ $c^* = 10 + 8 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 64;$ $\xi = 36 + 64 = 100 > F_0$, відсікаємо цю підмножину. Утворюємо Q_{45}^{15} (рис. 8.53). $\nu = 10 \cdot 4 = 40;$ $\tilde{c} = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1);$ $\tilde{g} = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3);$ $c^* = 9 + 8 + 7 + 6 + 10 + 8 + 6 + 6 + 3 = 63;$ $\xi = 40 + 63 = 103 > F_0$. Всі підмножини утворені. Розв'язок прикладу МГМ завершено (див. рис. 8.54).

	j_q	1	2	3	4	5
j_p	q \ p	4				5
1	4	×				10
2			×			
3				×		
4					×	
5	5					×

Рис. 8.53. Множина Q_{45}^{15}

Розв'язком є рекорд мінімального значення цільової функції F_0. Зауважимо, що він не покращився, а є першим допустимим розв'язком при вказаному галуженні. $F_0 = 88$. Це значення досягається при $j^0 = (5, 1, 4, 2, 3)$ (що відповідає розташуванню $i^0 = (2, 4, 5, 3, 1)$, та симетричному $i^{11} = (1, 3, 5, 4, 2)$).

Зауваження. Для зменшення перебору вдвічі в МГМ можна відслідковувати розгляд симетричних відносно центру комбінацій, тобто 1 2 3 4 5 та 5 4 3 2 1 дають симетричні розташування з однаковим значенням цільової функції. Це можна розглядати як ще одне правило відсікання: (№ 2) Матимемо $\dfrac{n!}{2!} = \dfrac{n!}{2}$ варіантів.

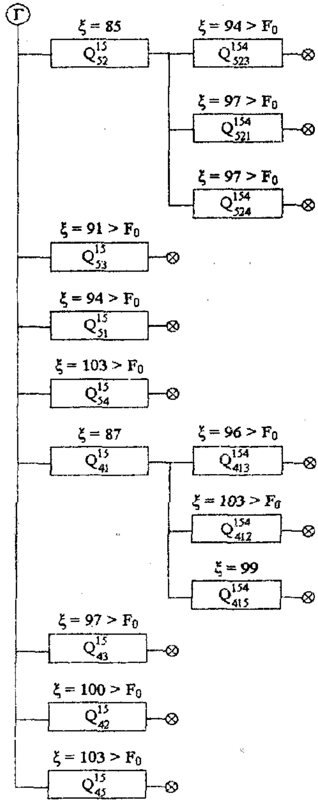


Рис. 8.54. Закінчення схеми МГМ для прикладу (продовження рис. 8.11 та 8.18)

8.3. Висновки до розділу

В розділі для задачі мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів запропоновано та реалізовано МГМ. При цьому запропоновано правило галуження допустимої множини на підмножини, а також запропонована і обґрунтована оцінка допустимої підмножини. Розглянуто ілюстративний приклад. Результати розділу можна використовувати при розробці алгоритмів МГМ в нечіткій комбінаторній оптимізації.

ПІСЛЯМОВА

Більшість робіт в комбінаторній оптимізації присвячено моделюванню процесів, об'єктів, явищ з точки зору детермінованого підходу, тому розробка принципів врахування невизначеності даних при описі процесів, об'єктів, явищ є актуальною задачею. Врахування невизначеності, зокрема нечіткими множинами, дозволяє побудувати більш адекватні до існуючого стану речей моделі, а тому є актуальним.

В монографії розглянуто розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах.

У дослідженнях, що викладені в монографії:

– розвинуто апарат нечітких множин (введенням нових дій та відношень), доведено, що вони мають властивості необхідні для розв'язування задач комбінаторної оптимізації;

– розвинуто апарат евклідової комбінаторної оптимізації новими поняттями: нечіткі переставлення, нечіткі розміщення, нечіткі розбиття;

– запропоновано підхід до розв'язування задач геометричного проектування, в яких метричні характеристики об'єктів задані нечіткими множинами; формалізовано поняття взаємного розташування нечітких прямокутників;

– запропонована постановка задач евклідової комбінаторної оптимізації на нечітких множинах як задач на нечітких переставленнях, нечітких розбиттях та на прикладі однієї прикладної задачі побудована математична модель задачі, запропоновано методи розв'язування; зроблені оцінки кількості операцій для цих методів;

– запропоновані поліноміальні евристичні методи розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах для ряду прикладних задач;

– запропоновано алгоритм методу гілокта меж для задачі мінімізації в нечіткій постановці.

– для задач мінімізації на множині розміщень зі сталою їх сумою лінійної цільової функції для методу гілок та меж запропоновано правила галуження та оцінку допустимих підмножин; доведені дві властивості оцінок, що дозволяють значно зменшувати кількість аналізуємих допустимих підмножин.

– для задачі мінімізації зваженої довжини звяз'уючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів запропоновано та реалізовано метод гілок та меж. При цьому запропоновано правило галуження допустимої множини на підмножини, а також запропонована і обґрунтована оцінка допустимої підмножини.

Побудовані оптимізаційні моделі практичних задач як евклідових задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах – на нечітких переставленнях та нечітких розбиттях – дають можливість більш адекватно моделювати певні явища, об'єкти, моделі, враховуючи невизначеність вхідних даних.

Запропоновані евристичні методи розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах дозволяють отримувати наближений розв'язок практичних задач в ситуаціях, коли є важливим знайти близький до оптимального розв'язок за обмежений час.

Розв'язок задач геометричного проектування, в яких метричні характеристики об'єктів задаються нечіткими множинами, дозволяє вирішувати більш адекватно конкретні задачі, які виникають з практичних потреб, коли присутня невизначеність вхідних даних.

Побудовані алгоритми розроблених методів дають можливість швидко та зручно розв'язувати поставлені задачі за допомогою комп'ютерної техніки. Практична ефективність запропонованих алгоритмів підтверджена числовими експериментами.

Автори сподіваються, що монографія зацікавила фахівців з математичного моделювання, оптимізації, інформатики, і будуть раді, якщо читачі висловлять їм свою думку про книгу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К. : Наук. думка, 1988. – 472 с.
3. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы, решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 263 с.
4. Сергиенко И. В. О некоторых направлениях и результатах работы в области математического программирования и системного анализа / И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 3. – С. 3–48.
5. Михалевич В. С. Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложений / В. С. Михалевич, И. В. Сергиенко, Н. З. Шор // Кибернетика. – 1981. – № 4. – С. 89–113.
6. Сергієнко І. В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми / І. В. Сергієнко. – К. : Наук. думка, 1999. – 354 с.
7. Сергиенко И. В. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. – К. : Наук. думка, 1995. – 171 с.
8. Сигал И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – М. : Физ.-мат. лит., 2003.
9. Баранов В. И. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения / В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. – М. : Наука, 1989. – 160 с.
10. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
11. Математические методы исследования операций / Ю. М. Ермольев, И. И. Ляшко, В. С. Михалевич, В. И. Тюптя. – К. : Выща шк., 1979. – 312 с.

12. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 344 с.
13. Тимофеева Н. К. Упорядочение множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. – С. 78–87.
14. Гуляницкий Л. Ф. О сходимости одного метода вероятностного моделирования для решения задач комбинаторной оптимизации / Л. Ф. Гуляницкий, Л. Б. Кошлай, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 164–166.
15. Стоян Ю. Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств / Стоян Ю. Г. – Харьков, 1980. – 22 с. – (Препринт АН УССР/ Ин-т проблем машиностр., 85).
16. Стоян Ю. Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в эвклидово пространство / Стоян Ю. Г. – Харьков, 1982. – 33 с. – (Препринт АН УССР/ Ин-т проблем машиностр., 173).
17. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
18. Ємець О. О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: автореф. дис.. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01. «Теоретичні основи інформатики та кібернетики» / О. О. Ємець. – К., 1997. – 42 с.
19. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация / М. М. Ковалев. – Минск : Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.
20. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
21. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
22. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна ; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с.

23. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування / О. О. Ємець, О. В. Роскладка ; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
24. Панішев А. В. Вступ до теорії складності дискретних задач / А. В. Панішев, О. М. Данильченко, В. О. Скачков. – Житомир : ЖДТУ, 2004. – 236 с.
25. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 300 с.
26. Емец О. А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации / О. А. Емец // Экономика и мат. Методы. – 1997. – Т. 33, № 4. – С. 120–129.
27. Ємець О. О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації / О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.
28. Емец О. А. Отсечение в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках / О. А. Емец, Е. М. Емец // Экономика и мат. методы. – 2001. – Т. 37, № 1. – С. 118–121.
29. Емец О. А. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников / О. А. Емец, Л. Г. Евсеева, Н. Г. Романова // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 131–138.
30. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах : в 2-х ч. / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с.
31. Корбут А. А Дискретное программирование // А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
32. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З.Шор. – К. : Вища школа, 1975. – 372 с.
33. Сергиенко И. В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рощин. – К. : Наук. думка, 1980. – 276 с.
34. Корбут А. А. Метод ветвей и границ (обзор теории, алгоритмов, программ и приложений) // А. А. Корбут,

И. Х. Сигал, Ю. Ю. Финкельштейн // Math. Operationforsch. Statist., Ser. Opimisation. – 1977. – Bb. 8. № 2. – S. 253–280.
35. Land A. H. An automatic method of solving discrete programming problems / A. H. Land, A. G. Doig. — Econometrica, 1960. – Vol. 28, № 3. – P. 497–520.
36. Финкельштейн Ю. Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования / Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1976. – 264 с.
37. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / В. С. Михалевич, Н. Э. Шор, Л. А. Галустова и др. – К. : Наук. думка, 1977. – 178 с.
38. Емеличев В. А. Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения I, II / В. А. Емеличев // Кибернетика. – 1971. – № 6. – С. 109–121; – 1972. – № 2. – С. 92–103.
39. Стоян Ю. Г. Решение некторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю. Г. Стоян, В. Э. Соколовский. – К. : Наук. думка, 1980. – 208 с.
40. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К. : Наук. думка, 1986. – 268 с.
41. Гребенник И. В. Решение некоторых задач условной оптимизации линейных функций на перестановочном многограннике / И. В. Гребенник // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 55–59.
42. Гребенник И. В. Решение задач оптимизации линейных функций с линейными ограничениями на множестве перестановок, отображенном в R^n / И. В. Гребенник, Д. А. Лапко // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – № 1. – С. 116–119.
43. Емец О. А. Алгоритмическое решение двух параметрических задач оптимизации на множестве сочетаний с повторениями / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 6. – С. 160–165.
44. Сигал И. Х. Оценки параметров алгоритмов ветвей и границ для задач дискретной оптимизации большой размерности / И. Х. Сигал // Изв. РАН, ТиСУ. – 2005. – № 4. – С. 96–101.
45. Гребенник И. В. Интервальные модели комбинаторной оптимизации квазилинейных функций в пространстве $I_s^n R$ / И. В. Гребенник // Доп. НАНУ. – 2004. – № 9. – С. 60–64.

46. Гребенник И. В. Экстремальные свойства функций на композиционных образах комбинаторных множеств / И. В. Гребенник // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 2. – С. 36–44.
47. Гребенник И. В. Свойства классов композиционных образов комбинаторных множеств, отображенных в эвклидово пространство / И. В. Гребенник // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 66–69.
48. Гребенник И. В. Интервальная прямая в пространстве I_s^3R / И. В. Гребенник, Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №2. – С. 57–63.
49. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
50. Валуйська О. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах / О. Валуйська, О. Ємець, О. Пічугіна // Вісник Львів. ун-ту. Сер. приклад. математика та інформатика. – 2002. – Вип. № 4. – С. 94–101.
51. Ємець О. О. До моделювання на евклідових комбінаторних множинах з урахуванням випадкових факторів / О. О. Ємець, А. А. Роскладка // ІІ-а Міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 27 вересня – 2 жовтня) : Праці школи-семінару. – Ужгород : УжНУ, 2004. – С. 40.
52. Емец О. А. Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение / О. А. Емец, Л. Г. Евсеева, Н. Г. Романова // Экономика и матем. методы. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 149–152.
53. Гребеннік І. В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / І. В. Гребеннік. – Харків, 2006. – 34 с.
54. Гуляницкий Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. Ф. Гуляницкий. – К., 2005. – 32 с.

55. Павлов А. А. Основы методологии проектирования ПДС-алгоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач / А. А. Павлов, Л. А. Павлова // Пробл. информатики и управления. – 1995. – № 4. – С. 135–141.
56. Павлов О. А. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач / О. А. Павлов, Л. О. Павлова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1997. – № 1. – С. 22–26.
57. Павлов А. А. Особенности решения NP-трудных задач комбинаторной оптимизации / А. А. Павлов, Л. В. Ван Инхуэйн // Інформатика та нові технологіїї. – 1997. – № 1. – С. 13.
58. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 160 с.
59. Сергиенко И. В. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 2. – С. 158–162.
60. Серая О. В. Нечеткая задача коммивояжера / О. В. Серая // Математическое моделирование. – 2007. – № 2 (17). – С. 13–15.
61. Зайченко Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – К. : Выща школа, 1979. – 391 с.
62. Сергиенко И. В. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 2. – С. 3–15.
63. Алтунин А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. – Тюмень : Из-во ТюмГУ, 2000. – 352 с.
64. Алтунин А. Е. Методы определения функций принадлежности в теории размытых множеств / А. Е. Алтунин, Н. Н. Востров : труды ЗапсибНИГНИ. – Тюмень, 1980. – Вып. 154. – С. 62–72.
65. Андрейчиков А. В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. – М. : Финансы и статистика, 2000 – 368 с.

66. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде. – В сб. : Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М. : Мир, 1976. – С. 172–215.
67. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – Изд-во МЭИ (СССР), Техника (НРБ), 1989. – 224 с.
68. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде – М. : Мир, 1976. – 165 с.
69. Заде Л. А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. В сб. : Классификация и кластер / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1980. – С. 208–247.
70. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация : учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. – К. : Выща шк., 1991. – 191 с.
71. Кандель А. Нечеткие множества, нечеткая алгебра, нечеткая статистика / А. Кандель, У. Дж. Байатт: труды американского общества инженеров-радиоэлектроников, 1978. – Т. 66. – № 12. – С. 37–61.
72. Парасюк И. Н. О трансформациях нечетких графов, задаваемых FD-граматиками / И. Н. Парасюк, С. В. Ершов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 129–146.
73. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.
74. Кофман А. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями / А. Кофман, Алуха Х. Хил. – Минск : Вышэйшая школа, 1992. – 200 с.
75. Минаев Ю. Н. Стабильность экономико-математических моделей оптимизации / Ю. Н. Минаев. – М. : Статистика, 1980. – 104 с.
76. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / [Борисов А.Н. и др.] – Рига : Зинатне, 1982. – 140 с.
77. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.
78. Нечеткие множества и теория возможностей / под ред. Г. Ягера. – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.

79. Борисов А. Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.
80. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 203 с.
81. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации [Електронний ресурс] / А. П. Ротштейн. – Режим доступу : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book5/index.php.
82. Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. – М. : Диалог-МГУ, 1998. – 150 с.
83. Семухин М. В. Теория нечетких множеств : учеб.-метод. пособие / М. В. Семухин. – Тюмень : ТюмГУ, 1999. – 50 с.
84. Структура Fuzzy Logic Toolbox. [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book2/index.php
85. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 154 с.
86. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [Електронний ресурс] / С. Д. Штовба. – Режим доступу: http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php.
87. Bellman R. E. On the analitical formalism of theory of fuzzy sets / R. E. Bellman, M. Gierts. – «Inform. Sci.», 1973. – Vol. 5, № 2. – P. 149–156.
88. Chen Yi – Yuan. Fuzzy permutation and its application / Yi – Yuan Chen // Proc. 15th Int. Symp. Multiple – Valued Log, 1985. – Silver Spring., Md. – P. 382–389.
89. Dubois D. Operations on fuzzy numbers / D. Dubois, H. Prade. – Int. J.System sci., 1978. – Vol. 5. – № 2. – P. 613–626.
90. Dubois D. Fuzzy sets and systems: Theory and applisations / D. Dubois, H. Prade – New York : Acad. Press, 1980 – 394 p.
91. Dubois D. Fuzzy real algebra: Some rezults. / D. Dubois, H. Prade – «Fuzzy Sets and Systems», 1979. – Vol. 2. – № 4. – P. 327–348.

92. Mizumoto M. Algebraic properties of fuzzy numbers / M. Mizumoto, K. Tanaka // Proc. IEEE Int. Conf. Cybernetics and Society, 1976. – P. 559–563.
93. Pavlak Z. Roufh sets and fuzzy sets / Z. Pavlak. – «Pr. IPI PAN», 1984. – № 540. – 10 p.
94. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / L. A. Zadeh // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – № 1. – P. 3–28.
95. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. Раздел 1.1. Основные термины и определения [Електронний ресурс] / С. Д. Штовба. – Режим доступу : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/ book1/1. php#1_1.
96. Роскладка А. А. Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами / А. А. Роскладка, А. О. Емец // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132–141.
97. Ємець О. О. Операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 5. – С. 39–46.
98. Ємець О. О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 6. – С. 25–33.
99. Ємець О. О. Задача евклідової комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності / О. О. Ємець, А. А. Роскладка, Ол-ра О. Ємець // Зб. наук. праць: фізико-математичні науки. – 2005. Вип. 1. – Хмельницький : Хмельниц. нац. ун-т. – С. 40–45.
100. Ємець О. О. Економіко-математична модель однієї задачі теорії розкладів / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // «Економіка: проблеми теорії та практики». – 2007. Зб. наук. праць, В. 233. – Т. II. – С. 293–301.
101. Емец О. А. Комбинаторное множество нечетких размещений / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали VII Міжн. наук.-практ. конф. «Наука і освіта – 2004», 10–15 лют. 2004 р. Том 70. Математика : тези доп. – Дніпропетровськ : Наука і освіта, 2004. – С. 42–43.
102. Ємець Є. М. Нечіткі комбінаторні розміщення / Є. М. Ємець, Ол-ра О. Ємець // III-а міжн. школа-семінар «Теорія прий-

няття рішень», 2–7 жовтня 2006 р: праці школи-семінару. – Ужгород : УжНУ, 2006. – С. 52–53.
103. Донець Г. П. Евристичний алгоритм для комбінаторної задачі упакування нечітких прямокутників / Г. П. Донець, Ол-ра О. Ємець // Матеріали другої ювілейної міжн. наук.-техн. конф. «Комп'ютерна математика в інженерії, науці та освіті» (CMSEE-2008), 29–31 жовтня 2008 р. : тези доп. – Полтава : ПолтНТУ, 2008. – С. 8.
104. Ємець Ол-ра О. Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин / Ол-ра О. Ємець // Волинський математичний вісник: Серія прикладна математика. – 2004, вип. 2(11). – С. 101–106.
105. Ємець Ол-ра О. Одна задача упакування як комбінаторна оптимізація на нечіткій множині розбиттів і її розв'язування / Ол-ра О. Ємець // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 150–160.
106. Ємець Ол-ра О. Деякі властивості операції суми та лінійного порядку для нечітких чисел з дискретним носієм / Ол-ра О. Ємець // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)». – К. : ІК НАНУ, 2011. – С. 62–63.
107. Ємець Ол-ра О. Одна задача формування портфеля цінних паперів з невизначеністю / Ол-ра О. Ємець // Міжн. наук.-практ. конф. «Споживча кооперація XXI століття: уроки трансформаційних реформ і перспективи розвитку», 20–21 листопада 2008 р. : тези доп. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2008. – С. 154–156.
108. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М. : МЦНМО, 2001. – 960 с.
109. Ємець Ол-ра О. Використання апарату нечітких множин в комбінаторній оптимізації / Ол-ра О. Ємець // Матеріали Дев'ятого Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 16–17 квітня 2010 р. : тези доп. – Кіровоград, 2010. – С. 52–56.
110. Ємець Ол-ра О. Математичний апарат моделювання задач упакування нечітких прямокутників / Ол-ра О. Ємець // Матеріали IX Всеукраїнської ювілейної наукової конференції молодих вчених та студентів «Наукові розробки

молоді на сучасному етапі», 22–23 квітня 2010р. : тези доп. – К., 2010. – С. 188.
111. Ємець О. О. Операції з нечіткими числами, необхідні в задачах оптимізації / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // 17 міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика – 2010», 27–29 вересня 2010 р. : тези доп. Т. 1. – Харків : ХНУРЕ, 2010. – С. 39–40.
112. Ємець Ол-ра О. Одна задача оптимізації на множині нечітких розбиттів / Ол-ра О. Ємець // Матеріали дванадцятої міжн. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука, 15–17 травня 2008 р. : тези доп. – К., 2008 – С. 611.
113. Ємець Ол-ра О. Математична модель однієї задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / Ол-ра О. Ємець // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика і системні науки», 18–20 березня 2010 р. : тези доп. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 63–68.
114. Yemets' O. O. One Problem of Rectangles Packing as Problem of Combinatorial Optimization with Fuzzy Parameters / Oleg O. Yemets`, Oleksandra O. Yemets' // 17th Zittau East-West Fuzzy Colloquium: Conference Proceedings, September 15–17, 2010, Zittau, Germany. – Hochschule Zittau/Görlitz: Univ. of Appl. Sciences – P. 180–187.
115. Ємець Ол-ра О. Одна комбінаторна задача оптимізації діяльності багатопроцесорних систем з нечіткими заявками / Ол-ра О. Ємець // Матеріали всеукраїнської наук.-практ. конф. «Структурні зміни в економіці та освіті під впливом інформаційно-комунікаційних технологій», 24–25 квітня 2008 р. : тези доп. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2008. – С. 52–53.
116. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.
117. Гудман С. Введение в разработку и анализ алгоритмов / С. Гудман, С. Хидетниеми. – М. : Мир, 1981. – 368 с.
118. Донець Г. П. Числові експерименти з застосування одного евристичного методу до задачі упакування на нечітких множинах / Г. П. Донець, Ол-ра О. Ємець // Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції, 17–19 березня 2011 р. : тези доп. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 86–90.

119. Донец Г. А. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г. А. Донец, А. О. Емец // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 65–76.
120. Емец А. О. Числовые эксперименты для задачи о рюкзаке с нечеткими данными / А. О. Емец // Матеріали Дев'ятого Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 16–17 квітня 2010 р. : тези доп. – Кіровоград, 2010. – С. 39–44.
121. Ємець Ол-ра О. Задача вибору портфелю цінних паперів в умовах нечіткої невизначеності / Ол-ра О. Ємець // VII міжнародна науково-практична конференція «Дослідження та оптимізація економічних процесів» «Оптимум – 2010», 1–3 грудня 2010 р. : тези доп. – Харків : НТУ «ХПІ», 2010 – С. 167–168.
122. Емец А. О. Задача распределения инвестиций в нечеткой постановке / А. О. Емец // Экономика глазами молодых: материалы IV Международного экономического форума молодых ученых (Вилейка, 3–5 июня 2011 г.). – Минск : БГАТУ, 2011. – С. 326–329.
123. Ємець О. О. Транспортна задача на переставленнях та її розв'язування: чітка та нечітка постановки / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова // Український матем. конгрес – 2009. (Київ 27–29 серпня, 2009). [Електронний ресурс] – 2 с. – Режим доступу до тез : http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/ Abstracts/Yemets.pdf. – Назва з титул. екрану.
124. Емец О. А. Операции над нечеткими числами с носите лем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 2. – С. 86–101.
125. Емец О. А. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37–47.
126. Емец О. А. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 1. – С. 26–36.
127. Емец О. А. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа

/ О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – № 6. – С. 103–114.
128. Ємець О. О. Розв'язування ігрових задач на перестановках / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». 2007. – № 6. – С. 47–52.
129. Ємець О. О. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 3. – С. 5–10.
130. Емец О. А. Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – № 4. – С. 134–141.
131. Емец О. А. Исследование решений линейных задач евклидовой комбинаторной оптимизации на перестановках с дополнительными ограничениями Ч. 1 / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 2. – С. 26–32.
132. Ємець О. О. Програмування та дослідження методів розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // Економіка: проблеми теорії та практики. Зб. наук. праць. Вип. 256, Т. 10. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2009. – С. 2392–2396.
133. Ємець О. О. Розв'язування задач оптимізації ігрового типу на множині розміщень / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // В кн.: Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : Матеріали Всеукраїн. наук.-практ. конф. (18–20 березня 2010 р., м. Полтава). – Полтава : РВВ ПУСКУ. – С. 61–63.
134. Ємець О. О. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу на розміщеннях / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // В кн. : Матеріали Десятого Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (15–16 жовтня 2010 року, Кіровоград). – Кіровоград : КНТУ, 2010. – С. 63–67.
135. Емец О. А. Итерационный метод решения комбинаторных задач игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 69–78.
136. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Какрагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор. – К. : Вища шк., 1975. – 372 с.

137. Ємець О. О. Оптимізація лінійної функції на розміщеннях за умов одиничності суми елементів розміщення / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Матеріали Всеукраїнського наукового семінару «Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини» 26–27 серпня 2011 р. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 45–51.
138. Ємець О. О. Оцінювання допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв'язується методом гілок та меж / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010. – № 1. – С. 21–27.
139. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 106–112.
140. Чілікіна Т. В. Оцінки в методі гілок та меж для лінійної умовної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях / Т. В. Чілікіна, О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Т. О. Парфьонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали II Всеукр. наук.-практ. конф. (17–19 березні 2011 р., Полтава). – Полтава : РВВ ПУЕТ. – С. 328–331.
141. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литлльвуд, Ф. Полиа. – М. : Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – 455 с.

Монографія

Ємець Олег Олексійович
Ємець Олександра Олегівна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Головний редактор М. П. Гречук
Комп'ютерна верстка О. С. Корніліч

Підписано до друку 16.11.2010 р.
Формат 60×84/16. Тираж 300 прим. Ум. друк. арк. 14,9.
Папір 70 г/м^2. Гарнітура «Таймс». Зам. № 407/294

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»

36014, Полтава-14, вул. Коваля, 3, кімн. 115

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3827 від 8.07.2010 р.

Видруковано з оригінал-макета
у Вищому навчальному закладі Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі»
36014, Полтава-14, вул. Коваля, 3, кімн. 115

ЄМЕЦЬ ОЛЕГ ОЛЕКСІЙОВИЧ

Доктор фізико-математичних наук, професор, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, завідуючий кафедрою математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі. Підготував 12 кандидатів наук за спеціальностями «Теоретичні основи інформатики та кібернетики», «Математичне моделювання і обчислювальні методи». Автор 9 монографій, з яких 4 – в «Науковій думці», редактор збірників матеріалів щорічних конференцій «Інформатика та системні науки» (Полтава), «Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини» (Полтава), автор 17 учбових і учбово-методичних посібників, 17 наукових і науково-методичних брошур. Має більше 370 опублікованих робіт, з яких більше 320 наукових праць.

ЄМЕЦЬ ОЛЕКСАНДРА ОЛЕГІВНА

Кандидат фізико-математичних наук за спеціальністю «Теоретичні основи інформатики та кібернетики», доцент кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету економіки і торгівлі. Має 37 наукових і науково-методичних публікацій.