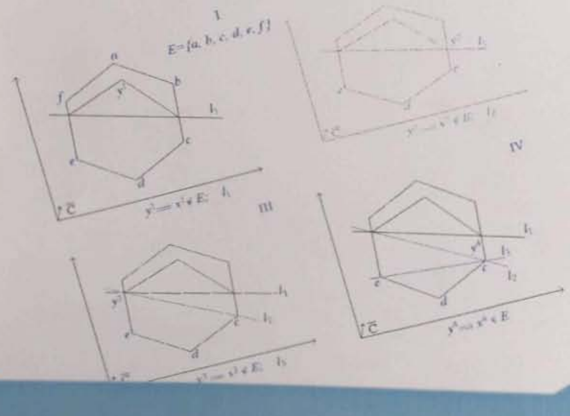
УНІВЕРСИТЕТ СПОЖИВЧОЇ КООПЕРАЦІЇ УКРАЇНИ
ПОЛТАВА

Ю.Г. СТОЯН
О.О. ЄМЕЦЬ
Є.М. ЄМЕЦЬ

ОПТИМІЗАЦІЯ НА ПОЛІРОЗМІЩЕННЯХ: ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИ



Монографія

УКООПСПІЛКА
ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
СПОЖИВЧОЇ КООПЕРАЦІЇ УКРАЇНИ
Кафедра математичного моделювання
та соціальної інформатики

Ю.Г. СТОЯН
О.О. ЄМЕЦЬ
Є.М. ЄМЕЦЬ

ОПТИМІЗАЦІЯ НА ПОЛІРОЗМІЩЕННЯХ:

теорія та методи

МОНОГРАФІЯ

ПОЛТАВА
РВЦ ПУСКУ
2005

УДК 519.854
ББК 22.176
С82

Рекомендовано до видання вченою радою Полтавського університету споживчої кооперації України від 19 січня 2005 р.

Рецензенти: ***Панішев А.В.,*** завідувач кафедри інформатики і комп'ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету, професор, д.т.н.; ***Петров Е.Г.,*** завідувач кафедри системотехніки Харківського національного технічного університету радіоелектроніки, професор, д.т.н.

Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.

С82 Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: Монографія. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.

ISBN 996-7971-27-9

У монографії розглядається опис системою лінійних нерівностей опуклої оболонки множини полірозміщень – многогранника полірозміщень. Досліджена структура цього многогранника: симетрія, представлення добутком многогранників розміщень, вершини, грані різної вимірності, їх суміжність.

Наведено розв'язок безумовної лінійної задачі оптимізації на полірозміщеннях. Доведені оцінки та достатні умови мінімумів у безумовних задачах на полірозміщеннях для опуклих та сильно опуклих цільових функцій.

Розглянуто метод відсікання для одного класу лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації. Обґрунтовано алгоритм цього методу.

Для студентів спеціальностей «Соціальна інформатика», «Інформатика», аспірантів і широкого кола фахівців, що цікавляться математичним моделюванням та теорією комбінаторної оптимізації.

УДК 519.854
ББК 22.176

ISBN 996-7971-27-9

Зміст

Вступ

Монографія присвячена дослідженню властивостей математичних моделей евклідових комбінаторних задач оптимізації: властивостей допустимої множини та цільових функцій в задачах на полірозміщеннях, а також розробці алгоритму методу відсікання в комбінаторній оптимізації та обґрунтуванню цього методу.

Останні десятиліття характеризуються бурхливим розвитком досліджень з дискретної, взагалі, та комбінаторної, зокрема, оптимізації [1-186]. Різним напрямам цих досліджень присвячені роботи багатьох вчених, і в першу чергу – Сергієнка І.В., Стояна Ю.Г, Шора Н.З. та керованих ними наукових колективів. Розвиток комбінаторної оптмізації привів в останні роки до виокремлення з задач оптимізації комбінаторного типу задач на так званих евклідових комбінаторних множинах, до систематичного дослідження їх властивостей за трьома напрямами: по-перше, одержання властивостей занурених в евклідів арифметичний простір комбінаторних множин; по-друге, на основі властивостей цих множин дослідження екстремальних властивостей цільових функцій, і. по-третє, розробка методів і алгоритмів розв'язування евклідових комбінаторних задач оптимізації на ґрунті одержаних властивостей допустимої множини та критерію оптимізації.

Цим дослідженням присвячені зокрема роботи [24-71; 79; 80; 107-118; 130; 144; 145; 151; 154-178]. В них розглядаються класичні комбінаторні множини – переставлення, розміщення, сполучення. Розвиток моделювання оптимізаційними комбінаторними задачами робить актуальним і необхідним дослідження та застосування більш складних комбінаторних множин, зокрема евклідової комбінаторної множини полірозміщень. Монографія є продовженням і розвитком досліджень у рамках теорії евклідової комбінаторної оптимізації, в ній досліджується множина полірозміщень та екстремальні властивості цільових функцій на цій множині, а також розгляддаються задачі комбінаторної оптимізації на евклідових множинах полірозміщень.

Розвиток теорії евклідової комбінаторної оптимізації, як показують публікації Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, О.О. Ємця, а також О.О. Валуйської, І.В. Гребенніка, Л.М. Колечкіної С.І. Недобачія, О.С. Пічугіної, А.А. Роскладки та інших [24-40; 45-47; 52; 62-71; 79-80;

107-111; 113; 115-118; 125-127; 143; 144; 151; 159; 160; 162-186], відбувається в двох аспектах:

1) дослідження математичних моделей у вигляді задач оптимізації на певній комбінаторній множині:

а) властивості комбінаторної множини, її опуклої оболонки, критерії вершин, суміжностей вершин, граней цієї опуклої оболонки тощо [24; 25; 30; 31; 35; 36; 52; 62-65; 67; 68; 71; 79; 107-111; 113; 115];

б) властивості цільових функцій [24; 30; 33; 34; 36-39; 52; 66; 69; 70; 80; 110; 111; 115-118; 125; 127; 151];

2) розробка, дослідження та обґрунтування методів розв'язування оптимізаційних евклідових задач на певних комбінаторних множинах [24; 26; 28; 29; 32-34; 36; 38-40; 45-47; 52; 66; 80; 110; 111; 115; 126; 127; 144; 145; 151; 175-178].

У роботах Ю.Г. Стояна, О.О. Ємця [24; 27; 111] введено поняття множини поліpозміщень. У них подано тільки означення цієї множини. Стосовно застосування її для побудови математичних моделей, а також властивостей її опуклої оболонки, що можуть бути корисними з точки зору розвитку апарата математичного моделювання, ніяких досліджень не проводилося, а отже така робота є актуальною. Необхідним є також дослідження властивостей розв'язків та створення методів розв'язування різних класів задач оптимізації на поліpозміщеннях, розвиток, у зв'язку з цим, одного методу відсікання (запропонованого в роботах О.О. Ємця [28; 32]). У цих публікаціях метод відсікання розглядається для лінійних повністю комбінаторних задач на евклідових комбінаторних множинах, що мають властивість збігатися з множиною вершин своєї опуклої оболонки. Але в цих публікаціях немає загального вигляду нерівності-відсікання, не досліджена можливість застосування методу для інших (не повністю комбінаторних) задач на евклідових комбінаторних множинах. Тому дослідження та розв'язування цих питань є вельми актуальними та необхідними. Вищевикладене і склало мету та задачі дослідження, результати яких подано в монографії.

ГЛАВА 1

Елементи теорії комбінаторної оптимізації на евклідових комбінаторних множинах

Евклідова комбінаторна оптимізація виникла в процесі формалізації одного класу задач в області геометричного проектування – комбінаторних оптимізаційних задач, в яких допустима комбінаторна конфігурація могла розглядатися як точка евклідового простору. Основи теорії евклідових комбінаторних множин та оптимізації на них закладені в роботах члена-кореспондента НАН України, доктора технічних наук, професора Ю.Г. Стояна. У працях Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлєва запропоновано підхід до оцінки мінімумів та одержання достатніх умов мінімумів для опуклих функцій на евклідових комбінаторних множинах стосовно множини переставлень.

Подальша розробка теорії і методів евклідової комбінаторної оптимізації в школі Ю.Г. Стояна привели до розробки класифікації евклідових комбінаторних задач оптимізації, дослідження різних евклідових комбінаторних множин і відповідних комбінаторних многогранників, одержання необхідних і достатніх умов мінімумів цільових функцій на евклідових комбінаторних множинах.

Дослідження з евклідової комбінаторної оптимізації в даний час ведуться під керівництвом Ю.Г. Стояна і зосереджені, в основному, в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України та в Полтавському університеті споживчої кооперації України.

1.1. Означення множини полірозміщень та інші необхідні означення евклідових комбінаторних множин

Розглянемо деякі факти евклідової комбінаторної оптимізації та окремі властивості евклідових комбінаторних множин, необхідні для викладення результатів досліджень, що наведені в монографії.

Нехай $\mathbf{X}$ – скінчена комбінаторна множина, $\mathbf{x}$ – її довільний елемент, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, а $|\mathbf{X}|$ – кількість елементів у $\mathbf{X}$, та нехай є заданий функціонал $\mathbf{F}: \mathbf{X} \to \mathbf{R}^1$. Основною задачею комбінаторної оптимізації називають [111] задачу знаходження екстремуму:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}{\mathbf{extr}} \, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (1.1)$$

і екстремалі

$$\mathbf{x}^* = \arg \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}{\mathbf{extr}} \, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (1.2)$$

Розв'язком задач (1.1), (1.2) називають пару $<\mathbf{F}^*, \mathbf{x}^*>$. Обидві задачі можуть ставитись незалежно одна від одної, тоді під розв'язком задачі (1.1) розуміють $\mathbf{F}^*$, а задачі (1.2) – $\mathbf{x}^*$. Основною задачею мінімізації на комбінаторній множині $\mathbf{X}$ називають задачу знаходження $\mathbf{F}^* = \min\limits_{x \in X} \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}^* = \arg\min\limits_{x \in X} \mathbf{F}(\mathbf{x})$, а основною задачею максимізації – відповідно задачу визначення $\mathbf{F}^* = \max\limits_{x \in X} \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}^* = \arg\max\limits_{x \in X} \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Позначимо $\mathbf{J}_n$ – множину $\mathbf{n}$ перших натуральних чисел, $\mathbf{J}_n = \{1,...,\mathbf{n}\}$, а також позначимо $\mathbf{J}_n^0 = \mathbf{J}_n \bigcup \{0\}$. Для спрощення формул та єдиної форми їх представлення вважатимемо, що в них $\mathbf{J}_0 = \varnothing$. Як відомо [4; 111], мультимножиною $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots \mathbf{g}_\eta\}$, називають сукупність η елементів $\mathbf{g}_1,...,\mathbf{g}_\eta$, серед яких є однакові (нерозрізнимі). Мультимножина, всі елементи якої різні, є множиною. Будь-яку мультимножину $\mathbf{A}$ можна представити її основою $\mathbf{S(A)}$, тобто множиною всіх її різних елементів, і первинною специфікацією $[\mathbf{A}]$ – списком кратностей елементів основи мультимножини. Те, що елемент $\mathbf{a}$ мультимножини $\mathbf{A}$ має кратність $\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{a})$, записують і у вигляді $\mathbf{a}^{\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{a})}$.

Дії над мультимножинами розглянуті в роботах [4; 111]. Далі буде потрібна сума мультимножин. Дамо її означення. Нехай $\mathbf{A}$ – мультимножина з основою $\mathbf{S(A)} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots\}$ і кратностями $\{\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{y}), \mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{z}),...\}$, а $\mathbf{B}$ – мультимножина з основою $\mathbf{S(B)} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots\}$ і кратностями $\{\mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{y}), \mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{z}),...\}$, де $\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{y}) \geq 0$, $\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{z}) \geq 0$, $\mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{y}) \geq 0$, $\mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{z}) \geq 0$ тощо. Тоді під сумою мультимножин $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ розуміють мультимножину з основою $\mathbf{S(A+B)} = \mathbf{S(A)} \cup \mathbf{S(B)}$ і кратностями $\{\mathbf{k}_{\mathbf{A+B}}(\mathbf{x}), \mathbf{k}_{\mathbf{A+B}}(\mathbf{y}), \mathbf{k}_{\mathbf{A+B}}(\mathbf{z}),...\} = \{\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{y}) + \mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{y}), \mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{z}) + \mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{z}),...\}$.

Суму $\mathbf{n}$ мультимножин $\mathbf{A}_i$ будемо позначати $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i$. Мультимножина $\mathbf{B}$ з основою $\mathbf{S(B)}$ називається підмультимножиною мультимножини $\mathbf{A}$ з основою $\mathbf{S(A)}$, якщо $\mathbf{S(B)} \subset \mathbf{S(A)}$, і для кожного елементу $\mathbf{a} \in \mathbf{S(B)}$ виконується нерівність $\mathbf{k}_\mathbf{B}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{a})$, де $\mathbf{k}_\mathbf{A}(\mathbf{a})$ – кратність елементу $\mathbf{a}$ в мультимножині. Позначається це тим же знаком $\subset$, що і для множин, тобто $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$. Назвемо, як і в [111], $\mathbf{k}$-елементну підмультимножину $\mathbf{B}$ мультимножини $\mathbf{A}$ $\mathbf{k}$-вибіркою, тобто $\mathbf{B}$ – $\mathbf{k}$-вибірка, якщо $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, $|\mathbf{B}| = \mathbf{k}$.

Нехай $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$, η – натуральні константи, $\mathbf{g}_j, \mathbf{e}_i$ – дійсні числа $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}_\eta$, $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$, а $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1,...,\mathbf{g}_\eta\}$ – мультимножина з основою

$S(G) = (e_1, \dots e_n)$ первинною специфікацією $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_i \geq 1 \; \forall i \in J_n, \eta_1 + \dots + \eta_n = \eta, \eta \geq k$. Не порушуючи спільності, можна вважати, що $\eta_i \leq k \;\; \forall i \in J_n$. За означенням основи мультимножини $e_i \neq e_j \;\; \forall i \neq j, \; i, j \in J_n$. З означення мультимножини G випливає, що $\eta \leq nk$. Якщо G – мультимножина, то існує принаймні одне число $i \in J_n$, що $\eta_i > 1$, а з цього випливає, що $\eta > n$. Розглянемо упорядковану k-вибірку з мультимножини G:

$$e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \tag{1.3}$$

де $g_{i_j} \in G, \; i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_\eta, \;\; \forall j, t \in J_k$.

У роботі [107] вперше дано означення евклідової комбінаторної множини. Далі буде використовуватись означення евклідової комбінаторної множини, яке дається в термінах мультимножини [52, с. 10].

Означення 1.1. Множину E, елементами якої є k-виборки $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$, $\bar{\bar{e}} = (\bar{\bar{e}}_1, \dots, \bar{\bar{e}}_k)$ вигляду (1.3) з мультимножини G назвемо евклідовою комбінаторною множиною, за умови, що: $\exists j \in J_k$ таке, що $\bar{e}_j \neq \bar{\bar{e}}_j$ випливає $\bar{e} \neq \bar{\bar{e}}$.

При цьому для $\bar{e}, \bar{\bar{e}} \in E$ може виконуватись умова $\bar{e}_j = \bar{\bar{e}}_m$, $\bar{e}_m = \bar{\bar{e}}_j$, $j \neq m, \;\; j, m \in J_k$. Евклідова комбінаторна множина E має таку властивість: два елементи $\bar{e}$ і $\bar{\bar{e}}$, що належать множині E, відмінні один від одного, якщо вони відрізняються порядком слідування символів, що їх утворюють, або самими символами. Розглянемо деякі з евклідових комбінаторних множин [24; 111].

Множина k*-розміщень без повторення з* n *різних дійсних чисел.* Нехай $[G] = (1^n)$, тобто G – множина, $\eta = n$, $\;\; G = S(G)$. За такої умови множину всіх упорядкованих k-виборок з мультимножини G вигляду (1.3) називають множиною k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел множини G. Позначимо цю множину розміщень $A_n^k(G)$.

Якщо $k = n$, то множина $A_n^k(G)$ є множиною $P_k(G)$ переставлень k різних дійсних чисел, що складають G.

Множина k*-розміщень з повтореннями з* n *різних дійсних чисел.* Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots g_\eta\}$, – мультимножина з основою $S(G) = (e_1, e_2, \dots e_n)$ та первинною специфікацією $[G] = (k^n)$, тобто $\eta = nk$, а кратності η_i елементів e_i однакові і дорівнюють $k \;\; \forall i \in J_k$. За таких умов множину всіх упорядкованих $\mathbf{k}$-виборок вигляду (1.3) з мультимножини $\mathbf{G}$ називають множиною $\mathbf{k}$-розміщень з повтореннями з $\mathbf{n}$ різних дійсних чисел. Позначимо цю множину розміщень $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$.

Загальна множина $\mathbf{k}$-розміщень.

Нехай $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, \ldots g_\eta\}$, як і раніше – мультимножина з основою $\mathbf{S(G)} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n)$ та первинною специфікацією $[\mathbf{G}] = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k)$ де $\eta_i \le \mathbf{k}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_k$. Сукупність усіх упорядкованих $\mathbf{k}$-виборок вигляду (1.3) з мультимножини $\mathbf{G}$ будемо називати загальною множиною $\mathbf{k}$-розміщень і позначати її $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$. Зазначимо, що оскільки елементи первинної специфікації мультимножини $\mathbf{G}$ задовольняють умови $\eta_i \le \mathbf{k}$, то в кожному елементі множини $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ не більше η_i елементів $\mathbf{e}_i \in \mathbf{S(G)}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$. Якщо ж $\eta_i < \mathbf{k}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$, то, очевидно, що в жодному елементі загальної множини розміщень $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ немає $\mathbf{k}$ однакових чисел $\mathbf{e}_i$ $\mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$ (на відміну від множини $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$, де є $\mathbf{n}$ елементів, що складаються з однакових чисел $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$). Зазначимо також, що при $\mathbf{n} = \eta$, тобто при $\eta_i = 1$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$, множина $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ збігається з множиною $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{G})$ розміщень без повторень: $\mathbf{A}_{\mathbf{nn}}(\mathbf{G}) = \mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{G})$, а при $\eta_i = \mathbf{k}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$, тобто при $\eta = \mathbf{kn}$, множина $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ перетворюється на множину $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{G})$ розміщень з повтореннями: $\mathbf{A}_{(\mathbf{kn}),\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) = \overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$.

Якщо $\mathbf{k} = \eta$, то множина $\mathbf{A}_{\eta\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ є загальною множиною переставлень $\mathbf{P}_{\mathbf{kn}}(\mathbf{G})$ з елементів мультимножини G.

Множина полірозміщень.

Нехай, як і раніше, $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, \ldots g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел з основою $\mathbf{S(G)} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n)$, первинною специфікацією $[\mathbf{G}] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = \eta$, $1 \le \eta_i \le \mathbf{k}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_n$.

Розглянемо упорядковане розбиття $\mathbf{J}_\eta$ на $\mathbf{s}$ множин $\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_s$, що задовольняє умовам $\mathbf{N}_i \cap \mathbf{N}_j = \varnothing$, $\mathbf{N}_i \ne \varnothing$, $\mathbf{N}_j \ne \varnothing$, $\forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{J}_s$, а також упорядковане розбиття числа $\mathbf{k}$ на $\mathbf{s}$ доданків $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_s$, що задовольняють умовам $1 \le \mathbf{k}_i \le \mathbf{n}_i$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_s$, де $\mathbf{n}_i = |\mathbf{N}_i|$. Очевидно, що $\eta = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \ldots + \mathbf{n}_s$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \ldots + \mathbf{k}_s$.

Нехай $\mathbf{H}$ – множина всіх $\mathbf{k}$-виборок з множини $\mathbf{J}_\eta$ вигляду

$$\pi = (\pi(1),...,\pi(\mathbf{k})) = (\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s}) = (\pi^1,...,\pi^s),$$

де $\pi^i = (\pi_{i1},...,\pi_{ik_i})$ – довільна $\mathbf{k}_i$-вибірка з множини $\mathbf{N}_i$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_s$. Множину $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H}) = \{(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in \mathbf{H}\}$ назвемо множиною полірозміщень з повтореннями або загальною множиною полірозміщень. У випадку, коли $\mathbf{S(G)} = \mathbf{G}$, тобто $\mathbf{G}$ – множина і $\eta = \mathbf{n}$, $\mathbf{A}^{ks}_{nn}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ називають множиною полірозміщень без повторень і позначають $\mathbf{A}^{ks}_{n}(\mathbf{G},\mathbf{H})$. Якщо немає потреби підкреслювати кількість елментів у $\mathbf{G}$, $\mathbf{S(G)}$, у π або кількість множин $\mathbf{N}_i$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_s$, за допомогою яких утворюється множина полірозміщень, то поряд з позначенням $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ використовують також $\mathbf{A}(\mathbf{G},\mathbf{H})$. Очевидно, що множина $\mathbf{A}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ задовольняє означення 1.1, тобто є евклідовою комбінаторною множиною. Елементи $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ будемо називати полірозміщеннями з повтореннями, а елементи множини $\mathbf{A}^{s}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ – полірозміщеннями без повторень. Зазначимо також, що, якщо $\mathbf{s} = 1$, то $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{k}_{\eta}(\mathbf{J}_\eta)$, а $\mathbf{A}^{k1}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H}) = \mathbf{A}^{k}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H})$.

Якщо $\eta = \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_i = \mathbf{k}_i$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_s$, то множина $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ є множиною поліпереставлень $\mathbf{P}^{s}_{kn}(\mathbf{G},\mathbf{H})$.

Приклад множини полірозміщень. Нехай задана мультимножина $\mathbf{G} = \{1, 2, 2, 4, 5, 5, 5, 8\}$, що містить 8 елементів.

Отже $\mathbf{J}_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Нехай задано $\mathbf{s} = 4$, виберемо розбиття $\mathbf{J}_8$ на множині $\mathbf{N}_1 = \{2, 3, 5, 6\}$; $\mathbf{N}_2 = \{1, 4\}$; $\mathbf{N}_3 = \{7\}$; $\mathbf{N}_4 = \{8\}$; Нехай задано $\mathbf{k} = 6$, та вибрані $\mathbf{k}_1 = 3$; $\mathbf{k}_2 = 1$; $\mathbf{k}_3 = 1$; $\mathbf{k}_4 = 1$. Тоді множина $\mathbf{H}$ утворюється у вигляді: $\mathbf{H}$ = {(2, 3, 5, 1, 7, 8); (2, 3, 5, 4, 7, 8); (2, 5, 3, 1, 7, 8); (2, 5, 3, 4, 7, 8); (3, 2, 5, 1, 7, 8); (3, 2, 5, 4, 7, 8); (3, 5, 2, 1, 7, 8); (3, 5, 2, 4, 7, 8); (5, 2, 3, 1, 7, 8); (5, 2, 3, 4, 7, 8); (5, 3, 2, 1, 7, 8); (5, 3, 2, 4, 7, 8); (2, 3, 6, 1, 7, 8); (2, 3, 6, 4, 7, 8); (2, 6, 3, 1, 7, 8); (2, 6, 3, 4, 7, 8); (3, 2, 6, 1, 7, 8); (3, 2, 6, 4, 7, 8); (3, 6, 2, 1, 7, 8); (3, 6, 2, 4, 7, 8); (6, 2, 3, 1, 7, 8); (6, 2, 3, 4, 7, 8); (6, 3, 2, 1, 7, 8); (6, 3, 2, 4, 7, 8); (2, 5, 6, 1, 7, 8); ...; (6, 5, 2, 4, 7, 8); (3, 5, 6, 1, 7, 8); ...; (6, 5, 3, 4, 7, 8)}. А отже, множина полірозміщень має такий вигляд $\mathbf{E}^{64}_{85}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ = {(2, 2, 5, 1, 5, 8); (2, 5, 2, 1, 5, 8); (2, 2, 5, 4, 5, 8); (2, 5, 2, 4, 5, 8); (5, 2, 2, 1, 5, 8); (5, 2, 2, 4, 5, 8); (5, 5, 2, 1, 5, 8); (5, 5, 2, 4, 5, 8); (5, 2, 5, 1, 5, 8); (5, 2, 5, 4, 5, 8); (2, 5, 5, 1, 5, 8); (2, 5, 5, 4, 5, 8)}.

Позначимо $\mathbf{G}^{N_1}=\{2, 2, 5, 5\}$; $\mathbf{G}^{N_2}=\{1, 4\}$; $\mathbf{G}^{N_3}=\{5\}$; $\mathbf{G}^{N_4}=\{8\}$. Тоді $\mathbf{G}=\mathbf{G}^{N_1}+\mathbf{G}^{N_2}+\mathbf{G}^{N_3}+\mathbf{G}^{N_4}$.

Полікомбінаторні е-множини [179].

Розглянемо, як і при побудові множини полірозміщень, множину $\mathbf{H}$ всіх $\mathbf{k}$-виборок з $\mathbf{J}_\eta$ вигляду $\pi=(\pi(1),...,\pi(\mathbf{k}))=$ $=(\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s})$, де $\pi^i=(\pi_{i1},..., \pi_{ik_i})$, $\mathbf{k}_i$-вибірка з $\mathbf{N}_i$ $\forall i\in\mathbf{J}_s$, але не довільна, а така, що задовольняє певним умовам $\pi^i\in\Xi_i$ $\forall i\in\mathbf{J}_s$.

Позначимо $\Xi=(\Xi_1,...,\Xi_i,...,\Xi_s)$ – впорядкований набір множини умов Ξ_i $\forall i\in\mathbf{J}$. Множину $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)=\{(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(\mathbf{k})})\,|\,\forall\pi\in\mathbf{H},\ \pi^i\in\Xi_i$ $\forall i\in\mathbf{J}\}$ назвемо загальною полікомбінаторною множиною (якщо $\mathbf{G}$ – мультимножина), якщо $\mathbf{G}$ – множина, слово «загальна» в назві множини будемо опускати та позначати $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)=\mathbf{A}^{ks}_{nn}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)=$ $=\mathbf{A}^{ks}_{n}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)$. Елементи (загальної) полікомбінаторної множини будемо називати упорядкованими $\mathbf{k}$-полівиборками (з повтореннями), або просто – полівибірки (з повтореннями).

Якщо не має необхідності підкреслювати ті чи інші параметри множини $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)$, то будемо її позначати $\mathbf{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)$, або просто $\mathbf{A}$ у випадку, коли це обумовлено та (або) не викликає плутанини. Очевидно, що множина $\mathbf{A}^{ks}_{\eta n}(\mathbf{G},\mathbf{H},\Xi)$ задовольняє означення е-множини.

1.2. Необхідні означення та теореми з евклідової комбінаторної оптимізації

Розглянемо занурення евклідових комбінаторних множин в арифметичний евклідів простір $\mathbf{R}^k$.

Означення 1.2 [107, 111]. Нехай $\mathbf{E}$ – евклідова комбінаторна множина, а $\mathbf{e}$ – елемент $\mathbf{E}$ в зображенні (1.3). Тоді відображення $\varphi:\mathbf{E}\to\mathbf{E}_f\subset\mathbf{R}^k$ називають зануренням $\mathbf{E}$ в арифметичний евклідів простір, якщо φ ставить множину $\mathbf{E}$ у взаємно однозначну відповідність множині $\mathbf{E}_\varphi$ за таким правилом: для $\mathbf{e}=(g_{i_1},g_{i_2},...,g_{i_k})\in\mathbf{E}$,

$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{e})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k) \in \mathbf{E}_\varphi$ маємо $\mathbf{x}_j = \mathbf{g}_{i_j} \quad \forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}_k$.

Множину $\mathbf{E}_\varphi$ називають [24; 111] спеціальною комбінаторною множиною. Для скорочення позначень далі будемо використовувати також її позначення **c**-комбінаторна множина, або **c**-множина. Зауважимо, що **c**-множина є також евклідовою комбінаторною множиною, яку коротко будемо називати **e**-комбінаторною множиною, або **e**-множиною. Для множин, розглянутих раніше **e**-множини, позначають [24; 111] так:

$$\overline{\mathbf{E}}_n^k(\mathbf{G}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{A}}_n^k(\mathbf{G})); \qquad \mathbf{E}_n^k(\mathbf{G}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}_n^k(\mathbf{G}));$$

$$\mathbf{E}_{\eta n}^k(\mathbf{G}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}_{\eta n}^k(\mathbf{G})); \qquad \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G}, \mathbf{H}));$$

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{G}) = \mathbf{f}(\mathbf{P}_k(\mathbf{G})); \qquad \mathbf{E}_{kn}(\mathbf{G}) = \mathbf{f}(\mathbf{P}_{kn}(\mathbf{G}));$$

$$\mathbf{E}_{kn}^s(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = \mathbf{f}(\mathbf{P}_{kn}^s(\mathbf{G}, \mathbf{H})).$$

Серед множини задач комбінаторного типу, які описуються задачею (1.1), (1.2) виділяють задачі [24; 111], в яких комбінаторною множиною є евклідова комбінаторна множина $\mathbf{E}$. Із задач (1.1), (1.2) маємо:

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}^*) = \operatorname*{\mathbf{extr}}_{\mathbf{g} \in \mathbf{E}} \mathbf{F}(\mathbf{g}); \tag{1.4}$$

$$\mathbf{g}^* = \operatorname*{\mathbf{arg\,extr}}_{\mathbf{g} \in \mathbf{E}} \mathbf{F}(\mathbf{g}). \tag{1.5}$$

Введення занурення φ дає можливість перейти від розв'язування задачі (1.4), (1.5) до такої: знайти пару $< \Phi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* >$,

де
$$\Phi(\mathbf{x}^*) = \operatorname*{\mathbf{extr}}_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_\varphi} \Phi(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$

$$\mathbf{x}^* = \operatorname*{\mathbf{arg\ extr}}_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_\varphi} \Phi(\mathbf{x}). \tag{1.7}$$

Тут $\Phi(\mathbf{x})$ – функція $\mathbf{k}$ змінних, що означена на множині $\mathbf{E}, \Phi : \mathbf{E} \to \mathbf{R}^1$, яка відповідає [24; 111] функціоналу $\mathbf{F}(\mathbf{g}), \mathbf{g} \in \mathbf{E}$.

Означення 1.3. Задачу (1.6), (1.7) називають [24; 111] евклідовою задачею комбінаторної оптимізації, або коротко **e**-задачею.

Також задачу (1.6), (1.7) розглядають, якщо це зручно, в такому вигляді: знайти пару $< \Phi(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* >$,

де
$$\Phi(\mathbf{x}^*) = \operatorname*{\mathbf{extr}}_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_\psi} \Phi(\mathbf{x}), \tag{1.8}$$

$$x^* = \arg\operatorname{extr}_{x \in E_\psi} \Phi(x), \qquad (1.9)$$

при обмеженнях:

$$\psi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r, \qquad (1.10)$$

$$\psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i \in J_s, \qquad (1.11)$$

де r,s – деякі цілі невід'ємні константи, а множина $E_\psi \subset R^k$ і функції $\psi^i : E_\psi \to R^1 \quad \forall i \in J_{r+s}$ такі, що

$$E_\varphi = \{x | x \in E_\psi, \quad \psi^i(x) \le 0 \quad \forall i \in J_r; \ \psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i \in J_s\}.$$

Обмеження (1.10), (1.11) називають [24; 111] додатковими обмеженнями евклідової комбінаторної задачі. Якщо $r+s=0$, тобто додаткових обмежень немає, то задачу (1.8)-(1.11) називають евклідовою безумовною задачею комбінаторної оптимізації, в іншому випадку – умовною евклідовою комбінаторною задачею.

Нехай M_i є d_i-вимірним многогранником $\forall i \in J_s$. Як відомо (дивись наприклад [22]), під добутком многогранників $M_1,\dots, M_s$ розуміють множину

$$\bigotimes_{i=1}^{s} M_i = \{x \in R^{d_1+\dots+d_s} \mid x = (x_1,\dots,x_s), \quad x_i \in M_i \quad \forall i \in J_s\}.$$

Далі нам буде потрібна наступна лема, що приводиться згідно з [72; 111].

Лема 1.1. (2.20 з [111]).

1. Добуток многогранників є многогранником;

2. $\dim(\bigotimes_{i=1}^{s} M_i) = \sum_{i=1}^{s} \dim M_i$,

де $\dim A$ – вимірність множини A;

3. k-вимірні грані многогранника $\bigotimes_{i=1}^{s} M_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\bigotimes_{i=1}^{s} F_i$, де F_i є k_i-вимірна грань многогранника M_i та $k_1 + \dots + k_s = k$.

Позначимо $\Pi^k_{\eta n}(G) = \operatorname{conv} E^k_{\eta n}(G)$ і назвемо загальним многогранником розміщень. Нехай елементи мультимножини $G = \{g_1,\dots,g_\eta\}$ упорядковані таким чином:

$$g_1 \le \ldots \le g_\eta . \qquad (1.12)$$

Теорема 1.1. (2.31 з [111]).

Загальний многогранник розміщень $\Pi^k_{\eta n}(G)$ задається системою нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{|\varpi|} g_j \le \sum_{i\in\varpi} x_i \le \sum_{j=1}^{|\varpi|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \varpi \subset J_k . \qquad (1.13)$$

Теорема 1.2. (2.33 з [111]).

Точка $x \in \Pi^k_{\eta n}(G)$ – вершина загального многогранника розміщень тоді і тільки тоді, коли її координати є переставленнями чисел g_1, g_2, …, g_s, $g_{\eta-r+1}$, $g_{\eta-r+2}$, …, g_η, де $r,s \in J^0_k$, $s+r=k$.

Теорема 1.3. (2.35 з [111]).

Якщо $x \in R^k$ – вершина загального многогранника розміщень $\Pi^k_{\eta n}(G)$, то всі суміжні з нею вершини одержують або переставленням у x компонент g_i, g_{i+1} ($g_i \ne g_{i+1}$, $i \in J_{s-1}$, $i \in J_{\eta-1} \setminus J_{\eta-r}$), або заміною компоненти g_s ($g_{\eta-r+1}$) на $g_{\eta-r}$ (g_{s+1}), де відповідно $g_s \ne g_{\eta-r}$ ($g_{\eta-r+1} \ne g_{s+1}$), $r,s \in J^0_k$, $s+r=k$.

Лема 1.2. (3.29 з [111]).

Якщо $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E \subset X$, то:

1. $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \ge \varphi(y) - (p(y), y) + \min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i . \qquad (1.14)$$

2. Щоб точка $y \in E \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині E функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови:

$$\min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i = (p(y), y) , \qquad (1.15)$$

де $p(y) = (p_1(y), \ldots, p_k(y))$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ у точці y.

Лема 1.3. (3.40 з [111]).

Якщо $\mathbf{E}$ – евклідова комбінаторна множина простору $\mathbf{R}^k$, яка утворюється з мультимножини $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ точка $c=(c_1,...,c_k)\in \mathbf{R}^k$ та $x=(x_1,...,x_k)\in \mathbf{R}^k$, то

$$\min_{x\in E}\|x-c\|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \tag{1.16}$$

де переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняють умову:

$$|g_{\delta_1}| \le |g_{\delta_2}| \le ... \le |g_{\delta_\eta}|. \tag{1.17}$$

Як відомо [131], функцію $\psi(x)$, яка задана на деякій множині X, називають сильно опуклою, якщо існує стала $\rho>0$ така, що $\forall x,y\in X$ таких, що $[x,y]\subset X$, і $\forall\alpha\in[0,1]$, буде виконуватися нерівність:

$$\psi(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha\psi(x)+(1-\alpha)\psi(y)-\alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2.$$

Величину ρ називають параметром сильної опуклості.

Лема 1.4. (3.44 з [111]).

Якщо $\mathbf{E}$ – евклідова комбінаторна множина простору $\mathbf{R}^k$, яка утворюється з мультимножини $G=\{g_1,...,g_\eta\}$, функція $\psi(x)$ сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset \mathbf{R}^k$, $E\subset X$, то

$$\min_{x\in E}\psi(x)\ge \psi(w)+\rho\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \tag{1.18}$$

де точка w означається формулою:

$$w=(w_1,...,w_k)=\arg\min_{x\in X}\psi(x), \tag{1.19}$$

а переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (1.17).

Лема 1.5. (3.48 з [111]).

Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset \mathbf{R}^k$, $E\subset X$, то:

1) $\forall x\in X$

$$\min_{x\in E}\psi(y)\ge\psi(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2+$$

$$+\min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i)y_i\ ; \qquad (1.20)$$

2) щоб точка $x\in X$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині E, достатньо виконання умови:

$$\min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}-2\rho x_i)y_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i-\rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2-\rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2, \qquad (1.21)$$

де переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняють умову (1.17).

Лема 1.6. (3.52 з [111]).

Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то

$$\min_{x\in E}\psi(x)\ge\psi(x)+\rho\|g^*-w\|^2, \qquad (1.22)$$

де w – точка яка задовольняє умову (1.19); а g^* – співвідношення

$$g^*=\arg\min_{x\in E}\|x-c\|^2,\quad c\in R^k, \qquad (1.23)$$

в якому $c\equiv w$.

Лема 1.7 (3.55 з [111]).

Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то:

1) $\forall x\in X$

$$\min_{x\in E}\psi(y)\ge\psi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2+\rho\|g^*-c\|, \qquad (1.24)$$

2) щоб точка $x\in X$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині E, достатньо виконання умови:

$$\|\nabla\psi(x)\|^2=2\rho\|g^*-c\|, \qquad (1.25)$$

де точка g^* означається умовою (1.23) при

$$c=x-\frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x). \qquad (1.26)$$

ГЛАВА 2

Евклідова комбінаторна множина поліррозміщень та її опукла оболонка

У математичних моделях у вигляді задач оптимізації на комбінаторних множинах та при розробці методів їх розв'язування важливими виявляються властивості комбінаторних множин, що є допустимими в цих задачах, а також їх опуклих оболонок. Ця проблематика достатньо добре досліджена для множин розміщень, сполучень, переставлень та поліпереставлень [52; 111]. У цій главі викладені результати досліджень комбінаторної множини поліррозміщень, яка дає можливість розглядати одержані раніше результати з більш загальних позицій.

2.1. Постановка задачі

Розглянемо множину поліррозміщень.

Нехай $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел з основою $S(G)=(e_1, ..., e_n)$ первинною специфікацією $[G]=(\eta_1^G,...,\eta_n^G)$, $\eta_1^G+...+\eta_n^G=\eta$, $1\le\eta_i^G\le k$ $\forall i\in J_n=\{1,...,n\}$. Розглянемо упорядковане розбиття множини J_η на s множин $N_1,...,N_s$, що задовольняє умови $N_i\cap N_j=\varnothing$, $N_i\ne\varnothing$ $\forall i,j\in J_s$, а також упоряд кване розбиття числа k на s доданків $k_1,...,k_s$, що задовольняють умови $1\le k_i\le\eta_i$ $\forall i\in J_s$, де $\eta_i=|N_i|$. Очевидно, що $k_1+...+k_s=k$ $\eta_1+...+\eta_s=\eta$. Позначимо $J_n^0=J_n\cup\{0\}$.

Нехай H – множина всіх k-виборок з множини J_η вигляду

$$\pi=(\pi(1),...,\pi(k))=(\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s})=(\pi^1,...,\pi^i,...,\pi^s),$$

де $\pi^i=(\pi_{i1},...,\pi_{ik_i})$ – довільна k_i - вибірка з множини N_i $\forall i\in J_s$.

Множину $A_{\eta n}^{ks}(G,H)=\{(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)})\,|\,\forall\pi\in H\}\subset R^k$ називають множиною поліррозміщень з повтореннями.

Після занурення [111] множини $A_{\eta n}^{ks}(G,H)$ у R^k (тобто розглядаючи її точки як точки з R^k) її образ позначають $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ і називають евклідовою комбінаторною множиною поліррозміщень з повтореннями або загальною множиною поліррозміщень.

Розглянемо опуклу оболонку загальної множини полірозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, позначимо її $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H) = \mathrm{conv} E_{\eta n}^{ks}(G,H)$. Назвемо $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ загальним многогранником полірозміщень. Поставимо задачу: дослідити властивості $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ та $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

2.2. Доведення допоміжних тверджень

Нехай $G^{N_i} \subset G$ η_i-елементна мультимножина ($\eta_i = |N_i|$ $\forall i \in J_s$), що утворена елементами з G $g_1^{N_i}, g_2^{N_i}, ..., g_{\eta_i}^{N_i}$ з номерами з множини N_i, $\eta_1 + ... + \eta_n = \eta$. Тобто $G = \sum\limits_{i=1}^{s} G^{N_i}$. Упорядкуємо, не порушуючи загальності подальших міркувань, компоненти мультимножини G^{N_i}:

$$g_1^{N_i} \le ... \le g_{\eta_i}^{N_i}. \qquad (2.1)$$

Покладемо

$$N_i' = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{i-1} k_j \right) + 1, \left(\sum_{j=1}^{i-1} k_j \right) + 2, ..., \sum_{j=1}^{i} k_j \right\} \forall i \in J_s. \qquad (2.2)$$

Розглянемо многогранник Π, що визначається сукупністю всіх розв'язків системи

$$\sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{N_i} \le \sum_{j \in \omega^i} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_{\eta_i - j + 1}^{N_i} \quad \forall \omega^i \subset N_i' \quad \forall i \in J_s. \qquad (2.3)$$

Якщо зафіксуємо $i \in J_s$, то з системи (2.3) одержимо систему

$$\sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{N_i} \le \sum_{j \in \omega^i} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_{\eta_i - j + 1}^{N_i} \quad \forall \omega^i \subset N_j', \qquad (2.4)$$

яка, очевидно, описує многогранник розміщень [111, с. 51] $\Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i})$, де n_i – кількість елементів основи мультимножини G^{N_i}.

Лема 2.1.

Многогранник Π є добутком многогранників $\Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i})$ $\forall i \in J_s$, тобто

$$\Pi = \bigotimes_{i=1}^{s} \Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i}). \qquad (2.5)$$

Доведення. За означенням добутку многогранників

$$\mathop{\otimes}_{i=1}^{s} \Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i}) = \{x \in R^{d_1+\ldots+d_s} \mid x = (X_1, \ldots, X_s),$$

$$X_i \in \Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i})\ \forall i \in J_s\}, \qquad (2.6)$$

де $d_i = \dim \Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i})$.

Очевидно, що

$$X_j = (x_{m_j+1}, \ldots, x_{m_j+k_j}), \qquad (2.7)$$

$$m_0 = 0, k_0 = 0, m_j = m_{j-1} + k_{j-1} \quad \forall j \in J_s,$$

$$X_j \in \Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i}).$$

Але права частина рівності (2.6) означає, що довільне $\mathbf{x}$ задовольняє $\forall i \in J_s$ систему (2.4), тобто $\mathbf{x}$ є розв'язком системи (2.3), тобто $x \in \Pi$. Це й означає виконання рівності (2.5), яку треба було довести.

Зауваження 2.1. Точку $X_j \in R^{k_j}$ з (2.7) можна ще описати як $X_j = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$, де $\{i_1, \ldots, i_j\} = N'_j$ у вигляді (2.2) та $i_1 < \ldots < i_j, \forall j \in J_s$.

Лема 2.2.

Точка $x = (X_1, \ldots, X_s) \in \Pi$, де X_j визначається співвідношенням (2.7) – вершина многогранника Π тоді і тільки тоді, коли компоненти $x_{m_j+1}, \ldots, x_{m_j+k_j}$ вектора X_j є переставленням чисел

$$g_1^{N_j}, g_2^{N_j}, \ldots, g_{s_j}^{N_j}, g_{\eta_j - r_j+1}^{N_j}, g_{\eta_j - r_j+2}^{N_j}, \ldots, g_{\eta_j}^{N_j},$$

де $$r_j, s_j \in J^0_{k_j}, s_j + r_j = k_j \quad \forall j \in J_s. \qquad (2.8)$$

Доведення. Як відомо (див., наприклад, лему 1.1 (п. 3), вершини многогранника

$$\Pi = \mathop{\otimes}_{i=1}^{s} \Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i})$$

утворюють множину $\mathop{\otimes}_{i=1}^{s} F_i$, де F_i є τ_i – вимірна грань многогранника

$$\mathop{\otimes}_{i=1} \Pi\ {}^{i}_{i\ i}(G\ {}^{i}),$$

та $\tau_1 + \ldots + \tau\ = 0 \quad (\tau_i \geq 0)$. Отже, $\tau_i = \dim F_i = 0$. Таким чином, якщо

$x = (X_1, X_2, ..., X_s)$ – вершина многогранника **П**, то X_i – вершина многогранника $\Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i})$, і навпаки, оскільки за лемою 1.1 (п. 2)

$$\dim \bigotimes_{i=1}^{s} F_i = \sum_{i=1}^{s} \dim F_i .$$

А за теоремою 1.2 (див. також теорему 2 [109] або теорему 3.3 [52]) точка X_i є вершиною многогранника $\Pi^{k_i}_{\eta_i n_i}(G^{N_i})$ *для фіксованого* $\forall i \in J_s$ тоді і тільки тоді, коли її координати є переставленням чисел

$$g_1^{N_i}, ..., \quad g_{s_i}^{N_i}, \quad g_{\eta_i - r_i + 1}^{N_i}, ..., \quad g_{\eta_i}^{N_i} ,$$

де $r_i, s_i \in J^0_{k_i}$, $s_i + r_i = k_i$. Що і доводить лему.

Лема 2.3.

Якщо $E = E_K \bigcup E_B$, $\Pi = \mathrm{conv}E_K$, $E_B \subset \Pi$, то $\Pi = \mathrm{conv}E$.

Доведення. За означенням опуклої оболонки (див., наприклад, [132, с. 24]) $\mathrm{conv}E_K$ є перерізом усіх опуклих множин $Co^\alpha E_K$, що містять E_K, тобто $\Pi = \mathrm{conv}E_K = \bigcap_\alpha Co^\alpha E_K$.

Оскільки $E_B \subset \Pi$, то за означенням перерізу множин $\forall x \in E_B$ $\forall \alpha$ виконується співвідношення $x \in Co^\alpha E_K$, у тому числі і для $\alpha = \beta$, при якому $Co^\alpha E_K = \Pi$, тобто $x \in \Pi$. Тобто $\forall \alpha$ $E_K \bigcup E_B \subset Co^\alpha E_K$, а значить $E = E_K \bigcup E_B \subset Co^\alpha E_K = \Pi$.

А це за означенням опуклої оболонки і дає

$$\Pi = \bigcap_\alpha Co^\alpha (E_K \bigcup E_B) = \bigcap_\alpha Co^\alpha E = \mathrm{conv}E .$$

Що і треба було довести.

2.3. Опис опуклої оболонки евклідової множини полірозміщень

Теорема 2.4.

Многогранник $\Pi^{ks}_{\eta n}(G,H)$ збігається з многогранником **П**.

Доведення. Спершу доведемо, що вершини **П** належать множині $E^{ks}_{\eta n}(G,H)$.

Згідно з лемою 2.2 точка $x = (X_1, ..., X_s) \in \mathrm{vert}\Pi$ тоді і тільки тоді, коли компоненти $x_{m_j+1}, ..., x_{m_j+k_j}$ є переставленням чисел

$$g_1^{N_j}, g_2^{N_j}, \ldots, g_{s_j}^{N_j}, g_{\eta_j - r_j + 1}^{N_j}, g_{\eta_j - r_j + 2}^{N_j}, \ldots, g_{\eta_j}^{N_j}$$

і виконується умова (2.8). Але за означенням множини $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ точки $\mathbf{x}$ належать $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$. Покажемо, що довільні точки множини $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ (а не тільки ті, що є вершинами многогранника $\mathbf{\Pi}$) належать $\mathbf{\Pi}$. Нехай $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{X}_1, \ldots \mathbf{X}_s)$, де $\mathbf{X}_i$ задовольняє умову (2.7). Розглянемо з $\mathbf{x}$ $\mathbf{X}_i$, тобто елементи g_j, $j \in \omega^i \subset N_i' \subset N_i$, $i \in J_s$. За означенням $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ точка $\mathbf{X}_j$ – це $\mathbf{k}_i$-вибірка з мультимножини $\mathbf{G}^{N_i}$, $i \in J_s$, для елементів якої виконується умова (2.1). Тому виконуються нерівності

$$\sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{N_i} \le \sum_{j \in \omega^i} g_j \le \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_{\eta_i - j + 1}^{N_i} \quad \forall \omega^i \subset N_i' \quad \forall i \in J_s . \qquad (2.9)$$

Співвідношення (2.9) – це не що інше, як підставлення координат довільної точки $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ у нерівності (2.3), які описують многогранник $\mathbf{\Pi}$. Отже, оскільки (2.3) у довільній точці загальної множини полірозміщень виконуються, одержали, що $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \subset \mathbf{\Pi}$.

Далі скористаємося лемою 2.3, прийнявши: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, $\mathbf{E_K}$ – підмножина множини $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, така, що $\mathbf{E_K} = \mathbf{vert\Pi}$, $\mathbf{E_B} = \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \setminus \mathbf{vert\Pi}$. Тоді дійсно,

$$\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) = (\mathbf{vert\Pi}) \cup \mathbf{E_B} = \mathbf{E_K} \cup \mathbf{E_B} .$$

Многогранник $\mathbf{\Pi}$, що визначається системою (2.3), збігається з опуклою оболонкою своїх вершин: $\mathbf{\Pi} = \mathbf{conv(vert\Pi)}$ (див., наприклад, теорему 2.2 [22, с. 19]). Доведено вище, що $\mathbf{E_B} \subset \mathbf{\Pi}$. Отже, згідно з лемою 2.3, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{conv}\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, що за означенням загального многогранника полірозміщень $\mathbf{\Pi}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ і означає: $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$. Таким чином, теорема доведена.

З теореми 2.4 та означення многогранника $\mathbf{\Pi}$ одержуємо таке твердження.

Теорема 2.5.

Загальний многогранник полірозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ описується системою (2.3).

2.4. Властивості многогранника полірозміщень

Як наслідки з теореми 2.4 та означення многогранника Π леми 2.2 та леми 2.1 відповідно маємо наступні твердження.

Теорема 2.6. Критерій вершини многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

Точка $x=(X_1,...,X_s)$, де X_j визначається співвідношенням (2.7), є вершиною загального многогранника полірозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ тоді і тільки тоді, коли компоненти $x_{m_j+1},...,x_{m_j+k_j}$ вектора X_j є переставленням чисел

$$g_1^{N_j}, g_2^{N_j},..., g_{s_j}^{N_j}, g_{\eta_j-r_j+1}^{N_j}, g_{\eta_j-r_j+2}^{N_j},..., g_{\eta_j}^{N_j}$$

при виконанні умови (2.8).

Теорема 2.7.

Загальний многогранник полірозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ є добутком многогранників розміщень $\Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i})$ $\forall i \in J_s$.

$$\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H) = \bigotimes_{i=1}^{s} \Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i}). \qquad (2.10)$$

Наслідок 2.7.1. Якщо $k_i = \eta_i - 1$ $\forall i \in J_s$, то загальна множина поліроміщень збігається з множиною вершин загального многогранника полірозміщень:

$$E_{\eta n}^{ks}(G,H) = \text{vert}\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H). \qquad (2.11)$$

Доведемо критерій суміжності вершин многогранника поліроміщень.

Теорема 2.8. Критерій суміжності вершин многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

Якщо $x \in R^k$ – вершина загального многогранника полірозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$, то всі суміжні з нею вершини одержуються або переставленням у x компонент $g_i^{N_j}$, $g_{i+1}^{N_j}$ $(g_i^{N_j} \neq g_{i+1}^{N_j})$, $i \in J_{s_j-1}, i \in J_{\eta_j-1} \setminus J_{\eta_j-r_j}$, або заміною компоненти $g_{s_j}^{N_j}$ $(g_{\eta_j-r_j+1}^{N_j})$ на $g_{\eta_j-r_j}^{N_j}$ $(g_{s_j+1}^{N_j})$, де відповідно $g_{s_j}^{N_j} \neq g_{\eta_j-r_j}^{N_j}$ $(g_{\eta_j}^{N_j} \neq g_{s_j+1}^{N_j})$, $r_j, s_j \in J_{k_j}^0; s_j + r_j = k_j, j \in J_s$.

Доведення. Воно ґрунтується на тому факті, що **k**-вимірні грані многогранника $\bigotimes_{i=1}^{s} \mathbf{M}_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\bigotimes_{i=1}^{s} \mathbf{F}_i$, де $\mathbf{F}_i$ – це k_i-вимірна грань многогранника $\mathbf{M}_i$ та $k_1 + ... + k_s = k$ (див., наприклад, лему 1.1, п. 3). При **k** = 1 (коли розглядається ребро) маємо, що $k \geq 0$, $k_1 + ... + k_s = 1$. Тобто $\exists j \in J_s$ таке, що $k_j = 1$, а $\forall i \neq j, i \in J_s, k_i = 0$. Це означає, що на ребрі многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$, який за теоремою 2.7 є добутком

$$\bigotimes_{=1}^{s} \Pi_{\eta\ n}^{k} (G^{N}\ )$$

лежать тільки ті вершини, які мають відповідні координати – вершини $\Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i})$, $(i \neq j)$, а для j, такого, що $k_j = 1$, це вершини, що лежать на ребрі многогранника $\Pi_{\eta_j n_j}^{k_j}(G^{N_j})$, тобто суміжні вершини цього многогранника. За теоремою 1.3 для вершини **x** многогранника $\Pi_{\eta_i n_i}^{k_i}(G^{N_i})$ суміжні з нею вершини одержують або переставленням нерівних компонент $g_i^{N_j}$, $g_{i+1}^{N_j}$ $i \in J_{s_j-1} \cup (J_{\eta_j-1} \setminus J_{\eta_j-r_j})$, або заміною компоненти, що дорівнює $g_{s_j}^{N_j}$ (або $g_{\eta_j-r_j+1}^{N_j}$) на $g_{\eta_j-r_j}^{N_j}$ (або на відповідно $g_{s_j+1}^{N_j}$), де $r_j, s_j \in J_{k_j}^0; s_j + r_j = k_j, j \in J_s$. Це, з урахування сталості інших компонент вершини многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ (відповідні $k_i = 0$), і дає справедливість твердження теореми.

Занурення множини полірозміщень в евклідів простір дає також можливість одержати властивості множини $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, викладені далі.

Теорема 2.9.

Множина $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ симетрична відносно будь-якої гіперплощини вигляду:

$$x_j - x_m = 0, \quad \forall j,m \in \omega^i \subset N_i' \quad \forall i \in J_s,$$

де N_i' обчислюється за (2.2).

Доведення. Розглянемо довільну точку $A(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_m,..., \alpha_k) \in$ $\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, $\alpha_j \neq \alpha_m$, і обчислимо її відстань від площини T_{jm}, що задається рівнянням $x_j - x_m = 0$. Ця відстань, очевидно, дорівнює $h_A = |\alpha_m - \alpha_j| / \sqrt{2}$. Розглянемо точку B, яку одержимо з A переставленням α_j і α_m: $B = (\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_m,...,\alpha_k)$. Згідно з тим, що з умови $j,m \in \omega^i \subset N_i'$ $\forall i \in J_s$, то $B \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$. Відстань точки B від гіперплощини T_{jm} дорівнює $h_B = |\alpha_m - \alpha_j| / \sqrt{2}$. Очевидно, що точки A та B лежать по різні сторони площини T_{jm}. Зазначимо, що якщо $\alpha_j = \alpha_m$, то $A \in T_{jm}$. Легко бачити, що пряма L_{jm}, яка проходить через точки A та B має напрямний вектор $q = (q_1,...,q_k)$, де $q_m = \alpha_j - \alpha_m$, $q_j = \alpha_m - \alpha_j$, $q_t = 0$ $\forall t \in J_k \setminus \{m,j\}$. Оскільки напрямний вектор прямої L_{jm} паралельний нормальному вектору гіперплощини T_{jm}, то $L_{jm} \perp T_{jm}$ $\forall j \neq m$, $j,m \in \omega^i \subset N_i'$ $\forall i \in J_s$. В силу довільності вибору точки A і площини T_{jm}, того, що $h_A = h_B$, одержуємо справедливість теореми.

Теорема 2.10.

Нехай $\eta_i = k_i$, мультимножина $G^{N_i} = \{g_1^{N_i},...,g_{k_i}^{N_i}\}$, упорядкована умовою $g_1^{N_i} \geq ... \geq g_{k_i}^{N_i}$, $\forall i \in J_s$, має основу $S(G^{N_i}) = (e_1^i,...,e_{n_i}^i)$, де $e_1^i > ... > e_{n_i}^i$, $\forall i \in J_s$; та первинну специфікацію $[G^{N_i}] = (p_1^i,...,p_{n_i}^i)$, $p_1^i + ... + p_n^i = k_i$ $\forall i \in J_s$. Нехай $k_0^i = 0, k_1^i = p_1^i, k_2^i = p_1^i + p_2^i,...,$ $k_{n_i}^i = p_1^i + ... + p_{n_i}^i = k_i$ $\forall i \in J_s$.

а) нехай F – m-грань многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$. Тоді знайдуться такі підмножини:

$$\varnothing = \omega_0^i \subset \omega_1^i \subset ... \subset \omega_{k_i - m_i}^i = N_i' \quad \forall i \in J_s, \quad m_1 + ... + m_s = m, \quad (2.12)$$

для яких або всі ліві, або всі праві нерівності з (2.3) обертаються у рівності при будь-якому $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$, тобто відповідні обмеження є жорсткими для $\mathbf{F}$. При цьому $\mathbf{F}$ – множина розв'язків системи, одержаної з (2.3) заміною нерівностей рівностями для $\omega_{\delta_i}^i$ $\forall \delta_i \in J_{k_i - m_i}^0$ $\forall i \in J_s$;

б) якщо для підмножин

$$\varnothing = \omega_0^i \subset \omega_1^i \subset ... \subset \omega_{q_i}^i = N_i' \quad \forall i \in J_s \qquad (2.13)$$

або всі ліві, або всі праві нерівності в (2.3) замінити рівностями, то множина $\mathbf{F}$ розв'язків одержаної системи є $\mathbf{m}$-гранню многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$, де $m = m_1 + ... + m_s$, а $m_i = k_i - \{q_i - \sum(|\omega_{\delta_i}^i| - |\omega_{\delta_i - 1}^i| - 1)\}$

і підсумовування проводиться по всім індексам $\delta_i \in J_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j \in J_{n_i}$, що $k_{j-1}^i \le |\omega_{\delta_i - 1}^i|$ та $|\omega_{\delta_i}^i| \le k_j^i$ (вважаємо, що $|\omega_0^i| = 0$), $\forall i \in J_s$.

Доведення. Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.28 з [111].

Нехай є дві $\mathbf{m}$-грані S_1^m та S_2^m многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ $m \in J_{k-1}$. Тоді за теоремою 2.10 при виконанні її умов існує множина

$\Omega_1^m = \{\bar{\omega}_j^i \mid \forall j \in J_{k_i - m_i} \forall i \in J_s\}$ для S_1^m та $\Omega_2^m = \{\bar{\bar{\omega}}_j^i \mid \forall j \in J_{k_i - m_i} \forall i \in J_s\}$ для S_2^m.

Ці множини задовольняють умову (2.12). Нехай виконується співвідношення

$$S_1^m \cap S_2^m = S^{m-1}, \quad m \in J_{k-1}. \qquad (2.14)$$

За теоремою 2.10 існує множина

$$\Omega^{m-1} = \{\omega_j^i \mid \forall j \in J_{k_i - m_i} \forall i \in J_s\},$$

що відповідає $(m-1)$ – грані S^{m-1} і задовольняє умову вигляду (2.12), в якій $m_1 + ... + m_s = m - 1$ Оскільки в точках грані S^{m-1} повинні одночасно виконуватися обмеження, що описують грані S_1^m та S_2^m, то

$$\Omega^{m-1} = \Omega_1^m \cup \Omega_2^m. \qquad (2.15)$$

Припустимо, що виконується умова (2.15). З теореми 2.10 випливає, що існують грані S_1^m та S_2^m, що визначаються множинами

Ω_1^m та Ω_2^m, але в силу (2.15) маємо (2.14). Таким чином, при виконанні умов теореми 2.10 доведено наступний критерій суміжності граней многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

Теорема 2.11.

Для того, щоб дві **m**-грані S_1^m та S_2^m многогранника $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ були суміжними, необхідно і достатньо, щоб множина Ω^{m-1} у зображенні (2.15) визначала **(m-1)**-грань S^{m-1}, $m \in J_{k-1}$.

У роботі [111] розглянуто розкладання множини $E_{kn}(G)$ по сім'ям паралельних $(k-2)$-площин. Аналогічні результати можуть бути одержані для множини $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ на основі підходу з [111], а саме: кожна нерівність системи (2.3) породжує множину $D_{|\omega^i|}(\alpha_1^i,...,\alpha_{|\omega^i|}^i)$, яка містить не більше $\binom{\eta_i}{|\omega^i|}$ паралельних між собою гіперплощин вигляду

$$\sum_{j\in\omega^i} x_j = \sum_{j=1}^{|\omega^i|} g_{\beta_j^i}^{N_i},$$

на яких лежать точки множини $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, де $(x_1,...,x_k)\in R^k$, $\beta_j^i \in J_{\eta_i}$, $\beta_m^i \ne \beta_j^i$ при $m \ne j$, $m,j \in J_{|\omega^i|}$, $\omega^i = \{\alpha_1^i,...,\alpha_{|\omega^i|}^i\} \subset N_i'$, $\forall i \in J_s$.

Зазначимо, що при $s=1$ маємо $E_{\eta n}^{k1}(G,H) = E_{\eta n}^{k}(G)$, а це – евклідова загальна множина **k**-розміщень; при $k=\eta$ $E_{\eta n}^{ks}(G,H) = E_{kn}^{s}(G,H)$. Тобто $E_{kn}^{ks}(G,H)$ є евклідовою множиною поліпереставлень, якщо при цьому ще й $s=1$, то $E_{kn}^{k1}(G,H) = E_{kn}(G)$, це – евклідова загальна множина переставлень, або, в залежності від складу G, – її певний частковий випадок (переставлення без повторень тощо [22; 52; 111]). Тому з розглянутих властивостей випливають часткові випадки для цих множин.

2.5. Моделювання деяких задач з використанням множин полірозміщень

2.5.1. Задача формування портфеля цінних паперів та її математичні моделі у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізації на поліроміщеннях

Розглянемо задачу вибору портфеля цінних паперів. Нехай **V** – вільний капітал, який можна вкласти в наступному інвестиційному періоді в цінні папери (акції) **s** видів. Цінний папір виду **i** реалізується пакетами по кілька акцій, вартість пакету складає c_i грошових одиниць, $i \in J_s = \{1,2,...,s\}$. Нехай x_i – кількість пакетів, що купуються (або продаються, якщо $x_i < 0$), для **i**-го виду акцій. Нехай існують обмеження

$$N_i^H \le x_i \le N_i^B, \tag{2.16}$$

пов'язані з політикою інвестора.

Нехай є статистичні дані по кожному виду вкладень за останні T_i інвестиційних періодів, які віддзеркалюють коливання їх вартості та виплат дивідендів протягом цього терміну, тобто відомі **p(i,t)** – вартість цінних паперів **i**-го виду на початку інвестиційного періоду **t**, **d(i,t)** – сумарні дивіденди, одержані від них у цей період.

Для побудови математичної моделі підрахуємо прибуток від вкладення кожного виду цінних паперів. Позначимо **P(i,t)** – загальний прибуток в інвестиційному періоді **t** на одну грошову одиницю вкладення в цінні папери виду **i**. Тоді

$$P(i,t) = (p(i,t+1) - p(i,t) + d(i,t))/p(i,t). \tag{2.17}$$

Значення **P(i,t)** – непостійні в різні інвестиційні періоди, тому для оцінки доцільності вкладення в цінні папери потрібно обчислити середній прибуток від цінних паперів виду **i** на одну грошову одиницю

$$a_i = (\sum_{t=1}^{T_i} P(i,t))/T_i. \tag{2.18}$$

Тоді загальна величина **D** прибутку, що очікується, обчислюється так:

$$D(x_1,...,x_s) = \sum_{i=1}^{s} a_i c_i x_i. \tag{2.19}$$

Для формалізації обмежень на $x_i, i \in J_s$ скористаємося апаратом евклідових комбінаторних множин.

Розглянемо мультимножину (точніше множину):

$$G^{N_i} = S(G^{N_i}) = \{N_i^H, N_i^H + 1,...,N_i^B\},\ |G^{N_i}| = n_i = N_i^B - N_i^H + 1,\ [G^{N_i}] = (1^{n_i}),$$

$\forall i \in J_s$ та утворимо евклідову множину полірозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, в якій $k=s$, $k_i=1$ $\forall i \in J$, мультимножина G є сумою G^{N_i} (як мультимножин):

$$G=\sum_{i=1}^{s} G^{N_i}=\{N_1^H,...,N_1^B,N_2^H,...,N_2^B,...,N_s^H,...,N_s^B\},$$

множини N_i визначаються співвідношенням:

$$N_i=\left\{(\sum_{j=1}^{i-1} n_j)+1,(\sum_{j=1}^{i-1} n_j)+2,...,\sum_{j=1}^{i} n_j\right\} \quad \forall i \in J_s$$

та $n=|S(G)|$, $[G]=(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta=\eta_1+...+\eta_n$, $\eta=n_1+...+n_s$.

Тоді можна записати обмеження (2.16) з урахуванням цілочисловості x_i, $i \in J_s$ у вигляді:

$$x=(x_1,...,x_s) \in E_{\eta n}^{ks}(G,H). \tag{2.20}$$

Запишемо також обмеження, що витікає з обсягу наявності вільного капіталу

$$\sum_{i=1}^{s} c_i x_i \le V. \tag{2.21}$$

Тоді розглянута задача вибору портфеля цінних паперів може бути адекватно представлена математичною моделлю у вигляді такої задачі евклідової комбінаторної оптимізації.

Модель 1: знайти упорядковану пару $<D^*,x^*>$ таку, що

$$D^*=D(x^*)=\max_{x \in R^s} D(x), \tag{2.22}$$

$$x^*=\arg\max_{x \in R^s} D(x), \tag{2.23}$$

при обмеженнях (2.20), (2.21), де $D(x)$ обчислюється за допомогою формул (2.17)-(2.19), $x=(x_1,...,x_s)$.

Для акцій, курс яких має тенденцію до сильних коливань, але середній прибуток, що очікується від них, – великий в силу їх здатності до сильного підвищення курсу, необхідно враховувати ризик.

Якщо поставити задачу: врахувати ризик, то побудована модель трансформується так. Як інвестиційний ризик для цінних паперів виду j, $j \in J_s$, можна розглядати величину відхилення прибутку від його середнього значення протягом останніх T_j інвестиційних періодів.

Позначимо σ_{jj}^2 дисперсію (інвестиційний ризик) для цінних паперів виду **j**, яка обчислюється за формулою:

$$\sigma_{jj}^2 = \frac{1}{T_j}\sum_{t=1}^{T_j}(P(j,t) - a_j)^2 \quad , \tag{2.24}$$

де **P(j,t)** – загальний прибуток в інвестиційному періоді **t** на одну грошову одиницю вкладень у цінні папери виду **j**; a_j – середній прибуток від цінних паперів виду **j** на одну грошову одиницю, які обчислюються за формулами (2.17), (2.18) відповідно. Можливо, що $T_1 = ... = T_s = T$.

Часто потрібно врахувати, що курс деякої групи цінних паперів може залежати від стану визначеної галузі економіки (спад у цій галузі визначає падіння вартості на цінні папери даної групи). Для зменшення подібного ризику необхідно розподіляти інвестиції по різним групам цінних паперів. У такому розподілі використовується оцінка співвідношення рівнів прибутковості для кожної пари видів цінних паперів. Це співвідношення може бути представлено величиною коваріації σ_{ij}^2, яка обчислюється на основі статистичних даних за попередні інвестиційні періоди при $T_i = T \;\; \forall i \in J_s$:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(P(i,t) - a_i)(P(j,t) - a_j), \tag{2.25}$$

або з урахуванням післядії та при $T \neq T \;\; \forall i, j \in J_s$:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{T_i T_j}\sum_{\tau=1}^{T_i}\sum_{t=1}^{T_j}(P(i,\tau) - a_i)(P(j,t) - a_j). \tag{2.26}$$

Як видно з (2.24)-(2.26) при $i = j$ маємо: $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{jj}^2$. Тобто за загальну міру інвестиційного ризику може слугувати величина

$$R(x) = R(x_1,...,x_s) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sigma_{ij}^2 c_i x_i c_j x_j = (cx)^T Q(cx), \tag{2.27}$$

де **Q** – квадратна матриця коваріацій для **s** видів цінних паперів; $cx = (c_1 x_1, ..., c_s x_s)^T$ – вектор-стовпець вартості пакетів цінних паперів.

Інвестор при визначенні портфеля може бути зацікавлений в одержанні заданого середнього прибутку при мінімальному ризику. Відповідна математична модель має такий вигляд.

Модель 2: мінімізувати ризик **R(x)**, тобто знайти упорядковану пару $< \mathbf{R}^*, \mathbf{x}^* >$ таку, що

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^S} \mathbf{R}(\mathbf{x}), \tag{2.28}$$

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^S} \mathbf{R}(\mathbf{x}). \tag{2.29}$$

де **R(x)** обчислюється за формулою (2.27), при обмеженнях:

– на обсяг наявного капіталу (2.21);

– на цілочисловість величин $\mathbf{x}_j$ з урахуванням політики інвестора відносно кількісних інтервалів для $\mathbf{x}_j$ (2.20);

– на мінімальний середній прибуток **P**, що очікується при формуванні портфелю:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{P}, \tag{2.30}$$

де **D(x)** обчислюється за формулами (2.17)-(2.19), а **P** задається.

Іншу математичну модель одержимо, коли інвестор зацікавлений у максимальному прибутку при заданому середньому ризику **U**.

Модель 3: знайти упорядковану пару $< \mathbf{D}^*, \mathbf{x}^* >$, яка визначається співвідношеннями (2.22)-(2.23) при умовах (2.20), (2.21) та обмеженнях на ризик

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{U}, \tag{2.31}$$

де **R(x)** обчислюється за формулою (2.27), а **U** задається.

Всі ці три оптимізаційні задачі з одним критерієм. Можна розглядати задачу вибору портфеля цінних паперів як задачу з кількома критеріями.

Розглянемо модель цієї задачі, яку можна вважати більш адекватною, ніж попередні.

Якщо інвестор зацікавлений у максимізації прибутку (2.19), мінімізації ризику (2.27) при виконанні обмежень на обсяг наявного капіталу **V** (2.21) та на цілочисловість величин $\mathbf{x}_j$ з урахуванням політики інвестора відносно кількісних інтервалів для $\mathbf{x}_j$ (2.20), то можна записати математичну модель так.

Модель 4: знайти ефективну (див., наприклад, [133]) точку $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^S$ для векторного критерію (**–D(x), R(x)**), який підлягає мінімізації при умовах (2.20), (2.21), де **D(x), R(x)** обчислюються за формулами (2.19) та (2.27) відповідно.

Тобто потрібно знайти ефективний розв'язок з переговорної множини Парето, або, як його ще називають, – розв'язок оптимальний за Парето.

Можна ставити задачу знаходження всієї множини Парето.

Зазначимо, що в модель 4 можна, в разі необхідності, включати обмеження (2.30) або (2.31), або (2.30), (2.31) одночасно. Всі моделі можуть доповнюватися різними обмеженнями, пов'язаними з інвестиційною політикою фірми. Наприклад, якщо обмежується обсяг капіталу, що вкладається в акції, прибуток від яких має значні коливання, природно вважати, що

$$\sum_{i \in I_1} c_i x_i \le V_1 ,$$

де $I_1 \subset J_s$ – множина номерів видів цінних паперів, що має названу властивість; V_1 – максимально допустимий для цього обсяг капіталу.

Якщо вважається за необхідне тримати частину активів у високоліквідній формі, то це враховується обмеженням

$$\sum_{i \in I_2} c_i x_i \ge V_2 ,$$

де $I_2 \subset J_s$ – множина номерів акцій (готівки, інших вкладень), що є високоліквідними; V_2 – мінімальна величина високо ліквідного капіталу.

Побудовані моделі є задачами евклідової комбінаторної оптимізації:

– модель 1 – задача на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ з лінійною цільовою функцією (4) і лінійними додатковими обмеженнями (2.21);

– модель 2 – задача на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ з квадратичною цільовою функцією (2.27) і лінійними додатковими обмеженнями (2.21), (2.30);

– модель 3 – задача на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ з лінійною цільовою функцією (4) та додатковими лінійними (2.21) та нелінійними (2.31) обмеженнями;

– модель 4 – задача векторної (багатокритеріальної) оптимізації на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ при додаткових обмеженнях (2.20), (2.21) та, можливо, (2.30), (2.31).

Для їх розв'язку можуть бути застосовані властивості множин полірозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

2.5.2. Задача кольорового упакування прямокутників однакової ширини в напівнескінченній смузі, як задача оптимізації на полірозміщеннях

При формалізації різних умов у задачах упакування, теорії розкладів зручним є розгляд розташування геометричних об'єктів, яким наявний деякий колір (тобто можуть бути об'єкти, геометричні параметри яких однакові, але вони вважаються об'єктами різних типів – різних кольорів).

Розглянемо одну з задач розміщення різнокольорових прямокутників.

Задача. Заданий набір прямокутників шириною $\mathbf{h}$. До набору входять об'єкти різних кольорів, яких $\mathbf{s}$. Відомі довжини прямокутників кольору λ: $\mathbf{a}_1^{\lambda}, \mathbf{a}_2^{\lambda}, ..., \mathbf{a}_{p_\lambda}^{\lambda}$ $\forall\lambda \in \mathbf{J}_s$, де $\mathbf{p}_\lambda$ – кількість прямокутників кольору λ, $\mathbf{p}_1 + ... + \mathbf{p}_s = \mathbf{p}$. Задана напівнескінченна смуга $\mathbf{H}$, яка складається з $\mathbf{q}$ смужок $\mathbf{H}_i$ шириною $\mathbf{h}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_q$. Припускається, що смужка $\mathbf{H}_i$ може мати $\mathbf{m}_i$ зон заборони $\mathbf{Z}_{ij}$, в яких розташування об'єктів неможливе, $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}_{m_i}$, $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_q$. Відомі відстані від початку смуги $\mathbf{H}$ до початку і кінця зони заборони $\mathbf{Z}_{ij} : \mathbf{c}_{ij}$ та $\mathbf{d}_{ij}$ відповідно, $0 \le \mathbf{c}_{ij} \le \mathbf{d}_{ij}$ $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{J}_{m_i}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_q$.

Задача полягає в упакуванні в смугу $\mathbf{H}$ прямокутників з заданого набору при виконанні деяких додаткових умов, які будуть сформульовані далі, з метою мінімізації довжини зайнятої частини смуги $\mathbf{H}$: знайти цю довжину та розташування прямокутників, що її дає.

Побудуємо математичну модель задачі.

Непорушуючи загальності подальших міркувань, вважатимемо, що $\forall\lambda \in \mathbf{J}$

$$\mathbf{a}_1^{\lambda} \le ... \le \mathbf{a}_{p_\lambda}^{\lambda}, \tag{2.32}$$

а також, що

$$\max_{i \in J_q} \mathbf{d}_{im_i} < \lambda^*,$$

де λ^* – мінімальна довжина зайнятої частини смуги $\mathbf{H}$ при необхідному упакуванні.

Для одноковості вигляду деяких подальших формул вважатимемо: $\forall \mathbf{i}$ $\mathbf{c}_{i1} = 0$, $\mathbf{c}_{i,(m_i+1)} = \mathbf{L}$, де величина $\mathbf{L}$ – це задана довжина смуги $\mathbf{H}$. Якщо довжина смуги $\mathbf{H}$ не задана (тобто смуга $\mathbf{H}$ з точки зору даних задачі досить довга), то за величину $\mathbf{L}$ можна брати оцінку зверху необхідної для упакування прямокутників її початкової частини, наприклад:

$$L = \sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{i=1}^{p_\lambda} a_i^\lambda + \max_{i \in J_q} d_{im_i},$$

або довжину зайнятої частини смуги H при деякому допустимому упакуванні заданих прямокутників.

Позначимо $K_{ij\lambda}$ максимальну кількість прямокутників кольору λ, що можуть бути упаковані після зони заборони Z_{ij} (до наступної, якщо вона ще є, або відповідно після останньої) у смужці H_i, $\lambda \in J_s$, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. Очевидно, що величини $K_{ij\lambda}$ $\forall \lambda \in J_s$, $\forall j \in J_{m_i}$, $\forall i \in J_q$ можна знайти, розв'язаши таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}} a_t^\lambda \le c_{i,(j+1)} - d_{ij}; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}+1} a_t^\lambda > c_{i,(j+1)} - d_{ij}. \end{cases} \qquad (2.33)$$

Якщо задані додаткові умови, про які згадувалося раніше, у вигляді обмежень на $K_{ij\lambda}$ таких:

$$Q_{ij\lambda}^{н} \le K_{ij\lambda} \le Q_{ij\lambda}^{в}, \quad i \in I', \ j \in J', \ \lambda \in \Lambda', \qquad (2.34)$$

або

$$K_{ij\lambda} = Q_{ij\lambda}, \quad i \in I'', \ j \in J'', \ \lambda \in \Lambda'', \qquad (2.35)$$

чи інших обмежень на $K_{ij\lambda}$, заданих у вигляді виконання умови

$$w(K_{ij\lambda}) = 0, \quad i \in I''', \ j \in J''', \ \lambda \in \Lambda''', \qquad (2.36)$$

де w – задана функція, $Q_{ij\lambda}^{н}$, $Q_{ij\lambda}^{в}$, $Q_{ij\lambda}$ – задані числа; $\Lambda', \Lambda'', \Lambda''' \subset J_s$, $J', J'', J''' \subset J_{m_i}$, $I', I'', I''' \subset J_q$ $\forall i \in J_q$ – задані множини індексів, то відповідні умови з (2.34), (2.35), (2.36) приєднуються до системи (2.33) при знаходженні величини $K_{ij\lambda}$.

Для $K_{ij\lambda}$, що задовольняють умови (2.33)-(2.36), позначимо

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda} = k_\lambda, \ \forall \lambda \in J_s \qquad (2.37)$$

та

$$\sum_{j=1}^{s} k_j = k. \qquad (2.38)$$

Тут k_λ – кількість номерів місць для розташування прямокутників кольору $\lambda \in J_s$, k – загальна кількість номерів місць для упакування прямокутників у H.

Для тих $\lambda \in J_s$, для яких k_λ у представленні (2.37) справджує нерівність $k_\lambda > p_\lambda$, введемо до розгляду $k_\lambda - p_\lambda$ прямокутників кольору λ, що мають нульову довжину. Тоді після зони заборони Z_{ij} (до наступної, якщо вона ще є, або відповідно після останньої) у смужці H_i упаковується рівно $K_{ij\lambda}$ прямокутників кольору λ $\forall \lambda \in J_s$, $\forall j \in J_{m_i}$, $\forall i \in J_q$.

Нехай

$$\eta_\lambda = \max\{k_\lambda, p_\lambda\}, \qquad (2.39)$$

а також $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_s$. Позначимо G^{N_λ} мультимножину довжин прямокутників кольору λ, $G^{N_\lambda} = \{g_1^\lambda, \ldots, g_{\eta_\lambda}^\lambda\}$. Вона складається з p_λ заданих (ненульових) елементів $a_1^\lambda, \ldots, a_{p_\lambda}^\lambda$ та, якщо $k_\lambda > p_\lambda$, з $k_\lambda - p_\lambda$ нульових. Вважаємо всі елементи G^{N_λ} пронумерованими.

Суму всіх мультимножин G^{N_λ} позначимо G:

$$G = \sum_{\lambda=1}^{s} G^{N_\lambda}.$$

Нехай N_λ складається з таких елементів:

$$N_\lambda = \left\{\left(\sum_{\mu=1}^{\lambda-1}\eta_\mu\right)+1, \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda-1}\eta_\mu\right)+2, \ldots, \sum_{\mu=1}^{\lambda}\eta_\mu\right\} \quad \forall \lambda \in J_s.$$

Очевидно, що $N_\lambda \cap N_\mu = \varnothing$, $N_\lambda \neq \varnothing$ $\forall \lambda, \mu \in J_s$,

$$\bigcup_{\lambda=1}^{s} N_\lambda = J_\eta,$$

тобто $N_1, \ldots, N_s$ – це упорядковане розбиття множини J_η на s підмножин N_λ, $\lambda \in J_s$, де $|N_\lambda| = \eta_\lambda$. В силу (2.39) маємо: $1 \le k_\lambda \le \eta_\lambda$ $\forall \lambda \in J_s$.

Вважаємо елементи $\mathbf{G}$ пронумерованими номерами з $\mathbf{J}_\eta$ так, що елементи з $\mathbf{G}^{N_\lambda}$ пронумеровані числами з $\mathbf{N}_\lambda$ $\forall\lambda\in\mathbf{J}_s$.

Утворимо множину $\mathbf{H}$ $\mathbf{k}$-виборок з множини $\mathbf{J}_\eta$, де кожна з $\mathbf{k}$-виборок $\mathbf{h}$ має вигляд:

$$\mathbf{h}=(\mathbf{h}(1),\dots,\mathbf{h}(\mathbf{k}))=(\mathbf{h}(1,1,1,1),\dots,\mathbf{h}(\mathbf{i},\mathbf{j},\lambda,\mathbf{t}),\dots,\mathbf{h}(\mathbf{q},\mathbf{m}_q,\mathbf{s},\mathbf{K}_{qm_qs})),$$

де $\mathbf{h}(\mathbf{i},\mathbf{j},\lambda,\mathbf{t})\in\mathbf{J}_\eta$ – номер прямокутника з $\mathbf{G}$;

$\mathbf{i}$ – номер смуги $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{i}\in\mathbf{J}_q$;

$\mathbf{j}$ – номер зони заборони $\mathbf{Z}_{ij}$, $\mathbf{j}\in\mathbf{J}_{m_i}$ у смузі $\mathbf{H}_i$;

λ – номер кольору, $\lambda\in\mathbf{J}_s$;

$\mathbf{t}$ – номер місця прямокутника кольору λ з довжиною з $\mathbf{G}^{N_\lambda}$ у смужці $\mathbf{H}$ між зонами заборони $\mathbf{Z}_{ij}$ та $\mathbf{Z}_{i,(j+1)}$, $\forall\mathbf{t}\in\mathbf{J}_{K_{ij\lambda}}$.

З іншого боку $\mathbf{k}$-вибірку $\mathbf{h}$ можна розглядати як $\mathbf{h}=\left(\pi^1,\dots,\pi^\lambda,\dots,\pi^s\right)$, де $\pi^\lambda=\left(\pi_{\lambda1},\dots,\pi_{\lambda k_\lambda}\right)$ – це $\mathbf{k}_\lambda$-вибірка з $\mathbf{N}^\lambda$ $\forall\lambda\in\mathbf{J}_s$.

Утворимо з $\mathbf{G}$ за допомогою $\mathbf{H}$ згідно з означенням множину полірозміщень:

$$\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})=\left\{(\mathbf{g}_{h(1)},\dots,\mathbf{g}_{h(k)})\mid\forall\mathbf{h}\in\mathbf{H}\right\}\subset\mathbf{R}^k.$$

Позначимо $\mathbf{x}(\mathbf{i},\mathbf{j},\lambda,\mathbf{t})$ довільний елемент полірозміщення з $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ – довжину (можливо нульову) прямокутника кольору λ, що стоїть у $\mathbf{H}_i$ між зонами заборони $\mathbf{Z}_{ij}$ та $\mathbf{Z}_{i,(j+1)}$ на місці $\mathbf{t}$. Тут $\mathbf{n}$ позначено кількість різних елементів у $\mathbf{G}$.

Позначимо

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k)=(\mathbf{x}(1,1,1,1),\dots,\mathbf{x}(\mathbf{i},\mathbf{j},\lambda,\mathbf{t}),\dots,\mathbf{x}(\mathbf{q},\mathbf{m}_q,\mathbf{s},\mathbf{K}_{qm_qs})).$$

Довжина $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ зайнятої частини смуги $\mathbf{H}$ для $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^k$ визначається виразом

$$\mathbf{L}(\mathbf{x})=\max_{i\in J_q}\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=1}^{K_{im_i\lambda}}\mathbf{x}(\mathbf{i},\mathbf{m}_i,\lambda,\mathbf{t})+\mathbf{d}_{im_i}\right).\qquad(2.40)$$

Тоді математична модель поставленої задачі набуде вигляду: знайти $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*)$ – мінімальну довжину зайнятої частини смуги $\mathbf{H}$, та вектор $\mathbf{x}^*$, який визначає довжину прямокутників та їх розташування, тобто знайти $<\mathbf{L}(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*>$, де

$$L(x^*) = \min_{x \in R^k} L(x),$$
$$x^* = \arg\min_{x \in R^k} L(x)$$

при комбінаторній умові:

$$x \in E_{\eta n}^{ks}(G, H) \tag{2.41}$$

та некомбінаторних обмеженнях:

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=1}^{K_{ij\lambda}} x(i,j,\lambda,t) \le c_{i,(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j \in J_{m_i}, \ \forall i \in J_q. \tag{2.42}$$

Геометрична інтерпретація формул (2.40)-(2.42) така.

Функція $L(x)$ – це максимальне значення з q сум, кожна з яких є сумою довжин прямокутників у смужці H_i, які стоять після останньої зони заборони Z_{im_i} в ній, доданої до координати d_{im_i} кінця цієї зони заборони.

Умова (2.41) означає, що вибираються довжини прямокутників з заданих наборів за кольорами (з урахуванням можливості вибирати «нульові» (тобто не вибирати) прямокутники). При цьому забезпечується для $K_{ij\lambda}$ виконання заданих обмежень (2.34)-(2.36).

Нерівності (2.42) означають, що сума довжин прямокутників, які в допустимому розв'язку x повинні бути розташовані в смузі H_i (між зонами заборони Z_{ij} та $Z_{i,(j+1)}$), не більше наявного там місця.

Зауваження. Якщо $\forall \lambda \in J_s$: $\eta_\lambda = k_\lambda$, тобто не існує $\lambda \in J_s$ такого, що $p_\lambda > k_\lambda$, то при побудові $E_{\eta n}^{ks}(G, H)$ отримуємо множину не полірозміщень, а поліпереставлень (тому, що $\eta = k$).

Спрощення множини полірозміщень також відбувається у випадку, коли $K_{ij\lambda}$ визначати з системи (2.33), не накладаючи додаткових обмежень з (2.34)-(2.36) крім обмежень вигляду $K_{ij\lambda} \ge Q''_{ij\lambda}$. Матимемо розміщення з $\eta = \eta_1 + ... + \eta_s$ по $k = k_1 + ... + k_s$ елементів. Тобто множина полірозміщень стає множиною розміщень. Полірозміщення в цій задачі виникають тоді, коли немає симетрії відносно кольору (інваріантності відносно попарного обміну кольорів) для місць розташування прямокутників. Якщо між місцями розташування прямокутників зникає відмінність отримуємо прості розміщення.

Таким чином, побудована математична модель поставленої задачі упакування прямокутників на множині полірозміщень (умова (2.41)), з опуклою цільовою функцією $L(x)$, $x \in R^k$, у представленні (2.40) та лінійними додатковими обмеженнями (2.42).

ГЛАВА 3

Задачі оптимізації на евклідовій комбінаторній множині полірозміщень

Розглянемо множину полірозміщень.

Нехай $G = \{g_1,...,g_\eta\}$ – мультимножина пронумерованих дійсних чисел з основою $S(G) = (e_1,\ldots,e_n)$ первинною специфікацією $[G] = (\eta_1^G,...,\eta_n^G)$, $\eta_1^G + ... + \eta_n^G = \eta$, $1 \le \eta_i^G \le k$ $\forall i \in J_n = \{1,...,n\}$. Розглянемо упорядковане розбиття множини J_η на s множин $N_1,...,N_s$, що задовольняє умови $N_i \cap N_j = \varnothing$, $N_i \ne \varnothing$ $\forall i,j \in J_s$, а також упорядковане розбиття числа k на s доданків $k_1,...,k_s$, що задовольняють умови $1 \le k_i \le \eta_i$ $\forall i \in J_s$, де $\eta = |N|$. Очевидно, що $k_1 + ... + k_s = k$, $\eta_1 + ... + \eta_s = \eta$. Позначимо $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$.

Нехай, як і раніше, H – множина всіх упорядкованих k-вибірок з множини J_η вигляду

$$\pi = (\pi(1),...,\pi(k)) = (\pi_{11},...,\pi_{1k_1},...,\pi_{s1},...,\pi_{sk_s}) = (\pi^1,...,\pi^i,...,\pi^s),$$

де $\pi^i = (\pi_{i1},...,\pi_{ik_i})$ – довільна k_i-вибірка з множини N_i $\forall i \in J_s$. Множина $A_{\eta n}^{ks}(G,H) = \{(g_{\pi(1)},...,g_{\pi(k)}) | \forall \pi \in H\} \subset R^k$ – це множина полірозміщень з повтореннями.

Після занурення множини $A_{\eta n}^{ks}(G,H)$ у R^k (тобто розглядаючи її точки як точки з R^k) її образ, як і раніше, позначимо $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ і будемо називати евклідовою комбінаторною множиною полірозміщень з повтореннями або загальною множиною полірозміщень.

Розглянемо опуклу оболонку загальної множини полірозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ – загальний многогранник полірозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H) = = \Pi_{\eta n}^{ks}(G,H) = \mathrm{conv} E_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

Відомі задачі оптимізації, які можуть розглядатися, як задачі на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ (див., наприклад, п. 2.5) з лінійними та опуклими цільовими функціями. Тому виникає потреба систематичного вивчення цих задач. У главі розглядаються властивості цільових функцій при оптимізації на полірозміщеннях.

3.1. Постановка задачі

Нехай $G^{N_i} \subset G$ η_i-елементна мультимножина ($\eta_i = |N_i|$ $\forall i \in J_s$), що утворена пронумерованими елементами з G $g_1^{N_i}, g_2^{N_i}, ..., g_{\eta_i}^{N_i}$ з номерами з множин N_i, $\eta_1 + ... + \eta_n = \eta$. Тобто

$$G = \sum_{i=1}^{s} G^{N_i} .$$

Упорядкуємо, не порушуючи загальності подальших міркувань, компоненти мультимножини G^{N_i}:

$$g_1^{N_i} \le ... \le g_{\eta_i}^{N_i} . \qquad (3.1)$$

Розглянемо оптимізаційну задачу на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$: знайти пару $<F(x^*),x^*>$, де

$$F(x^*) = \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} F(x),$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} F(x),$$

при додаткових обмеженнях $x \in D \subset R^k$. Якщо остання умова відсутня, то задачу називають безумовною задачею мінімізації на $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$. Якщо $F(x)$ – лінійна функція, то цю задачу називають задачею безумовної лінійної мінімізації на $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ (або безумовною лінійною оптимізаційною задачею на $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$). Якщо $F(x)$ – опукла (сильно опукла) функція, то поставлену задачу називають задачею безумовної опуклої (сильно опуклої) мінімізації (або безумовною опуклою (сильно опуклою) оптимізаційною задачею на $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$).

У цій главі дається розв'язок лінійної безумовної задачі на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ та одержуються екстремальні властивості деяких класів цільових функцій на цій множині – достатні умови та оцінки мінімумів у задачах безумовної опуклої (сильно опуклої) мінімізації.

3.2. Безумовна лінійна оптимізаційна задача на поліррозміщеннях

Розглянемо задачу безумовної лінійної мінімізації на множині поліррозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$. Тобто задачу знаходження упорядкованої пари <c*,x*>, де

$$c^* = \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i , \qquad (3.2)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i . \qquad (3.3)$$

Нехай тут і далі $c_j \in R^1 \ \ \forall j \in J_k$. Очевидно, що задача знаходження пари <c*,x*>, яка визначається співвідношеннями (3.2), (3.3) еквівалентна такій: знайти упорядковану пару <c*,x*>:

$$c^* = \min_{x \in vert\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i , \qquad (3.4)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in vert\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i . \qquad (3.5)$$

де $vert\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$ – множина вершин загального многогранника поліррозміщень $\Pi_{\eta n}^{ks}(G,H)$.

Теорема 3.1.

Якщо $x^* = (x_1^*,...,x_k^*) = (X_1^*,...,X_i^*,...,X_s^*)$, де $X_j^* = (x_{m_j+1}^*,...,x_{m_j+k_j}^*)$, виконується умова (3.1) та

$$c_{m_j+1} \geq ... \geq c_{m_j+s_j} \geq 0 > c_{m_j+s_j+1} \geq ... \geq c_{m_j+k_j} , \qquad (3.6)$$

$$m_0 = 0, \quad k_0 = 0, \quad m_j = m_{j-1} + k_{j-1} \quad \forall j \in J_s , \qquad (3.7)$$

$$x_{m_j+i}^* = g_i^{N_j}, \ \forall i \in J_{s_j} ; \ x_{m_j+s_j+i}^* = g_{\eta_j - r_j + i}^{N_j}, \ \forall i \in J_{r_j}, \ \forall j \in J_s , \qquad (3.8)$$

де r_j, s_j задовольняють умову

$$r_j, s_j \in J_{k_j}^0 , \quad r_j + s_j = k_j \ \ \forall j \in J_s , \qquad (3.9)$$

то x^* задовольняє умову (3.3).

Доведення. Проведемо його від супротивного. Нехай точка $\mathbf{x}^*$, координати якої обчислюються за формулами (3.8), при виконанні умов (3.1), (3.6) та (3.7) не задовольняє співвідношення (3.3). Згідно з критерієм вершини загального многогранника поліроозміщень $\Pi^{ks}_{\eta n}(G,H)$ видно, що $\mathbf{x}^*$ – вершина цього многогранника. За припущенням точка $\mathbf{x}^*$ не є точкою мінімуму, тому існує суміжна з $\mathbf{x}^*$ вершина $\Pi^{ks}_{\eta n}(G,H)$, в якій виконується умова

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j < \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^* . \qquad (3.10)$$

Згідно з критерієм суміжності вершин загального многогранника поліроозміщень вершина $\mathbf{x}$ суміжна з $\mathbf{x}^*$, якщо вона одержана з вершини $\mathbf{x}^*$ переставленням не рівних елементів $g_i^{N_j}$, $g_{i+1}^{N_{j+1}}$, ($i \in J_{s-1}$, або $i \in J_{\eta_j-1} \setminus J_{\eta_j-r_j}$), чи заміною $g_{s_j}^{N_j}$ (або $g_{\eta_j-r_j+1}^{N_j}$) на $g_{\eta_j-r_j}^{N_j}$ (або на $g_{s_j+1}^{N_j}$ відповідно), при умові $g_{s_j}^{N_j} \neq g_{\eta_j-r_j}^{N_j}$ (або відповідно $g_{\eta_j-r_j+1}^{N_j} \neq$ $\neq g_{s_j+1}^{N_j}$), де r_j, s_j задовольняють (3.9).

Перепишемо нерівність (3.10) у вигляді

$$0 < \sum_{j=1}^{k} c_j (x_j^* - x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i;\, j\neq q}}^{k} c_j (x_j^* - x_j) + c_i (x_i^* - x_i) + c_q (x_q^* - x_q),$$

де $\mathbf{i}$ та $\mathbf{q}$ відповідають різним компонентам у вершинах $\mathbf{x}^*$ та $\mathbf{x}$.

Оскільки $x_j^* = x_j$, $\forall j \neq i$, $\forall j \neq q$, $\forall j \in J_k$, то останнє співвідношення набуває вигляду:

$$c_i (x_i^* - x_i) + c_q (x_q^* - x_q) > 0 .$$

Або з використанням співвідношень $m_j + i^* = i$, $m_j + q^* = q$ маємо:

$$c_{m_j+i^*}(x^*_{m_j+i^*} - x_{m_j+i^*}) + c_{m_j+q^*}(x^*_{m_j+q^*} - x_{m_j+q^*}) > 0 . \quad (3.11)$$

Розглянемо усі можливі значення $\mathbf{i}^*$ та $\mathbf{q}^*$:

а) $q^* = i^* + 1$, $i^* \in J_{s_j-1}$, s_j задовольняє умову (3.9).

Тобто $x^*_{m_j+i^*} = g_{i^*}^{N_j}$, $x^*_{m_j+q^*} = g_{i^*+1}^{N_j}$, $x_{m_j+i^*} = g_{i^*+1}^{N_j}$. Підставляючи ці значення в нерівність (3.11) одержуєм:

$$c_{m_j+i^*}(g_{i^*}^{N_j}-g_{i^*+1}^{N_j})+c_{m_j+i^*+1}(g_{i^*+1}^{N_j}-g_{i^*}^{N_j})>0,$$

або

$$(c_{m_j+i^*+1}-c_{m_j+i^*})(g_{i^*+1}^{N_j}-g_{i^*}^{N_j})>0.$$

У силу умови (3.1)

$$(g_{i^*+1}^{N_j}-g_{i^*}^{N_j})\geq 0,$$

тоді

$$(c_{m_j+i^*+1}-c_{m_j+i^*})>0,$$

що суперечить умові (3.6);

б) $i^*=s_j+j^*$, $j^*\in J_{r_j-1}$, $r_j>1$, $q^*=i^*+1$; r_j та s_j задовольняють умову (3.9). Тоді

$$x^*_{m_j+s_j+j^*}=g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*},$$

$$x^*_{m_j+s_j+j^*+1}=g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1},$$

$$x^*_{m_j+s_j+j^*+1}=g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*},$$

$$x^*_{m_j+s_j+j^*}=g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1}.$$

При цьому з нерівності (3.11) одержуємо

$$c_{m_j+s_j+j^*}(g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*}-g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1})+$$

$$+c_{m_j+s_j+j^*+1}(g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1}-g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*})>0,$$

$$(c_{m_j+s_j+j^*}-c_{m_j+s_j+j^*+1})(g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*}-g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1})>0.$$

У силу (3.1)

$$g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*}-g^{N_j}_{\eta_j-r_j+j^*+1}\geq 0,$$

тобто

$$c_{m_j+s_j+j^*}-c_{m_j+s_j+j^*+1}<0,$$

що суперечить умові (3.6);

в) $q^*\in\varnothing$, $i^*=s_j$,

$$x^*_{m_j+i^*} = g^{N_j}_{s_j},$$

$$x_{m_j+i^*} = g^{N_j}_{\eta_j-r_j},$$

r_j та s_j задовольняють умову (3.9). З нерівності (3.11) при цьому випливає, що $c_{m_j+s_j}(g^{N_j}_{s_j} - g^{N_j}_{\eta_j-r_j}) > 0$.

У силу умови (3.6) $c_{m_j+s_j} \geq 0$, тому одержуємо, що $g^{N_j}_{s_j} - g^{N_j}_{\eta_j-r_j} > 0$ або $s_j > \eta_j - r_j$, тобто $s_j + r_j = k_j > \eta_j$, що суперечить нерівності $k_j \leq \eta_j$ з означення множини $E^{ks}_{\eta n}(G,H)$;

г) $q^* \in \varnothing$, $i^* = s_j + 1$,

$$x^*_{m_j+i^*} = g^{N_j}_{s_j+1},$$

$$x_{m_j+i^*} = g^{N_j}_{\eta_j-r_j+1},$$

r_j та s_j задовольняють умову (3.9). При цьому нерівність (3.11) набуває вигляду

$$c_{m_j+s_j+1}(g^{N_j}_{\eta_j-r_j+1} - g^{N_j}_{s_j+1}) > 0.$$

У силу умови (3.1), оскільки $\eta_j - r_j + 1 \geq s_j + 1$ (це випливає з умови (3.9): $\eta_j \geq k_j = r_j + s_j$) одержуємо, що

$$g^{N_j}_{\eta_j-r_j+1} - g^{N_j}_{s_j+1} \geq 0.$$

Тобто $c_{s+1} > 0$, що суперечить умові (3.6).

Таким чином, при будь-яких значеннях i^* та q^* в припущенні, що x^* не задовольняє співвідношення (3.3), отримали протиріччя, що і доводить теорему.

Зауваження 3.1. Можна розглядати $g_1, ..., g_\eta$ як значення деякої функції $V(\bar{g}_{\alpha_i}) = g_i$, $(\alpha_i, \ i \in J_\eta)$, де $\bar{g}_{\alpha_i}$ належить деякій мультимножині $\bar{G} = \{\bar{g}_1, ..., \bar{g}_\eta\}$, при цьому

$$V: \ E^{k\bar{s}}_{\eta\bar{n}}(\bar{G},\bar{H}) \rightarrow E^{ks}_{\eta n}(G,H).$$

Тут $\overline{n}$ – кількість елементів основи $S(\overline{G})$ мультимножини $\overline{G}$. Зрозуміло, що для однозначності функції V необхідно, щоб $\overline{n} \geq n$. Зі співвідношення (3.1) випливає

$$V(\overline{g}^{N_j}_{\alpha^j_1}) \leq \ldots \leq V(\overline{g}^{N_j}_{\alpha^j_{\eta_j}}) \quad \forall j \in J_s. \tag{3.12}$$

З урахуванням зауваження 3.1 з теореми 3.1 випливає наслідок.

Наслідок 3.2. Якщо

$$\overline{x}^* = (\overline{x}^*_1, \ldots, \overline{x}^*_k) = \arg \min_{x \in E^{k\overline{s}}_{\eta\overline{n}}(\overline{G},\overline{H})} \sum_{j=1}^{k} c_j V(x_j)$$

і виконуються умови (3.6), (3.7), (3.12), то

$$\overline{x}^*_{i+m_j} = \overline{g}^{N_j}_{\alpha^j_i} \quad \forall i \in J_{s_j},$$

$$\overline{x}^*_{s_j+i+m_j} = \overline{g}^{N_j}_{\alpha^j_{\eta_j-r_j+i}} \quad \forall i \in J_{r_j}, \forall j \in J_s, \tag{3.13}$$

де r_j та s_j задовольняють умову (3.9).

Зауваження 3.2. Якщо немає можливості забезпечити виконання умов (3.6), (3.7), то теорему 3.1 та наслідок 3.2, очевидно, можна переформулювати наступним чином. Покладемо

$$N'_i = \{(\sum_{j=1}^{i-1} k_j) + 1, \quad (\sum_{j=1}^{i-1} k_j) + 2, \quad \ldots, \quad \sum_{j=1}^{i} k_j\} \quad \forall i \in J_s.$$

Нехай $\beta^j = (\beta^j_1, \ldots, \beta^j_{k_j})$ – переставлення елементів множини N'_j, тобто $\beta^j \in E_{k_j}(N'_j)$ таке, що

$$c_{\beta^j_1} \geq \ldots \geq c_{\beta^j_{s_j}} \geq 0 > c_{\beta^j_{s_j+1}} \geq \ldots \geq c_{\beta^j_{k_j}}, s_j \in J^0_{k_j}, \forall j \in J_s. \tag{3.14}$$

Тоді мінімум досягається в точці (3.3), яка задовольняє умови

$$x^*_{\beta^j_i} = g^{N_j}_i \quad \forall i \in J_{s_j}; \quad x^*_{\beta^j_{s_j}} = x^{N_j}_{\eta_j - r_j + i} \quad \forall i \in J_r, \forall j \in J_s, \tag{3.15}$$

де переставлення $\beta^j \in E_{k_j}(N'_j)$ та стала $s_j \in J^0_{k_j}$ задовольняють умову (3.14), елементи мультимножини G – умову (3.1), сталі r_j та

s_j – умову (3.9). Нагадаємо, що $E_k(M)$ позначає множину переставлень з елементів множини M, де $|M| = k$, $E_k(M) \subset R^k$. Мінімум же функції

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j V(x_j) \tag{3.16}$$

на множині $E_{\eta\bar{n}}^{k\bar{s}}(\bar{G},\bar{H})$ дає точка

$$\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \ldots, \bar{x}_k^*) \in E_{\eta\bar{n}}^{k\bar{s}}(\bar{G},\bar{H}),$$

де $$\bar{x}^*_{\beta_i^j} = g_{\alpha_i^j}^{-N_j} \ \forall i \in J_{s_j}; \quad \bar{x}^*_{\beta_{i+s_j}^j} = g_{\alpha^j_{\eta_j - r_j + i}}^{-N_j} \quad \forall i \in J_{r_j}, \forall j \in J_s, \tag{3.17}$$

а переставлення $\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_{\eta_j}^j)$, $\alpha^j \in E_{\eta_j}(J_{\eta_j})$, задовольняє умову (3.12) переставлення $\beta^j \in E_{k_j}(N_j')$ та стала $s_j \in J_{k_j}^0$ – співвідношення (3.14), сталі r_j та s_j – умову (3.9).

3.3. Безумовні опуклі оптимізаційні задачі на полірозміщеннях

Дослідимо екстремальні властивості цільової функції у задачі: знайти <c*,x*>, де

$$c^* = \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} f(x)$$

$$x^* = \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} f(x)$$

де f(x) – опукла чи сильно опукла функція.

Теорема 3.3. $x^* = \arg \min\limits_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} f(x)$

Якщо $\varphi(x)$ – скінчена опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{\eta n}^{ks}(G,H) \subset X$, то:

1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \varphi(x) \ge \varphi(y) - (p(y), y) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{s_j} p_{\beta_i^j}(y) g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} p_{\beta_i^j}(y) g_{\eta_j - k_j + i} \Big); \tag{3.18}$$

2) щоб точка $y \in E_{\eta n}^{ks}(G,H) \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(p(y),y) \ge \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j} p_{\beta_i^j}(y) g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} p_{\beta_i^j}(y) g^{N_j}_{\eta_j-k_j+i}\Big), \qquad (3.19)$$

де $p(y)=(p_1(y),\dots,p_k(y))$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ у точці y, переставлення $(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j) \in E_{kj}(N_j')$ задовольняє умову

$$p_{\beta_1^j}(y) \ge p_{\beta_2^j}(y) \ge \dots \ge p_{\beta_{s_j}^j}(y) \ge 0 > p_{\beta_{s_j+1}^j}(y) \ge \dots \ge p_{\beta_{k_j}^j}(y), \qquad (3.20)$$

а елементи мультимножини G – упорядковані згідно з нерівностями (3.1).

Доведення. Скористаємося відомою лемою 1.2 (або, що те ж саме, лемою 1 з [33; 34]) при $E = E_{\eta n}^{ks}(G,H)$:

$$\min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \varphi(x) \ge \varphi(y) - (p(y),y) + \min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i. \qquad (3.21)$$

Мінімум у правій частині співвідношення (3.21) знаходимо за теоремою 3.1 з урахуванням зауваження 3.2 при $c_i = p_i(y) \quad \forall i \in J_k$. Маємо:

$$\min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i = \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j} p_{\beta_i^j}(y) g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} p_{\beta_i^j}(y) g^{N_j}_{\eta_j-k_j+1}\Big), \qquad (3.22)$$

де переставлення $(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j) \in E_{k_j}(N_j')$ та стала $s_j \in J_{k_j}^0$ означаються співвідношенням

$$p_{\beta_1^j}(y) \ge p_{\beta_2^j}(y) \ge \dots \ge p_{\beta_{s_j}^j}(y) \ge 0 > p_{\beta_{s_j+1}^j}(y) \ge \dots \ge p_{\beta_{k_j}^j}(y),$$

а елементи мультимножини G задовольняють умову (3.1).

Підставивши значення знайденого мінімуму з формули (3.22) у нерівність (3.21), одержуємо справедливість нерівності (3.18), що доводиться. А в порівнянні з формулою (3.105) леми 3.29 з [111] (лема 1.2), або з аналогічною формулою (3) леми 2 з [33; 34], рівність (3.22) при $E = E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ дає справедливість умови (3.19). Таким чином, обидві частини теореми доведені.

Теорема 3.4.

Якщо при виконанні умов теореми 3.3, функція $\varphi(\mathbf{x})$ диференційовна на множині $\mathbf{X} \supset \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, то:

1) $\forall \mathbf{y} \in \operatorname{int} \mathbf{X}$

$$\min_{\mathbf{x} \in E_{\eta n}^{ks}(G)} \varphi(\mathbf{x}) \ge \varphi(\mathbf{y}) - (\nabla\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{s_j} \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_i^j}} g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_i^j}} g_{\eta_j - k_j + i}^{N_j} \Big);$$

2) щоб точка $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \subset \operatorname{int} \mathbf{X}$ була мінімаллю на множині $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ функції $\varphi(\mathbf{x})$, достатньо виконання умови

$$(\nabla\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{s_j} \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_i^j}} g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_i^j}} g_{\eta_j - k_j + i}^{N_j} \Big),$$

де переставлення $(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j) \in \mathbf{E}_{k_j}(\mathbf{N}_j')$ та стала $s_j \in \mathbf{J}_{k_j}^0$ означаються умовою

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_1^j}} \ge \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_2^j}} \ge \dots \ge \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_{s_j}^j}} \ge 0 > \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_{s_j+1}^j}} \ge \dots \ge \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial y_{\beta_{k_j}^j}} \quad \forall j \in \mathbf{J}_s,$$

а елементи мультимножини $\mathbf{G}$ упорядковані згідно з нерівностями (3.1).

Доведення. Ця теорема є наслідком з теореми 3.3 у диференційовному для $\varphi(\mathbf{x})$ випадку.

Лема 3.5.

Якщо $\mathbf{c} = (c_1,\dots,c_k)$ – довільна точка простору $\mathbf{R}^k$, переставлення $(\delta_1,\dots,\delta_\eta) \in \mathbf{E}_\eta(\mathbf{J}_\eta)$ задовольняє умову

$$\left|g_{\delta_1}\right| \le \left|g_{\delta_2}\right| \le \dots \le \left|g_{\delta_\eta}\right|, \tag{3.23}$$

переставлення $(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j) \in \mathbf{E}_{k_j}(\mathbf{N}_j')$ і стала $s_j \in \mathbf{J}_{k_j}^0$ – умову

$$c_{\beta_1^j} \le \dots \le c_{\beta_{s_j}^j} \le 0 < c_{\beta_{s_j+1}^j} \le \dots \le c_{\beta_{k_j}^j},$$

елементи множини $\mathbf{G}$ упорядковані нерівностями (3.1), то

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \|x-c\|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s} c_{\beta_i^j} g_i^{N_j} +$$

$$+ \sum_{i=s+1}^{k} c_{\beta_i^j} g_{\eta_j - k_j + i}^{N_j}\Big). \qquad (3.24)$$

Справедливість твердження випливає з леми 1.3 (що те ж саме з леми 3 [33; 34]) при $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$.

3.4. Безумовні сильно опуклі оптимізаційні задачі на поліросміщеннях

Розглянемо сильно опуклу функцію $\psi(\mathbf{x})$ з параметром $\rho > 0$ на опуклій замкненій множині $\mathbf{X}$, $\mathbf{E} \subset \mathbf{X}$. Позначимо $\mathbf{w}$ точку, існування і єдиність якої обумовлені в [134], що доставляє мінімум функції $\psi(\mathbf{x})$ на множині $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k) = \arg\min_{x\in X} \psi(\mathbf{x}). \qquad (3.25)$$

Теорема 3.6.

Якщо функція $\psi(\mathbf{x})$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на опуклій замкненій множині $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^k$, $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \subset \mathbf{X}$, то

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \psi(\mathbf{x}) \ge \psi(\mathbf{w}) + \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} w_i^2 -$$

$$-2\rho\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j} w_{\beta_i^j} g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j} w_{\beta_i^j} g_{\eta_j - k_j + i}^{N_j}\Big), \qquad (3.26)$$

де точка $\mathbf{w}$ означається співвідношенням (3.25), а переставлення $(\beta_1^j, \ldots, \beta_{k_j}^j) \in \mathbf{E}_{k_j}(\mathbf{N}_j^{'})$ і стала $\mathbf{s}_j \in \mathbf{J}_{k_j}^0$ – нерівностями

$$w_{\beta_1^j} \le w_{\beta_2^j} \le \ldots \le w_{\beta_{s_j}^j} \le 0 < w_{\beta_{s_j+1}^j} \le \ldots \le w_{\beta_{k_j}^j}, \qquad (3.27)$$

переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta) \in \mathbf{E}_\eta(\mathbf{J}_\eta)$ – умовою (3.23), а елементи мультимножини $\mathbf{G}$ упорядковані згідно з нерівностями (3.1).

Доведення. Скориставшись лемою 1.4 (або теоремою 5 з [33], або теоремою 4 з [34]) з нерівності цієї леми маємо:

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \psi(x) \ge \psi(w) + \rho\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k} w_i^2 -$$

$$-2\rho \max_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i\,, \tag{3.28}$$

де точка $\mathbf{w}$ означається формулою (3.25), а переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (3.23). Максимум у правій частині співвідношення (3.28) знайдемо згідно з зауваженням 3.2 при $c_i = -w_i \quad \forall i \in J_k$, тобто

$$\max_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i = -\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i = -\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j} c_{\beta_i^j} g_i^{N_j} +$$

$$+\sum_{i=s_j+1}^{k_j} c_{\beta_i^j} g_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big) = \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j} w_{\beta_i^j} g_i^{N_j} + \sum_{i=s+1}^{k_j} w_{\beta_i^j} g_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big),$$

де стала $s_j \in J_{k_j}^0$ і переставлення $(\beta_1^j,...,\beta_{k_j}^j)\in E_{k_j}(N_j')$ задовольняють нерівність (3.27), яка випливає з умови (3.14) з урахуванням співвідношення між c_j та w_j $\forall i \in J_k$, а елементи мультимножини $\mathbf{G}$ упорядковані згідно з умовою (3.1). Підставивши одержаний максимум у нерівність (3.28), одержуємо формулу (3.26), що і треба було довести.

Теорема 3.7.

Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E_{\eta n}^{ks}(G,H)\subset X$, то

1) $\forall x\in X$

$$\min_{y\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \psi(y) \ge \psi(x) + \rho\sum_{i=1}^{k}(g_{\delta_i}^2 + x_j^2) - \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}x_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j}\Big(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j}\Big)g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j}\Big(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j}\Big)g_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big);\ (3.29)$$

2) щоб точка $x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, достатньо виконання умови

$$\rho\sum_{j=1}^{k}(g_{\delta_j}^2 + x_j^2) + \sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{s_j}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j})g_i^{N_i} +$$

$$+\sum_{i=s_j+1}^{k_j}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j})g_{\eta_{j-k_j+i}}^{N_j}) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}x_j, \quad (3.30)$$

де переставлення $(\beta_1^j,...,\beta_{k_j}^j) \in E_{k_j}(N_j)$ і стала $s_j \in J_{k_j}^0$ означаються нерівностями

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_1^j}} - 2\rho x_{\beta_1^j} \ge \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_2^j}} - 2\rho x_{\beta_2^j} \ge \ldots \ge \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_{s_j}^j}} - 2\rho x_{\beta_{s_j}^j} \ge 0 >$$

$$> \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_{s_j+1}^j}} - 2\rho x_{\beta_{s_j+1}^j} \ge \ldots \ge \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_k^j}} - 2\rho x_{\beta_k^j}, \quad (3.31)$$

переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta) \in E_\eta(J_\eta)$ – умовою (3.23), а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (3.1).

Доведення. Скориставшись лемою 1.5 (лемами 4 та 5 з [33; 34]), покладемо $E = E_{\eta n}^{ks}(G)$. При цьому врахуємо, що згідно із зауваженням 3.2 при сталих $c_i \quad \forall i \in J_k$, які обчислюються за формулою

$$c_i = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \quad \forall i \in J_k, \quad (3.32)$$

одержимо

$$\min_{y \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \sum_{i=1}^{k}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i)y_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{s_j}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j})g_i^{N_i} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j}(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i^j}} - 2\rho x_{\beta_i^j})g_{\eta_{j-k_j+i}}^{N_i}),$$

де переставлення $(\beta_1^j,...,\beta_{k_j}^j) \in E_{k_j}(N_j')$ і стала $s_j \in J_{k_j}^0$ задовольняють умови (3.14), (3.32), які, очевидно, еквівалентні нерівності (3.31), а елементи мультимножини **G**, як і раніше, упорядковані згідно з нерівністю (3.1). Таким чином, одержуємо справедливість теореми.

Задачу знаходження

$$\mathbf{g^*} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2, \quad \mathbf{c} \in \mathbf{R}^k, \qquad (3.33)$$

можна розв'язати так, як це описано для множини поліпереставлень $\mathbf{E}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ у [33; 111] та загальної множини розміщень у [109]. Точка (3.33) дає можливість посилити оцінки з теорем 3.6; 3.7.

Теорема 3.8.

Якщо функція $\psi(\mathbf{x})$ – сильно опукла з параметром $\boldsymbol{\rho} > \mathbf{0}$ і диферентційовна на опуклій замкненій множині $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^k$, $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \subset \mathbf{X}$, то

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}} \psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{w}) + \|\mathbf{g^*} - \mathbf{w}\|^2, \qquad (3.34)$$

де точка **w** задовольняє умову (3.25), а **g*** – співвідношення (3.33).

Доведення. Скористаємося лемою 1.6 (або теоремою 8 з [33]), в якій $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G})$, де точка **g*** означається умовою (3.33). Тоді нерівність (3.34) одразу випливає з умови цього твердження. Що і треба було довести.

Теорема 3.9.

Якщо функція $\psi(\mathbf{x})$ – сильно опукла з параметром $\boldsymbol{\rho} > \mathbf{0}$ і диферентційовна на опуклій замкненій множині $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^k$, $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H}) \subset \mathbf{X}$, то

1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}} \psi(\mathbf{y}) \geq \psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(\mathbf{x})\|^2 + \rho\|\mathbf{g^*} - \mathbf{c}\|^2; \qquad (3.35)$$

2) щоб точка $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ була мінімаллю функції $\psi(\mathbf{x})$ на множині $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, достатньо виконання умови

$$\|\nabla\psi(\mathbf{x})\|^2 = 2\rho\|\mathbf{g^*} - \mathbf{c}\|, \qquad (3.36)$$

де точка **g*** означається рівністю (3.33), а точка **c** – співвідношенням

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} - \frac{1}{4\rho}\nabla\psi(\mathbf{x}). \qquad (3.37)$$

Обґрунтування теореми проводиться з використанням леми 1.7, або леми 6 та наслідку 8 з [33].

Теорема 3.10.

Якщо $\varepsilon \geq 0$, $\alpha \in (0,1)$, а $\psi(\mathbf{x})$ – сильно опукла функція з параметром сильної опуклості $\rho > 0$, що задана в $\mathbf{R}^k$; $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ – множина поліррозміщень, то:

1) $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$

$$\min_{x \in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} \psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{y}) - (\mathbf{p}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) - \varepsilon\alpha^{-1} + (1-\alpha)\rho\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} y_i^2\Big) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j}(p_{\beta_i^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j}) g_i^{N_j} +$$

$$+ \sum_{i=s_j+1}^{k_j}(p_{\beta_i^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j}) g_{\eta_j - k_j + i}^{N_j}\Big); \qquad (3.38)$$

2) щоб точка $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ доставляла мінімум на множині $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ функції $\psi(\mathbf{x})$, достатньо виконання умови

$$\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j}(p_{\beta_i^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j}) g_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j}(p_{\beta_i^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j}) g_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big) +$$

$$+ (1-\alpha)\rho\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} y_i^2\Big) \geq (\mathbf{p}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) + \varepsilon\alpha^{-1}, \qquad (3.39)$$

де $\mathbf{p}(\mathbf{y}) = (\mathbf{p}_1(\mathbf{y}),\dots,\mathbf{p}_k(\mathbf{y})) \in \partial_\varepsilon \psi(\mathbf{y})$ – субградієнт функції $\psi(\mathbf{x})$ у точці у, переставлення $(\beta_1^j,\dots,\beta_{k_j}^j) \in \mathbf{E}_{k_j}(\mathbf{N}_j')$ та стала $\mathbf{s}_j \in \mathbf{J}_{k_j}^{\circ}$ задовольняють умову

$$p_{\beta_1^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_1^j} \geq \dots \geq p_{\beta_{s_j}^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s_j}^j} \geq 0 >$$

$$> p_{\beta_{s_j+1}^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s_j+1}^j} \geq$$

$$\geq \dots \geq p_{\beta_{k_j}^j}(y) - 2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{k_j}^j}, \quad \forall j \in \mathbf{J}_s, \qquad (3.40)$$

сталі $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{s}_j$ такі:

$$r_j, s_j \in J_{k_j}^{\circ}, \quad s_j + r_j = k_j, \quad \forall j \in J_s, \qquad (3.41)$$

переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ означається таким співвідношенням для елементів $G=\{g_1,...,g_\eta\}$:

$$|g_{\delta_1}|\le|g_{\delta_2}|\le...\le|g_{\delta_\eta}|, \tag{3.42}$$

а елементи **G** упорядковані згідно з нерівностями

$$g_1^{N_j}\le...\le g_{\eta_j}^{N_j} \quad \forall j\in J_s. \tag{3.43}$$

Доведення. Скористаємося лемою 9.4 з [135], згідно з якою при умовах теореми справедлива $\forall x,\ \forall y\in R^k$ нерівність:

$$\psi(x)-\psi(y)\ge(p(y),x-y)-\varepsilon\alpha^{-1}+(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2.$$

Це дає

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}\psi(x)\ge\psi(y)-(p(y),y)-\varepsilon\alpha^{-1}+\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}A,$$

де

$$A=(\sum_{i=1}^k p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2). \tag{3.44}$$

Перетворимо вираз **A**.

$$A=\sum_{i=1}^k p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^k(x_i-y_i)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^k p_i(y)x_i+(1-\alpha)\rho\left[\sum_{i=1}^k x_i^2-2\sum_{i=1}^k x_iy_i+\sum_{i=1}^k y_i^2\right].$$

Перейдемо до мінімуму по $x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ та зробимо перстворення, скориставшись властивостями мінімуму:

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}A=\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}\left[(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^k x_i^2+\sum_{i=1}^k(p_i(y)-2(1-\alpha)\rho y_i)+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\rho\sum_{i=1}^k y_i^2\right]\ge(1-\alpha)\rho(\sum_{i=1}^k g_{\delta_i}^2+\sum_{i=1}^k y_i^2)+$$

$$+\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}\sum_{i=1}^k(p_i(y)-2(1-\alpha)\rho y_i)x_i, \tag{3.45}$$

де $\delta_1,...,\delta_k$ задовольняють (3.42). У правій частині (3.45) мінімум знайдемо за теоремою 3.1. Маємо:

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)} A=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s_j}(p_{\beta_i^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j})g_i^{N_j}+$$

$$+\sum_{i=s_j+1}^{k_j}(p_{\beta_i^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_i^j})g_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}), \qquad (3.46)$$

де $p(y)=(p_1(y),...,p_k(y))\in\partial_\varepsilon\psi(y)$ – субградієнт функції $\psi(x)$ у точці y, переставлення $(\beta_1^j,...,\beta_{k_j}^j)\in E_{k_j}(N_j^{'})$ та стала $s_j\in J_{k_j}^{\circ}$ задовольняють умову

$$p_{\beta_1^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_1^j}\geq...\geq p_{\beta_{s_j}^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s_j}^j}\geq 0>$$

$$>p_{\beta_{s_j+1}^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{s_j+1}^j}\geq...\geq p_{\beta_{k_j}^j}(y)-2(1-\alpha)\rho y_{\beta_{k_j}^j},\quad \forall j\in J_s$$

сталі k_j,s_j такі:

$$r_j,s_j\in J_{k_j}^{\circ},\quad s_j+r_j=k_j,\ \forall j\in J_s,$$

переставлення $(\delta_1,...,\delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ означається таким співвідношенням для елементів $G=\{g_1,...,g_\eta\}$:

$$|g_{\delta_1}|\leq|g_{\delta_2}|\leq...\leq|g_{\delta_\eta}|,$$

а елементи G упорядковані згідно з нерівностями

$$g_1^{N_j}\leq...\leq g_{\eta_j}^{N_j}\quad \forall j\in J_s.$$

Підставивши (3.46) у (3.44) одержуємо справедливість першої частини теореми. Друга частина доводиться на основі означення мінімуму, тобто виконання

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}\psi(x)\leq\psi(y), \qquad (3.47)$$

$y\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$. При виконанні для такого y нерівності (3.39) з доведеної у першій частині теореми нерівності (3.38) маємо справедливість співвідношення:

$$\min_{x\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)}\psi(x)\geq\psi(y)+B\geq\psi(y), \qquad (3.48)$$

де $B\geq 0$ – алгебраїчна сума всіх (крім $\psi(x)$) доданків правої частини (3.38). З одночасної справедливості (3.47) та (3.48) маємо, що точка

$\mathbf{y} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, на якій це виконується, є мінімаллю функції $\psi(\mathbf{x})$ на множині $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$, що і треба було довести в другій частині теореми. Таким чином, теорема доведена.

Наслідок 3.10.1. Якщо $\psi(\mathbf{x})$ – сильно опукла функція з параметром сильної опуклості $\rho > 0$, що задана на $\mathbf{R}^k$, $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ – множина полірозміщень, то

1) $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$

$$\min_{\mathbf{x}\in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})} \psi(\mathbf{x}) \ge \psi(\mathbf{y}) - (\mathbf{p}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) + \rho\sum_{i=1}^{k} \mathbf{g}_{\delta_i}^2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j}(\mathbf{p}_{\beta_i^j}(\mathbf{y}) - 2\rho \mathbf{y}_{\beta_i^j})\mathbf{g}_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j}(\mathbf{p}_{\beta_i^j}(\mathbf{y}) - 2\rho \mathbf{y}_{\beta_i^j})\mathbf{g}_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big); \quad (3.49)$$

2) щоб точка $\mathbf{y} \in \mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ доставляла мінімум на множині $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ функції $\psi(\mathbf{x})$, достатньо виконання умови

$$\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{s_j}(\mathbf{p}_{\beta_i^j}(\mathbf{y}) - 2\rho \mathbf{y}_{\beta_i^j})\mathbf{g}_i^{N_j} + \sum_{i=s_j+1}^{k_j}(\mathbf{p}_{\beta_i^j}(\mathbf{y}) - 2\rho \mathbf{y}_{\beta_i^j})\mathbf{g}_{\eta_j-k_j+i}^{N_j}\Big) +$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{k}\mathbf{g}_{\delta_i}^2 + \rho\sum_{i=1}^{k}\mathbf{y}_i^2 \ge (\mathbf{p}(\mathbf{y}),\mathbf{y}), \quad (3.50)$$

де $\mathbf{p}(\mathbf{y}) = (\mathbf{p}_1(\mathbf{y}),...,\mathbf{p}_k(\mathbf{y})) \in \partial\psi(\mathbf{x})$ – субградієнт функції $\psi(\mathbf{x})$ в точці $\mathbf{y}$, переставлення $(\beta_1^j,...,\beta_{k_j}^j) \in \mathbf{E}_{k_j}(\mathbf{N}_j')$, а параметри, що входять у (3.49), (3.50) задовольняють умови (3.40) (при $\alpha = 0$), (3.41)-(3.43).

Зазначимо, що одержані твердження як наслідки дають аналогічні результати для переставлень і поліпереставлень, а також розміщень, оскільки при певних параметрах множина $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ стає однією з перерахованих множин. Так, при $\mathbf{s} = 1$ множина $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ це евклідова загальна множина $\mathbf{k}$-розміщень. При $\mathbf{k}=\eta$ з $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ маємо множину поліпереставлень, якщо при цьому ще й $\mathbf{s} = 1$, то множина $\mathbf{E}_{\eta n}^{ks}(\mathbf{G},\mathbf{H})$ стає загальною множиною переставлень, або, залежно від складу $\mathbf{G}$, – її певним частковим випадком (множиною переставлень без повторень тощо). Таким чином, одержані результати узагальнюють аналогічні дослідження для цих часткових випадків множини полірозміщень.

3.5. Зв'язок задач цілочислового програмування та задач на полірозміщеннях

Розглянуті властивості опуклих та сильно опуклих функцій можуть бути використані в релаксаційних підходах розв'язування задач цілочислового програмування, оскільки ці задачі можна розглядати як задачі на загальній множині полірозміщень. Позначимо $\mathbf{Z}$ множину цілих чисел, $\mathbf{Z}_k$ – множину точок з цілочисловими координатами у просторі $\mathbf{R}^k$, $f_j(x)$ – функції, що діють з $\mathbf{Z}_k$ у $\mathbf{R}^1$ $\forall j \in J_m^0$, $m \in Z$, $m \geq 0$, $x = (x_1, \dots, x_k)$. Розглянемо задачу цілочислового програмування: знайти

$$\min_{x \in R^k} f_0(x) \tag{3.51}$$

при обмеженнях

$$x \in Z_k, \quad a_j \leq x_i \leq b_j, \quad a, b \in Z \quad \forall i \in J_k, \tag{3.52}$$

$$f_j(x) \leq d_j, \quad d_j \in R^1, \quad \forall j \in J_m. \tag{3.53}$$

Розглянемо мультимножину $G_i = S(G_i) = \{a_i, a_i + 1, \dots, b_i\}$, $[G_i] = (1^{n_i})$ $|G_i| = n_i = b_i - a_i + 1$, $\forall i \in J_s$ та евклідову множину полірозміщень $E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, де $k = s$ (тобто $k_1 = \dots = k_s = 1$), як суму мультимножин G_i:

$$G = \sum_{i=1}^{s} G_i = \{a_1, \dots, b_1, a_2, \dots, b_2, \dots, a_m, \dots, b_m\},$$

$n = |S(G)|$, $[G] = (\eta_1, \dots, \eta)$, $\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $\eta = n_1 + \dots + n_s$.

Множина $\mathbf{H}$ утворюється з множин $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$, $N_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \dots, N_s = \{n_1 + \dots + n_{s-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_s\}$.

Розглянемо задачу: знайти

$$\min_{x \in R^k} f_0(x) \tag{3.54}$$

при обмеженнях

$$x \in E_{\eta n}^{ks}(G, H) \tag{3.55}$$

і додаткових обмеженнях

$$f_j(x) \leq d_j, \quad d_j \in R^1, \quad \forall j \in J_m. \tag{3.56}$$

Легко бачити, що в силу того, що обмеження (3.52) задачі цілочислового програмування (3.51)-(3.53) еквівалентні при описаному виборі мультимножини $\mathbf{G}$ обмеженням (3.55) задачі евклідової комбінаторної *оптимізації (3.54)-(3.56), то і самі ці задачі еквівалентні*, бо цільові функції (3.51), (3.54) та обмеження (3.53), (3.56) збігаються.

ГЛАВА 4

Метод відсікання для лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації

У четвертій главі розглядається метод відсікання для одного класу задач оптимізації на комбінаторних множинах евклідового простору з лінійними цільовими функціями і додатковими обмеженнями.

4.1. Постановка задачі

Ряд відомих задач геометричного проектування (див., наприклад, [24; 26; 110; 111; 115]) підводить до необхідності розв'язувати лінійні частково комбінаторні задачі евклідової комбінаторної оптимізації, тобто задачі вигляду: знайти упорядковану пару **<C(y*),y*>**, таку, що

$$\mathbf{C(y^*)} = \underset{\mathbf{y \in R^m}}{\mathbf{extr}} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{c_j y_j}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y^*} = \mathbf{arg}\ \underset{\mathbf{y \in R^m}}{\mathbf{extr}} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{c_j y_j} \tag{4.2}$$

при умові

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x_1, ..., x_k}) \in \mathbf{E} \subset \mathbf{R^k} \tag{4.3}$$

і додаткових обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_{ij} y_j} \le \mathbf{b_i}, \quad \mathbf{i} \in \mathbf{J_r}, \tag{4.4}$$

де **E** – евклідова комбінаторна множина,

$\mathbf{y} = (\mathbf{x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_m}) \in \mathbf{R^m}$;

m, **r**, **k** – задані натуральні константи ($\mathbf{m \ge k}$);

$\mathbf{c_j}, \mathbf{a_{ij}}, \mathbf{b_i}$ –задані дійсні числа $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{J_m}$, $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J_r}$.

Відомі методи, які швидко дають розв'язок таких задач, є наближеним або евристичним. Точні алгоритми розв'язку цих задач розробляються в основному в рамках методу гілок та меж, який, як відомо, має суттєві вади. Тому актуальною є задача розробки нових підходів до одержання точного розв'язку задачі (4.1)-(4.4).

4.2. Метод відсікання в евклідовій комбінаторній оптимізації для лінійних частково комбінаторних задач

У багатьох задачах вигляду (4.1)-(4.4) евклідова комбінаторна множина **E** збігається з множиною вершин своєї опуклої оболонки, тобто:

$$\mathbf{E} = \mathbf{vert\ conv\ E}. \tag{4.5}$$

Властивість (4.5), як відомо (див., наприклад, [22; 24; 109; 111]), виконується для множини переставлень без повторень, парних переставлень, переставлень з j-ою забороною; загальної множини переставлень; загальної множини поліпереставлень; деяких множин розміщень і полірозміщень, що фігурують у наслідку 2.7.1.

Наявність властивості (4.5) дозволяє побудувати метод відсікання для розв'язування задачі (4.1)-(4.4), що не має головних труднощів методу відсікання в дискретній оптимізації. А саме:

1) немає необхідності перевіряти «правильність» відсікання (чи задовольняють нерівності-відсіканню всі допустимі, тобто такі, що задовольняють співвідношення (4.3), (4.4), розв'язки задачі (4.1)-(4.4);

2) відсікання, яке проведено через суміжні з відсікаємою точкою вершини, апріорі має властивість достатньої «глибини», тобто внутрішніх допустимих точок задача (4.1)-(4.4) не має.

Таким чином, можемо сформулювати метод відсікання для розв'язування задачі (4.1)-(4.4), в якому будемо використовувати умову

$$\mathbf{x} \in \mathbf{conv\,E}\,. \tag{4.6}$$

Зазначимо, що відомі опуклі оболонки **conv E** евклідових комбінаторних множин **E**, як названих вище, так і інших у вигляді систем лінійних обмежень [22; 24; 25; 26; 31; 35; 110; 111; 115].

Розглянемо схему методу, що поширює метод відсікання розглянутий в [32], на задачі частково комбінаторні (тобто на задачі вигляду (4.1)-(4.4).

1. Розв'язуємо задачу знаходження упорядкованої пари $<\mathbf{C}(\mathbf{y}^*),\mathbf{y}^*>$ при умовах (4.1), (4.2), (4.4), (4.6). Це задача лінійного програмування.

2. За $\mathbf{y}^*$ формуємо $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*,\ldots,\mathbf{x}_k^*)$, $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{y}_i^*$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_k$ та перевіряємо для $\mathbf{x}^*$ умову (4.3). Якщо $\mathbf{x}^* \in \mathbf{E}$, то задача (4.1)-(4.4) розв'язана. В іншому разі переходимо до пункту 3.

3. Знаходимо суміжні з $\mathbf{y}^*$ вершини многогранника, який описується умовами (4.4), (4.6). Визначаємо напівпростір, межа якого проходить через ці суміжні з $\mathbf{y}^*$ вершини, а точка $\mathbf{y}^*$ не належить йому:

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_{r+1,j}\mathbf{y}_j \le \mathbf{b}_{r+1}\,.$$

Цю нерівність додаємо до системи (4.4) і з урахуванням цього переходимо до пункту 1. Ілюстрацію ідеї методу відсікання наведено на рисунку 4.1.

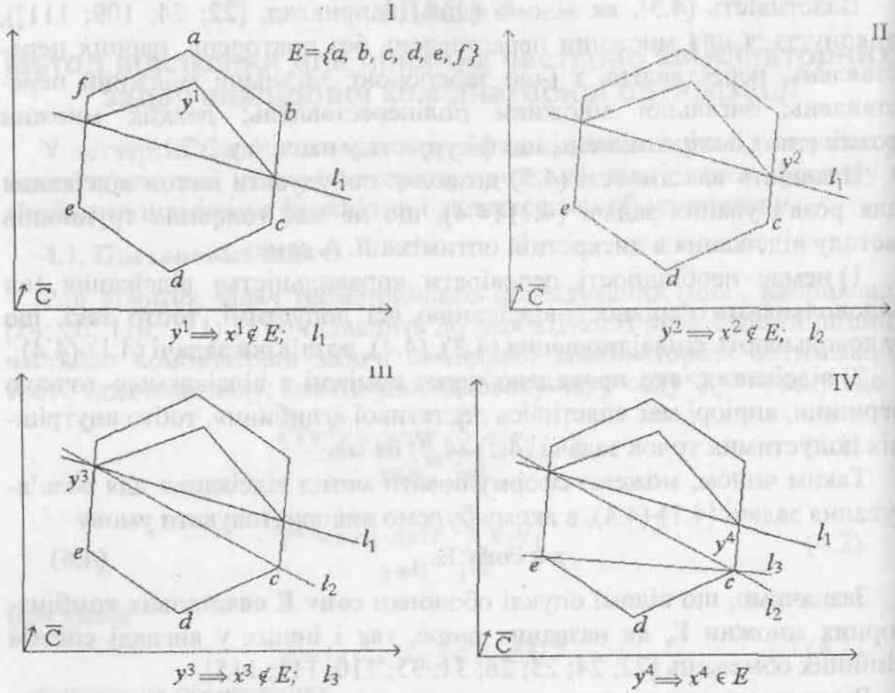


Рис. 4.1. Ілюстрація ідеї методу відсікання на $E = vertconv\ E$

4.3. Алгоритм та обґрунтування методу

Нехай задача (4.1), (4.2), (4.4), (4.6) перетворена до канонічного вигляду задачі максимізації: знайти пару $< C(y^*), y^* >$, таку, що

$$C(y^*) = \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j , \qquad (4.7)$$

$$y^* = (y_1^*, ..., y_n^*) = \arg\max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \qquad (4.8)$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i , \quad \forall i \in J_s , \quad y_j \ge 0 \quad \forall j \in J_n . \qquad (4.9)$$

Зазначимо, що $n \ge m$, $s > r$.

Сформулюємо алгоритм методу відсікання.

Нехай цілочислова змінна $q = 0$.

Крок 1. Розв'язуємо задачу (4.7)-(4.9) прямим або двоїстим симплекс-методом. Якщо ця задача нерозв'язна, то нерозв'язна і вихідна задача, зупинка алгоритму. В іншому випадку – перехід на крок 2.

Крок 2. Перевіряємо $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}_1^*, ..., \mathbf{y}_k^*) \in \mathbf{E}$ (чи виконується умова (4.3)). Якщо (4.3) для $\mathbf{x}^*$ виконано, то задача (4.1)-(4.4) розв'язана, зупинка алгоритму. В іншому випадку переходимо на крок 3 алгоритму.

Крок 3. Перевіряємо $\mathbf{q} > 1$. Якщо «так», то робимо перехід на крок 5. Інакше – перехід на крок 4.

Крок 4. Збільшуємо $\mathbf{q}$ на одиницю. Додаємо до (4.9) сформовану нерівність-відсікання

$$\frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_1}}{\Theta_{\mathbf{j}_1}} + \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_2}}{\Theta_{\mathbf{j}_2}} + ... + \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_\gamma}}{\Theta_{\mathbf{j}_\gamma}} \geq 1 \qquad (4.10)$$

у вигляді рівності

$$-\frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_1}}{\Theta_{\mathbf{j}_1}} - \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_2}}{\Theta_{\mathbf{j}_2}} - ... - \frac{\mathbf{y}_{\mathbf{j}_\gamma}}{\Theta_{\mathbf{j}_\gamma}} + \mathbf{y}_{\mathbf{n+q}} = -1, \qquad (4.11)$$

ввівши допоміжну змінну $\mathbf{y}_{\mathbf{n+q}} \geq 0$. У формулах (4.10), (4.11) $\mathbf{j}_1, ..., \mathbf{j}_\gamma$ – номера небазисних змінних в останній точці $\mathbf{y}^*$; γ – їх кількість, а $\Theta_{\mathbf{j}_\mathbf{i}}$ $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{J}_\gamma$ знаходиться так:

$$\Theta_{\mathbf{j}} = \min_{\mathbf{i}:\mathbf{a}_{\mathbf{ij}} > 0} \frac{\mathbf{b}_\mathbf{i}}{\mathbf{a}_{\mathbf{ij}}} = \frac{\mathbf{b}_\mathbf{t}}{\mathbf{a}_{\mathbf{tj}}}. \qquad (4.12)$$

Переходимо на крок 1 алгоритму.

Крок 5. Перевіряємо: $\Theta_{\mathbf{n+q-1}} = 0$ ($\Theta_{\mathbf{n+q-1}}$ обчислюється за формулою (4.12). Якщо «ні», переходимо на крок 4. Якщо «так», то в останній приєднаній до системи (4.9) рівності (4.11) замінюємо введену там допоміжну змінну ($\mathbf{y}_{\mathbf{n+q}}$) на 0; переходимо на крок 1 алгоритму.

Обґрунтовує метод наступна теорема.

Теорема 4.1.

Якщо $\mathbf{j}_\tau$ $(\mathbf{j}_\tau \in \mathbf{J} \quad \forall \tau \in \mathbf{J}_\gamma, \quad \gamma = |\mathbf{J}|)$ – номери небазисних змінних у розв'язку $\mathbf{y}^* = (\mathbf{y}_1^*, ..., \mathbf{y}_\mathbf{n}^*)$ задачі лінійного програмування, то нерівність (4.10), де $\Theta_{\mathbf{j}_\tau}$ $\forall \tau \in \mathbf{J}_\gamma$ обчисляється за формулою (4.12), всі суміжні з $\mathbf{y}^*$ вершини допустимої області задовольняє як рівність, а точка $\mathbf{y}^*$ нерівність (4.10) не справджує.

Доведення. Оскільки $\mathbf{x}_{j_1},\ldots\mathbf{x}_{j_\gamma}$ – небазисні змінні, то в точці $\mathbf{y}^*$ вони дорівнюють нулю. Таким чином, очевидно, що точка $\mathbf{y}^*$ не задовольняє нерівності (4.10). В силу алгоритму побудови суміжної вершини, у вершині $\tilde{\mathbf{y}}$, яка суміжна з точкою $\mathbf{y}^*$, як відомо (див., наприклад, [3, 131, 133, 138]), координата $\mathbf{y}_{j_\tau} = \Theta_{j_\tau}$, $\forall\tau \in \mathbf{J}_\gamma$, а інші (з набору $\mathbf{y}_{j_1},\ldots\mathbf{y}_{j_\gamma}$) дорівнюють нулю. Отже, в будь-якій точці $\tilde{\mathbf{y}}$ нерівність (4.10) обертається в рівність. Теорема доведена.

Зауваження 4.1. Зазначимо, що умова (4.3) визначає обмеженість області допустимих розв'язків задачі (4.1)-(4.4). Крім цього передбачається, що кожний базис, який розглядається при розв'язуванні задач (4.7)-(4.9) і тих, що одержуються з них додаванням умов-відсікань, – невироджений, в іншому випадку можна скористатися одним з відомих методів збурення (див., наприклад, [131; 139]) і одержати невироджений базис.

У зв'язку з цим очевидна скінченість алгоритму. Дійсно, зміна $\mathbf{y}_{n+q}$ (див. (4.11) після застосування двоїстого симплекс-методу стає рівною нулю (виводиться з базису), тобто гіперплощина (4.11) нових вершин у перерізі з ребрами не утворює. Оскільки при $\mathbf{y}_{n+q} = 0$ ця гіперплощина (іншими словами межа напівпростору-відсікання (4.10) проходить через суміжні вершини до точки $\mathbf{y}^*$, яка відсікається, а вершина $\mathbf{y}^*$ є невиродженою (тобто утвореною в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ перерізом $\mathbf{n}$ гіперплощин), то побудована гіперплощина перерізає ребра допустимої області тільки по вершинам області, тобто нові вершини не утворюються.

За один прохід алгоритму відсікається (по суміжним вершинам) одна вершина, або відбувається фактичний перехід у простір на одиницю меншої вимірності за рахунок приєднання (на кроці 5) рівності до системи (4.9). Скінченість множини вершин допустимої області й обмеженість числа $\mathbf{n}$ забезпечують скінченість алгоритму.

Зауваження 4.2. Зазначимо, що в спеціальному дослідженні ефективності методу немає потреби, бо розглянутий метод відсікання тісно пов'язаний з добре дослідженим симплекс-методом для задач лінійного програмування загальною спільною властивістю – перебором суміжних вершин (у симплекс-методі – після аналізу вершини на оптимальність для переходу до вершини з більшим (у невиродженій задачі на максимум) значенням цільової функції, в методі відсікання – після аналізу вершини на справдження умови (4.3) та її (вершини) відсікання – до суміжної з меншим значенням цільової функції).

Ефективність методу відсікання порівняна з ефективністю симплекс-методу, оскільки визначається, в основному, цим перебором вершин. Це означає, що, як і для симплекс-методу, можуть бути побудовані «патологічні» приклади, де перебираються всі вершини допустимої області. Але це ж дозволяє зробити і той висновок, що при практичному застосуванні, тобто «в середньому», метод відсікання буде вести себе так же добре, як і симплекс-метод. Це ж підтверджують і результати числових експериментів, викладені в п. 4.5.

4.4. Ілюстративний приклад застосування методу

Розглянемо приклад застосування алгоритму.

Для цього візьмемо задачу пакування прямокутників однакової ширини в смугу [110].

Як відомо [24; 110; 111], її математична модель може бути представлена у вигляді (4.1)-(4.4).

Для ілюстрації візьмемо таку конкретну постановку: знайти

$$C(x^*) = \min_{x \in R^4} x_4; \quad x^* = \arg\min_{x \in R^4} x_4 \tag{4.13}$$

при умові

$$(x_1, x_2, x_3) \in E_{32}(G) \tag{4.14}$$

і додаткових обмеженнях

$$x_1 + x_2 \le x_4; \tag{4.15}$$

$$x_3 \le x_4; \tag{4.16}$$

$$x_1 \le x_2; \tag{4.17}$$

де $E_{32}(G)$ – загальна множина 3-переставлень з двох різних чисел, що складають мультимножину $G = \{1; 1; 3\}$.

Змістовно задачу (4.13)-(4.17) можна сформулювати так: знайти мінімум довжини (x_4) зайнятої частини достатньо довгої смуги, що розділена на дві смужки однакової ширини h, при розміщенні в них трьох прямокутників довжини відповідно 1, 1, 3 такої ж ширини h, а також знайти розташування $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ цих прямокутників.

Змінні x_1, x_2 – довжини прямокутників у першій смужці, x_3 – довжина прямокутника в другій смужці не порушуючи загальності, можна вважати першою ту смугу, в якій стоять два прямокутника, тобто зрозуміло, що немає сенсу з точки зору умов задач розглядати розв'язки з трьома прямокутниками в одній зі смуг.

Умова (4.14) означає, що довжини (x_1, x_2, x_3) – переставлення чисел 1, 1, 3. Нерівності (4.15), (4.16) означають, що довжина x_4 зайнятої частини смуги не менше суми довжин прямокутників у першій смужці $(x_1 + x_2)$ і довжини прямокутника в другій (x_3).

Умова (4.17), без обмеження загальності міркувань, дозволяє розглядати тільки ту частину допустимої множини, де перший прямокутник (у першій смужці) не довше другого.

Розглянемо реалізацію запропонованого алгоритму для задачі (4.13)-(4.17). Переходимо до розв'язку допоміжної задачі лінійного програмування: знайти

$$C(x^*) = \max_{x\in R^4}(-x_4); \quad x^* = \arg\max_{x\in R^4}(-x_4) \tag{4.18}$$

при умові

$$\begin{cases} x_1 \le 3; \\ x_2 \le 3; \\ x_3 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 + x_3 \le 4; \\ x_2 + x_3 \le 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \tag{4.19}$$

і додаткових обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \le 0; \\ x_3 - x_4 \le 0; \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Тут система (4.19) описує, як відомо [24; 35; 110; 111], загальний переставний многогранник $\Pi_{32}(G) = \mathrm{conv}E_{32}(G)$.

Зведемо задачу лінійного програмування (4.18)-(4.20) до канонічної форми, ввівши додаткові невід'ємні змінні $x_5,\dots,x_{13}$.

Система (4.19), (4.20) прийме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 3; \\ x_2 + x_6 = 3; \\ x_3 + x_7 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_8 = 4; \\ x_1 + x_3 + x_9 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_{10} = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_{11} = 0{,}02 = 2\varepsilon; \\ x_3 - x_4 + x_{12} = 0{,}01 = \varepsilon; \\ x_1 - x_2 + x_{13} = 0{,}03 = 3\varepsilon. \end{cases} \tag{4.21}$$

Три останні рівності системи (4.21) «збурені» для одержання невиродженого базису ($\varepsilon = 0{,}01$).

Зазначимо, що для задач лінійного програмування тут використовується термінологія, позначення, форми симплекс-таблиць, які наводяться, наприклад, у [3].

Складемо розширену задачу для задач (4.18), (4.21), ввівши штучну невід'ємну змінну $\mathbf{x_{14}}$ у сьоме рівняння системи (4.21). Співвідношення, які задають цільову функцію, приймуть вигляд

$$\mathbf{C(x^*) = \max_{x \in R^{14}}(-x_4 - Mx_{14});}$$

$$\mathbf{x^* = arc \max_{x \in R^{14}}(-x_4 - Mx_{14}),} \qquad (4.22)$$

де $\mathbf{M} > 0$ – достатньо велике додатне число.

Застосуємо метод штучного базису, включивши в базис підряд всі вектори починаючи з $\mathbf{P_5}$ до $\mathbf{P_{13}}$ включно. В симплекс-таблицях без необхідності не будемо наводити стовпці, що відповідають базисним нештучним змінним, також не будемо ставити без необхідності в таблицях нулі, залишаючи при цьому клітини симплекс-таблиць порожніми.

Розв'язок розширеної задачі (4.21), (4.22) наведено в наступних симлекс-таблицях (4.1)-(4.5), де $\mathbf{N}$ означає номер рядка.

Як випливає з таблиці 4.5, одержано не тільки розв'язок розширеної задачі, але й також оптимальний розв'язок вихідної задачі лінійного програмування (4.18), (4.21). Таким чином, крок 1 алгоритму методу відсікання виконано.

Переходимо до кроку 2. З таблиці 4.5 маємо: $x_1^* = 1$; $x_2^* = {}^3\!/_2$ $x_3^* = {}^5\!/_2$. Це не переставлення чисел 1; 1; 3. Тобто, переходимо на крок 3, а далі 4.

Будуємо відсікання точки $\mathbf{y^*}$, координати якої стоять в стовпці $\mathbf{P_0}$ таблиці 4.5. З цією метою симплекс-таблицю (табл. 4.5) доповнимо стовпцями, в яких обчислимо частку $\mathbf{b_i}$ ($\mathbf{b_i}$ – елементи стовпця $\mathbf{P_0}$) до $\mathbf{a_{ij}} > 0$ ($\mathbf{a_{ij}}$ – елементи стовпця $\mathbf{P_j}$) для всіх рядків симплекс-таблиці, що відповідають базисним змінним ($\mathbf{N \in J_{10}}$), і стовпців, які відповідають небазисним змінним ($\mathbf{j \in \{10, 11, 12\}}$). Стовпець для $\mathbf{x_{14}}$ при цьому виключаємо з таблиці відповідно до правил методу штучного базису і в подальшому не розглядаємо.

Таблиця 4.1. Перша симплекс-таблиця розв'язку задачі (4.21)-(4.22)

N	Базис	C_0	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3	–1 P_4	–M P_{14}
1	P_5	0	3	1				
2	P_6	0	3		1			
3	P_7	0	3			1		
4	P_8	0	4	1	1			
5	P_9	0	4	1		1		
6	P_{10}	0	4		1	1		
7	P_{14}	–M	5	1	1	1		1
8	P_{11}	0	0,02	1	1		–1	
9	P_{12}	0	0,01			1	–1	
10	P_{13}	0	0,03	1	–1			
11							1	
12			–5	–1	–1	–1		

Таблиця 4.2. Друга симплекс-таблиця розв'язку задачі (4.21)-(4.22)

N	Базис	C_0	P_0	0 P_1	0 P_2	–1 P_4	0 P_{12}	–M P_{14}
1	P_5	0	3	1				
2	P_6	0	3		1			
3	P_7	0	3			1	–1	
4	P_8	0	4	1	1			
5	P_9	0	4	1		1	–1	
6	P_{10}	0	4		1	1	–1	
7	P_{14}	–M	5	1	1	1	–1	1
8	P_{11}	0	0,02	1	1	–1		
9	P_3	0	0,01			–1	1	
10	P_{13}	0	0,03	1	–1			
11						1		
12			–5	–1	–1	–1	1	

Таблиця 4.3. Третя симплекс-таблиця розв'язку задачі (4.21)-(4.22)

N	Базис	C_0	P_0	0	–1	0	0	–M
				P_1	P_4	P_{11}	P_{12}	P_{14}
1	P_5	0	3	1				
2	P_6	0	3	–1	1	–1		
3	P_7	0	3		1		–1	
4	P_8	0	4		1	–1		
5	P_9	0	4	1	1		–1	
6	P_{10}	0	4	–1	2	–1	–1	
7	P_{14}	–M	5		2	–1	–1	1
8	P_2	0	0,02	1	–1	1		
9	P_3	0	0,01		–1		1	
10	P_{13}	0	0,05	2	–1	1		
11					1			
12			–5		–2	1	1	

Таблиця 4.4. Четверта симплекс-таблиця розв'язку задачі (4.21)-(4.22)

N	Базис	C	P	0	0	0	0	–M
				P_1	P_1	P_{11}	P_{12}	P_{14}
1	P_5	0	3	1				
2	P_6	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	
3	P_7	0	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	
4	P_8	0	2	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	
5	P	0	2	$3/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	
6	P_4	–1	2	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	
7	P_{14}	–M	1	1	–1			1
8	P_2	0	2,02	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	
9	P	0	2,01	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	
10	P_{13}	0	2,05	$3/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	
11		0	–2	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	
12			–1	–1	1			

Таблиця 4.5. П'ята симплекс-таблиця розв'язку задачі (4.21)-(4.22)

N	Базис	C_0	P_0	0	0	0	b_i/a_{ij}		
				P_{10}	P_{11}	P_{12}	j = 10	j =11	j = 12
1	P_5	0	2	1			2	∞	∞
2	P_6	0	$^3/_2$	–1	$-^1/_2$	$^1/_2$	<0	<0	3
3	P_7	0	$^1/_2$		$^1/_2$	$-^1/_2$	∞	1	<0
4	P_8	0	$^3/_2$		$-^1/_2$	$^1/_2$	∞	<0	3
5	P_9	0	$^1/_2$	1	$^1/_2$	$-^1/_2$	$^1/_2$	1	<0
6	P_4	–1	$^5/_2$		$-^1/_2$	$-^1/_2$	∞	<0	<0
7	P_1	0	1	–1			< 0	∞	∞
8	P_2	0	$0{,}02 + {^3/_2}$	1	$^1/_2$	$-^1/_2$	$0{,}02 + {^3/_2}$	3	<0
9	P_3	0	$0{,}01 + {^5/_2}$		$-^1/_2$	$^1/_2$	∞	<0	3
10	P_{13}	0	$0{,}05 + {^1/_2}$	2	$^1/_2$	$-^1/_2$	$0{,}025 + {^1/_4}$	1	<0
11		0	$-^5/_2$		$^1/_2$	$^1/_2$			

Як видно з таблиці 4.5 та формули (4.12), $\Theta_{10} = 0{,}25$; $\Theta_{11} = 1$; $\Theta_{12} = 3$.

Відсікання (4.10) для точки y^*, що визначається таблицею 4.5, має вигляд

$$\frac{x_{10}}{0{,}25} + \frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} \geq 1 \qquad (4.23)$$

Перетворимо (4.23) з метою застосування двоїстого симплекс-методу до зручної для додавання в симплекс-таблицю форми, помноживши на –1 і додавши в ліву частину невід'ємну допоміжну змінну x_{15}, таким чином, звівши нерівність-відсікання до рівності:

$$-4\,x_{10} - x_{11} - {^1/_3}\,x_{12} + x_{15} = -1 \qquad (4.24)$$

Приєднавши (4.24) до таблиці 4.5, одержимо таблицю 4.6.

Таблиця 4.6. Симплекс-таблиця після приєднання відсікання (4.23)

N	Базис	C_0	P_0	0	0	0	0
				P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{15}
1	P_5	0	2	1			
2	P_6	0	$3/2$	–1	$-1/2$	$1/2$	
3	P_7	0	$1/2$		$1/2$	$-1/2$	
4	P_8	0	$3/2$		$-1/2$	$1/2$	
5	P_9	0	$1/2$	1	$1/2$	$-1/2$	
6	P_4	–1	$5/2$		$-1/2$	$-1/2$	
7	P_1	0	1	–1			
8	P_2	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	
9	P_3	0	$5/2$		$-1/2$	$1/2$	
10	P_{13}	0	$1/2$	2	$1/2$	$-1/2$	
11	P_{15}	0	–1	–4	–1	$-1/3$	1
12		0	$-5/2$		$1/2$	$1/2$	

Переходимо знову на крок 1 алгоритму (далі, як очевидні, покрокові переходи в алгоритмі зазначати не будемо).

Перерахувавши таблицю 4.6 за правилами двоїстого симплекс-методу одержимо таблицю 4.7. Елемент на перетині рядка P_{13} та стовпця P таблицю 4.7, який при перерахуванні вийшов рівним нулю, «збурюючи» записуємо в таблицю у *вигляді достатньо малого числа* $\varepsilon > 0$, яке при обчисленні Θ_{15} знову обертаємо на нуль.

Таблиця 4.7. Результат перерахування таблиці 4.6

N	Базис	C	P	0	0	0	b_i/a_{ij}		
				P_{11}	P_{12}	P_{15}	j = 11	j = 12	j = 15
1	P	0	$7/4$	$-1/4$	$-1/12$	$1/4$	< 0	< 0	7
2	P_6	0	$7/4$	$-1/4$	$7/12$	$-1/4$	<0	3	<0
3	P	0	$1/2$	$-1/4$	$-1/2$		1	< 0	∞
4	P_8	0	$3/2$	$-1/2$	$1/2$		< 0	3	∞
5	P	0	$1/4$	$1/4$	$-7/12$	$1/4$	1	< 0	1
6	P	-1	$5/2$	$-1/2$	$-1/2$		< 0	< 0	∞

N	Базис	C_0	P_0	0	0	0	b_i/a_{ij}		
				P_{11}	P_{12}	P_{15}	j = 11	j = 12	j = 15
7	P_1	0	$^5/_4$	$^1/_4$	$^1/_{12}$	$-^1/_4$	5	15	< 0
8	P_2	0	$^5/_4$	$^1/_4$	$-^7/_{12}$	$^1/_4$	5	< 0	5
9	P_3	0	$^5/_2$	$-^1/_2$	$^1/_2$		< 0	5	∞
10	P_{13}	0	ε	0	$-^2/_3$	$^1/_2$	∞	<0	0
11	P_0	0	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_{12}$	$-^1/_4$	1	3	< 0
12			$-^5/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$				

Судячи з критерію оптимальності (всі елементи в P_0 додатні), таблиця 4.7 дає оптимальну точку $y^* = (x_1^*, \ldots, x_{15}^*)$ нової допоміжної задачі лінійного програмування.

Оскільки точка з координатами $x_1^* = {}^5/_4$; $x_2^* = {}^5/_4$; $x_3^* = {}^5/_2$ – не переставлення з множини $E_{32}(G)$, то будуємо відсікання одержаної точки y^*. Для цього в трьох додаткових стовпцях таблиці 4.7 знаходимо b_i/a_{ij} для $j \in \{11, 12, 15\}$. Оскільки Θ_{15}, то згідно з кроком 5 маємо

$$\frac{x_{10}}{0,25} + \frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} = 1. \qquad (4.25)$$

Приєднаємо рівність (4.25) до системи обмежень задачі. Ввівши штучну змінну $x_{16} \geq 0$, отримаємо

$$\frac{x_{10}}{0,25} + \frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} + x_{16} = 1$$

Для застосування методу штучного базису складаємо, використовуючи таблицю 4.5, симплекс-таблицю 4.8.

Таблиця 4.8. Симплекс-таблиця після приєднання умови (4.25)

N	Базис	C_0	P_0	0	0	0	–M
				P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{16}
1	P_5	0	2	1			
2	P_6	0	$^3/_2$	–1	$-^1/_2$	$^1/_2$	
3	P_7	0	$^1/_2$		$^1/_2$	$-^1/_2$	
4	P_8	0	$^3/_2$		$-^1/_2$	$^1/_2$	

Продовження таблиці 4.8.

N	Базис	C_0	P_0	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	$-M$ P_{16}
5	P_9	0	$1/2$	1	$1/2$	$-1/2$	
6	P_4	-1	$5/2$		$-1/2$	$-1/2$	
7	P_1	0	1	-1			
8	P_2	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	
9	P_3	0	$5/2$		$-1/2$	$1/2$	
10	P_{13}	0	$1/2$	2	$1/2$	$-1/2$	
11	P_{16}	$-M$	1	4	1	$1/3$	1
12			$-5/2$		$1/2$	$1/2$	
13			-1	-4	-1	$1/3$	

Після перерахунку одержуємо таблицю 4.9.

Таблиця 4.9. Результат перерахування таблиці 4.8

N	Базис	C	P	0 P	0 P	$-M$ P_{16}	b_i/a_{ij} $j = 11$	 $j = 12$
1	P_5	0	$7/4$	$-1/4$	$-1/2$	$-1/4$	<0	<0
2	P_6	0	$7/4$	$-1/4$	$7/12$	$1/4$	<0	3
3	P_7	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$		1	<0
4	P_8	0	$3/2$	$-1/2$	$1/2$		<0	3
5	P	0	$1/4$	$1/4$	$-7/12$	$-1/4$	1	<0
6	P	-1	$5/2$	$-1/2$	$-1/2$		<0	<0
7	P	0	$5/4$	$1/4$	$1/12$	$1/4$	5	15
8	P	0	$5/4$	$1/4$	$-7/12$	$-1/4$	5	<0
9	P_3	0	$5/2$	$-1/2$	$1/2$		<0	5
10	P_{13}	0	ε		$-2/3$	$-1/2$	∞	<0
11	P	0	$1/4$	$1/4$	$1/12$	$1/4$	1	3
12		0	$-5/2$	$1/2$	$1/2$			
13		0	0	0	$2/3$	0		

Останній і передостанній рядки таблиці 4.9 свідчать, що одержано оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, який не задовольняє (4.14). З двох останніх (додаткових) стовпців таблиці 4.9 та формули (4.12) бачимо, що для відсікання вершини, яка дає цей розв'язок необхідно записати нерівність

$$\frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} \geq 1,$$

за допомогою якої двоїстим симплекс-методом одержуємо точку $y^* = (1; 1; 3; 3; 2; 2; 0; 2; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0)$.

Таким чином, маємо $x^* = (1, 1, 3) \in E_{32}(G)$, тобто комбінаторна умова (4.14) виконується; при цьому значення цільової функції $C(x^*) = -3$. Задача (4.13)-(4.17) розв'язана.

Якщо повернутися до змістовної постановки задачі (4.13)-(4.17), то отриманий розв'язок означає, що в першій смужці стоять два однакових прямокутника довжиною 1, а в другій – один довжиною 3; довжина зайнятої частини смуги складає 3.

4.5. Числові експерименти за методом відсікання

Числові експерименти за алгоритмом методу відсікання проводилися на задачі упаковування прямокутників однакової ширини в смуги [24; 36; 39; 40; 13; 44; 110; 111; 115] в такій постановці.

Задача. Задано p прямокутників однакової ширини h і довжинами $a_1, ..., a_p$. Необхідно упакувати прямокутники в m смужок H_i, $m \leq p$, ширини h достатньо довгої смуги H ширини mh так, щоб довжина Z зайнятої частини смуги H була мінімальною.

Використовувалась наступна математична модель цієї задачі у вигляді задачі частково комбінаторної оптимізації на переставленнях з лінійною цільовою функцією та лінійними додатковими обмеженнями.

Математична модель задачі. Нехай x_{ij} – довжина прямокутника, що стоїть на j-му місці в смузі H_i $\forall i \in J_m$ (очевидно, що можна вважати: $j \in J_{p-m+1}$, оскільки в оптимальному упакуванні в кожній смузі стоїть хоча б один прямокутник). Кількість місць для прямокутників у смузі H дорівнює $n = m(p - m + 1)$. Вважатимемо, що $n - p$ прямокутників мають нульову довжину. Довжини всіх n прямокутників позначимо g_i, $i \in J_n$ та об'єднаємо в мультимножину $G = \{g_1, ..., g_n\}$. Позначимо $E_{nk}(G)$ загальну множину переставлень з n елементів мультимножини G, серед яких k різних. Нехай також

$$x = (x_{11}, ..., x_{1,p-m+1}, ..., x_{m1}, ..., x_{m,p-m+1}) = (x_1, ..., x_n),$$

$$y = (x_1, ..., x_n, z) = (y_1, ..., y_n, y_{n+1}) \in R^{n+1}.$$

Тоді поставлену задачу можна розглядати як задачу знаходження пари $<z^*,y^*>$, де $z^* = \min\limits_{y \in R^{n+1}} z$, $y^* = \arg \min\limits_{y \in R^{n+1}} z$, при умові $x \in E_{nk}(G)$ та додаткових обмеженнях $\sum\limits_{j=1}^{p-m+1} x_{ij} \le z \quad \forall i \in J_m$.

До обмежень додамо нерівності, що упорядковують прямокутники по спаданню довжин у кожній смузі H_i. *Ці нерівності оптимальне упа*кування прямокутників, очевидно, задовольняє, і вони суттєво зменшують область допустимих розв'язків. Як зрозуміло, ці обмеження мають такий вигляд:

$$x_{ij} \ge x_{i,j+1} \quad \forall i \in J_m \quad \forall j \in J_{p-m}.$$

Зауважимо, що задача лінійного програмування (ЗЛП), яка розв'язується на першому кроці методу відсікань, серед обмежень має таке:

$$x \in \operatorname{conv} E_{nk}(G), \tag{4.26}$$

тобто x належить загальному переставному многограннику (ЗПМ), який, як відомо (див., наприклад, [111]), описують $2^n - 1$ обмежень. Для її (ЗЛП) розв'язку, (як і в [111] для наближеного розв'язку аналогічної задачі упаковування) застосовано метод послідовного приєднання обмежень (МППО) (див., наприклад, [111]), в якому первинна система включає додаткові обмеження задачі та з (4.26) нерівності $g_1 \le x_i \le g_n$, рівність

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

де $g_1 \le ... \le g_n$.

На наступних етапах МППО приєднується по одній невиконаній нерівності *з кожної групи* [111] *обмежень системи нерівностей*, що описує ЗПМ.

При проведені числових експериментів використана програма Л.М. Колечкіної [43; 44], яка написана на *BORLAND PASCAL 7.0.* Частково ці експерименти описані в [43; 44]. Наведені там результати експериментального дослідження викладеного методу відсікання дозволяють зробити висновок про його практичну ефективність. Розглядалися упаковування до 50 прямокутників. При цьому використовувались задачі лінійного програмування, що містять до 189 змінних та $2^{189}+191$ обмежень. Їх розв'язок проводився із застосуванням згаданого вище МППО, в результаті чого кількість обмежень у задачах лінійного програмування, які використовувались, не перевищувала 711. Кількість відсікань у задачах цієї серії числових експериментів не перевищувала 142. Розрахунки проводилися на ПК *Pentium* II. Час розрахунків залежно від вимірності задачі змінювався від часток секунди до 4 годин 10 хвилин.

Наведемо результати інших серій розрахунків за цим алгоритмом. Як і раніше, довжини прямокутників вибираються як випадкові числа, розподілені рівномірно в заданому інтервалі [1, 1 000]. Позначення, що використовуються в таблицях:

n – кількість елементів у переставленні ($\mathbf{n} = \mathbf{m}(\mathbf{p} - \mathbf{m} + 1)$;

p – кількість прямокутників, що упаковуються;

m – кількість смужок $\mathbf{H_i}$;

wxod – кількість обмежень на першому етапі МППО;

kon – кількість обмежень в останній задачі лінійного програмування, що використовується в методі відсікання;

ogr – кількість приєднаних в МППО обмежень в останній задачі лінійного програмування, що використовується в методі відсікання;

ots – кількість зроблених відсікань;

z – довжина зайнятої смуги **H**;

time – час роботи алгоритму;

N – номер розрахунку.

Таблиця 4.10. Результати першої серії числових експериментів

N	n	p	m	wxod	kon	ogr	ots	z	time
1	20	20	1	61	140	38	41	8 619	0:00:01
2	24	10	3	75	159	34	50	2 317	0:00:01
3	24	10	3	75	157	30	52	1 785	0:00:03
4	24	10	3	75	151	18	58	1 403	0:00:01
5	27	11	3	84	174	30	60	1 853	0:00:01
6	30	12	3	93	188	24	71	2 018	0:00:01
7	30	12	3	93	194	36	65	2 051	0:00:01
8	30	12	3	93	189	26	70	1 843	0:00:01
9	33	13	3	102	212	38	72	2 890	0:00:03
10	33	13	3	102	214	42	70	2 357	0:00:01
11	36	14	3	111	230	40	79	1 775	0:00:01
12	36	14	3	111	234	48	75	2 938	0:00:04
13	38	20	2	116	246	48	82	4 391	0:00:13
14	39	15	3	120	254	54	80	2 445	0:00:04
15	39	15	3	120	249	44	85	2 601	0:00:02
16	40	21	2	122	258	49	87	6 155	0:00:44
17	42	22	2	128	273	56	89	6 616	0:01:29
18	42	16	3	129	267	46	92	3 251	0:00:17
19	42	16	3	129	272	56	87	2 683	0:00:15

N	n	p	m	wxod	kon	ogr	ots	z	time
20	44	23	2	134	281	49	98	5 520	0:00:54
21	45	17	3	138	283	44	101	3 093	0:00:36
22	45	17	3	138	289	56	95	2 330	0:00:08
23	45	17	3	138	289	56	95	2 610	0:00:47
24	46	24	2	140	303	70	93	5 739	0:01:31
25	48	15	4	148	305	54	103	1 769	0:00:01
26	48	25	2	146	313	67	100	6 202	0:23:21
27	48	18	3	147	306	56	103	2 701	0:00:33
28	48	15	4	148	308	60	100	1 668	0:00:02
29	48	18	3	147	311	66	98	2 583	0:00:30
30	50	26	2	152	321	60	109	6 147	0:04:59
31	50	26	2	152	326	70	104	6653	0:00:01
32	51	19	3	156	326	62	108	2 728	0:30:05
33	51	19	3	156	325	60	109	2 891	0:02:54
34	51	19	3	156	323	111	212	3 355	0:01:02
35	51	19	3	156	324	214	110	3 010	0:02:44
36	51	19	3	156	326	62	108	2 566	0:01:33
37	52	16	4	160	327	53	114	1 889	0:00:11
38	54	20	3	165	346	68	113	3 022	1:03:37
39	54	20	3	165	346	68	113	3 412	0:01:53
40	55	15	5	170	349	61	118	1 449	0:00:01
41	55	15	5	170	351	65	116	1 802	0:05:03
42	56	17	4	172	355	64	119	2 192	0:00:13
43	57	21	3	174	366	74	118	3 032	0:05:46
44	60	18	4	184	383	75	124	1 931	0:00:18
45	60	16	5	185	383	73	125	1 588	0:00:08
46	64	19	4	196	410	84	130	2 601	0:12:23
47	65	17	5	200	409	69	140	1 937	0:02:50
48	70	18	5	185	377	61	131	1 340	0:00:03
49	70	18	5	215	445	85	145	1 813	0:00:06
50	75	19	5	230	469	77	162	1 733	5:39:56

У таблицях час, що менше за 1 секунду, показаний як 1 секунда. Час виражено в форматі год.: хв.: с.

Наведемо графіки кривих регресії, які побудовані за результатами числових експериментів. При цьому будемо позначати **r** – коефіцієнт кореляції, а **S** – стандартна похибка. Графіки залежності кількості зроблених відсікань (**ots**) від кількості елементів у переставленні (**n**) (за табл. 4.10) представлені на рисунках 4.2-4.6.

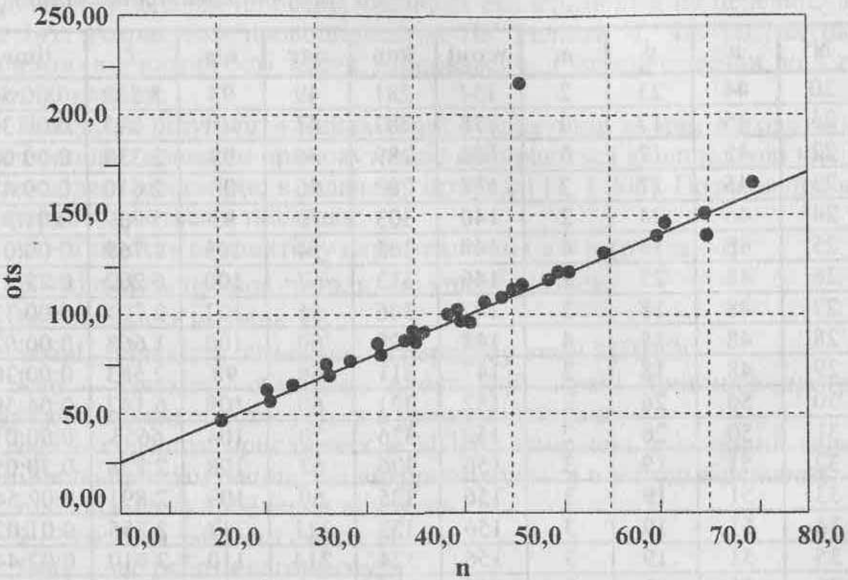


Рис. 4.2. $y = a(1 - e^{-bx})$; a = 706,979; b = 0,003; r = 0,865; S = 15,233

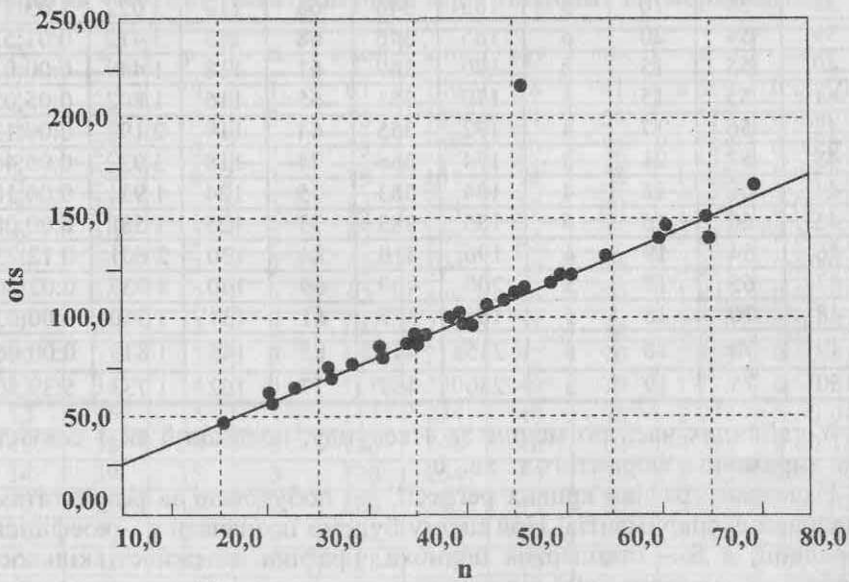


Рис. 4.3. $y = \dfrac{ax}{b + x}$; a = 1352,871; b = 574,122; r = 0,865; S = 15,235

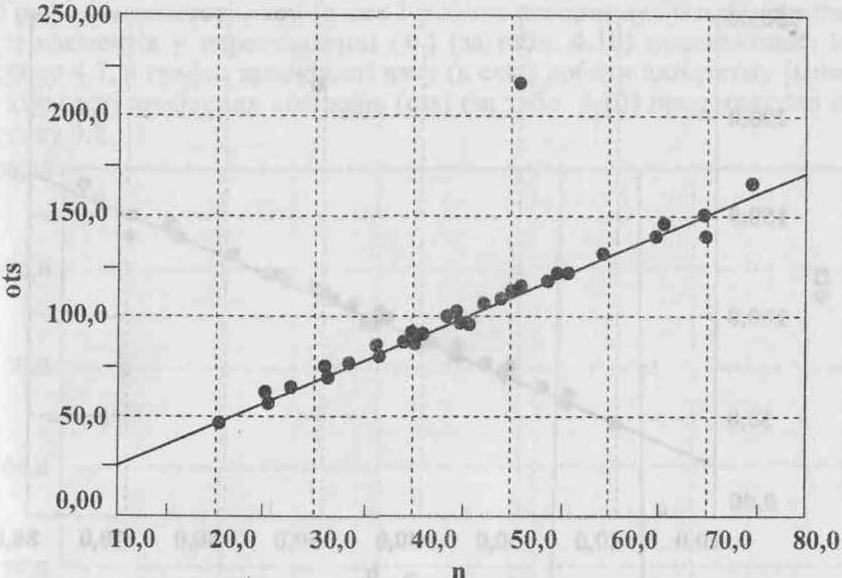


Рис. 4.4. $y = ax^{b/x}$; a = 352,881; b = -14,896; r = 0,865; S = 15,250

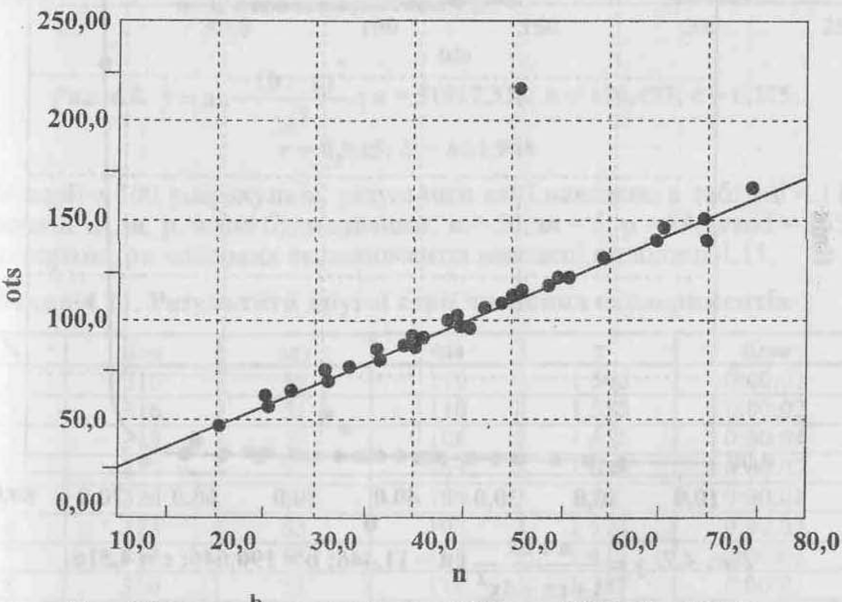


Рис. 4.5. $y = ax^{b}$; a = 2,821; b = 0,932; r = 0,864; S = 15,265

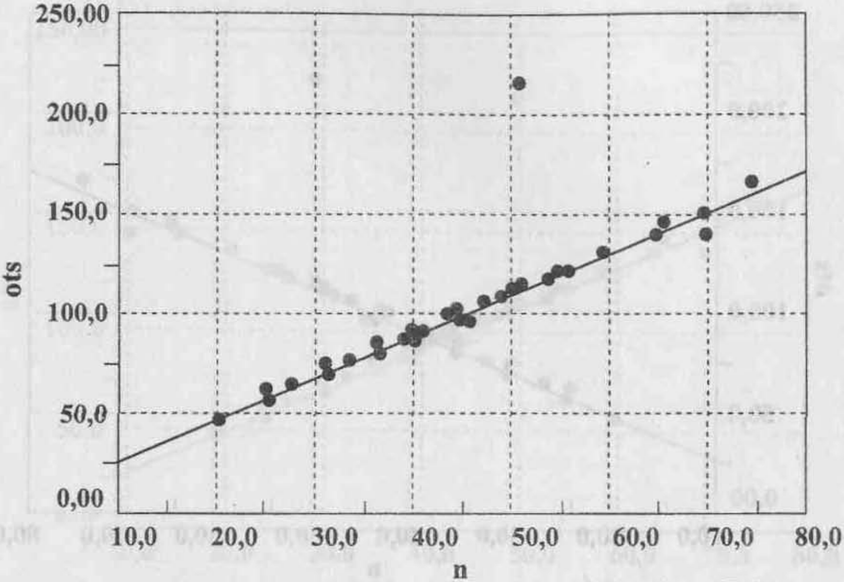


Рис. 4.6. $y = a + bx$; a = 5,374; b = 2,052; r = 0,864; S = 15,296

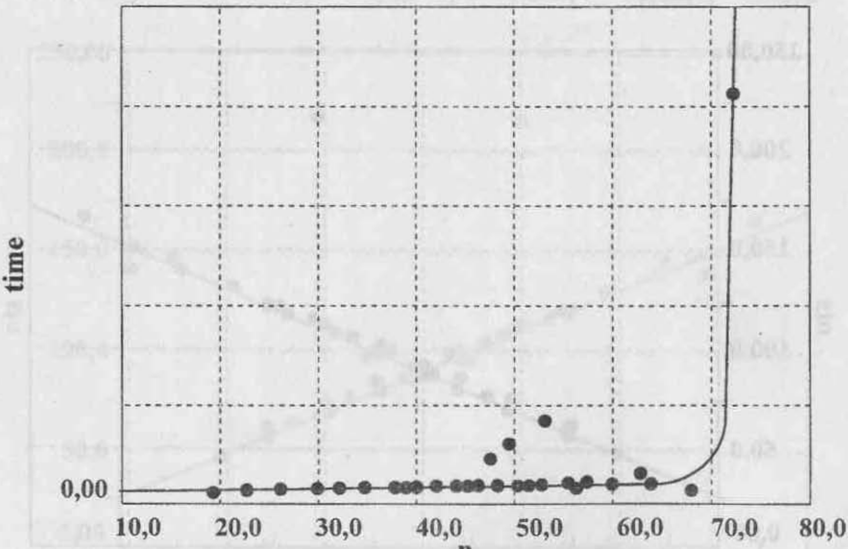


Рис. 4.7. $y = \dfrac{a + bx}{1 + cx + dx^2}$; a = 11,446; b = 190,646; c = 4,516;

d = –0,060; r = 0,0978; S = 640,392

Графік залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (**time**) від кількості елементів у переставленні (**n**) (за табл. 4.10) представлено на рисунку 4.7, а графік залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (**time**) від кількості зроблених відсікань (**ots**) (за табл. 4.10) представлено на рисунку 4.8.

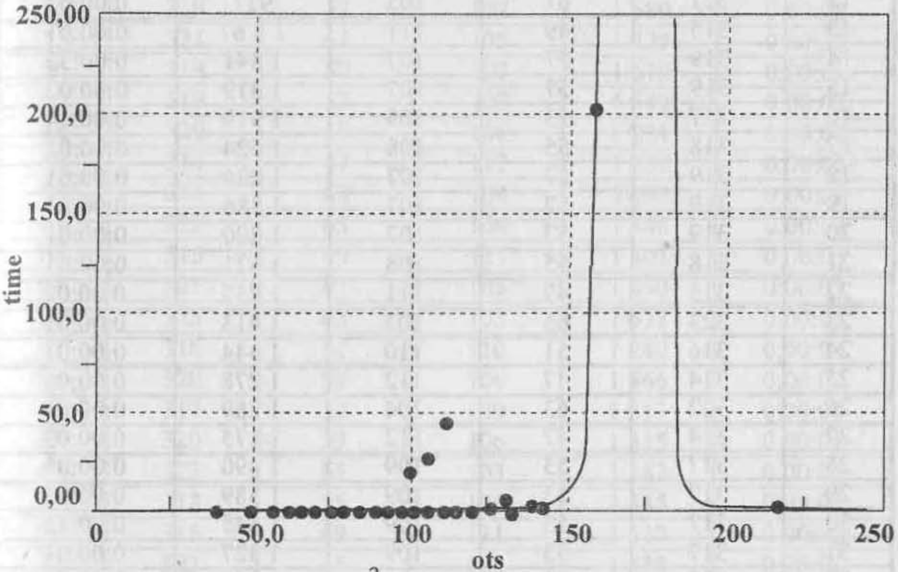


Рис. 4.8. $y = ae^{\frac{-(b-x)^2}{2c^2}}$; **a = 51017,338; b = 170,497; c = 6,275;**
r = 0,945; S = 664,968

У серії з 100 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.11, величини **n** , **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 50, **m** = 5, **p** = 14, **wxod** = 155. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.11.

Таблиця 4.11. Результати другої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	316	51	110	1 546	0:00:01
2	316	51	110	1 538	0:00:02
3	318	55	108	1 658	0:00:04
4	317	53	109	1 640	0:00:02
5	320	59	106	1 280	0:00:01
6	323	65	103	1 574	0:00:02
7	318	55	108	1 416	0:00:01
8	316	51	110	1 387	0:00:01
9	322	63	104	1 562	0:00:01

Продовження таблиці 4.11

N	kon	ogr	ots	z	time
10	323	65	103	1481	0:00:01
11	318	55	108	1 566	0:00:04
12	321	61	105	937	0:00:01
13	315	49	111	1 4 67	0:00:01
14	319	57	107	1 841	0:00:32
15	319	57	107	1 319	0:00:02
16	317	53	109	1 919	0:00:14
17	318	55	108	1 524	0:00:01
18	319	57	107	1 224	0:00:01
19	319	57	107	1 386	0:00:01
20	319	57	107	1 200	0:00:01
21	318	55	108	1 421	0:00:01
22	315	49	111	1737	0:00:02
23	323	65	103	1 413	0:00:01
24	316	51	110	1 344	0:00:01
25	314	47	112	1 278	0:00:010
26	322	63	104	1 289	0:00:01
27	314	47	112	1 175	0:00:03
28	317	53	109	1 490	0:00:01
29	317	53	109	1 589	0:00:03
30	317	53	109	1 545	0:00:13
31	317	53	109	1 327	0:00:01
32	322	63	104	1 560	0:00:03
33	323	65	103	1 425	0:00:01
34	318	55	108	1 321	0:00:01
35	320	59	106	1 378	0:00:01
36	323	65	103	1 730	0:00:01
37	322	63	104	1 660	0:00:02
38	321	61	105	1 501	0:00:01
39	318	55	108	1 227	0:00:01
40	316	51	110	1087	0:00:01
41	314	47	112	1 155	0:00:01
42	317	53	109	1 237	0:00:01
43	315	49	111	1 223	0:00:01
44	322	63	104	1 355	0:00:01
45	315	49	111	1 530	0:00:02
46	314	47	112	1 290	0:00:01
47	321	61	105	1 958	0:00:21
48	321	61	105	1 523	0:00:01
49	322	63	104	978	0:00:01
50	317	53	109	1 550	0:00:03
51	316	51	110	1 283	0:00:01

Продовження таблиці 4.11

N	kon	ogr	ots	z	time
52	317	53	109	1 802	0:00:01
53	321	61	105	1 087	0:00:01
54	319	57	107	1 680	0:00:02
55	321	61	105	1 225	0:00:37
56	319	57	107	1 619	0:00:01
57	319	57	107	1 640	0:00:01
58	320	59	106	1 221	0:00:01
59	314	47	112	1 037	0:00:01
60	322	63	104	1 092	0:00:01
61	322	63	104	1 448	0:00:04
62	315	49	111	1 401	0:00:05
63	321	61	105	1 450	0:00:01
64	323	65	103	1 677	0:00:05
65	316	51	110	1 240	0:00:03
66	320	59	106	1 466	0:00:01
67	317	53	109	1 313	0:00:01
68	320	59	106	1 315	0:00:01
69	323	65	103	1 182	0:00:01
70	318	55	108	1 545	0:00:01
71	315	49	111	1 117	0:00:02
72	323	65	103	1 530	0:00:01
73	314	47	112	1 496	0:00:02
74	315	49	111	1 723	0:00:01
75	319	57	107	1 167	0:00:01
76	322	63	104	1 196	0:00:01
77	314	47	112	1 500	0:00:01
78	322	63	104	1 225	0:00:01
79	315	49	111	1 426	0:00:03
80	318	55	108	1 806	0:00:06
81	316	51	110	1 767	0:00:15
82	321	61	105	1 692	0:00:01
83	322	63	104	1441	0:00:01
84	317	53	109	1 331	0:00:04
85	319	57	107	1 167	0:00:01
86	318	55	108	1 522	0:00:01
87	319	57	107	1 242	0:00:01
88	322	63	104	1 393	0:00:01
89	316	51	110	1 290	0:00:01
90	315	49	111	1 771	0:00:03

N	kon	ogr	ots	z	time
91	315	49	111	1 362	0:00:01
92	318	55	108	1 577	0:00:01
93	319	57	107	1 133	0:00:01
94	317	53	109	1 225	0:00:01
95	319	57	107	1 819	0:00:20
96	321	61	105	1 655	0:00:01
97	314	47	112	1 653	0:00:01
98	321	61	105	998	0:00:01
99	317	53	109	1 851	0:00:05
100	316	51	110	1 657	0:00:01

Таблицю 4.11 ілюструє діаграма, що наведена на рисунку 4.9.

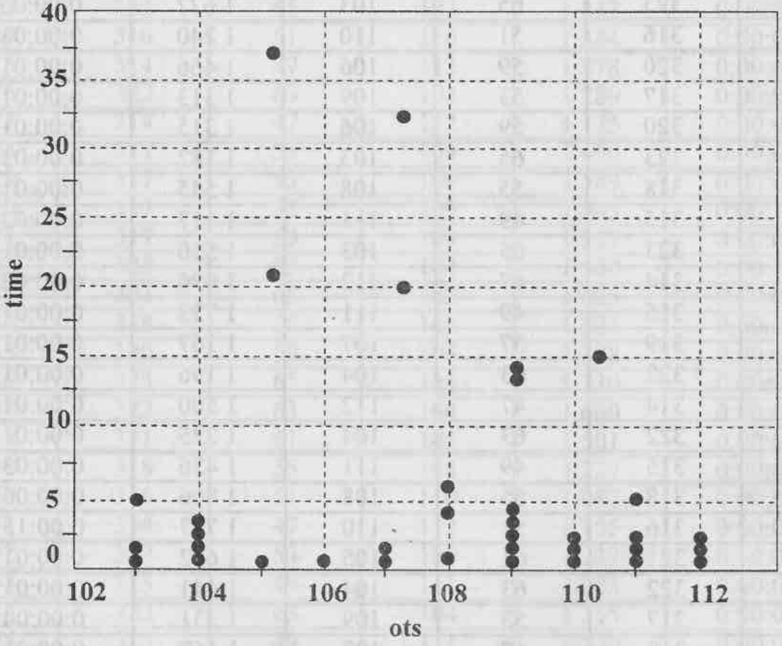


Рис. 4.9. Діаграма залежності часу (в сек.) роботи алгоритму* (time) *від кількості зроблених відсікань* (ots) *за таблицю 4.11

У серії з 10 розрахунків, результати якої наведено таблиці 4.12, величини **n** , **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 40, **m** = 4, **p** =13, **wxod** = 124. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.12.

Таблиця 4.12. Результати третьої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	257	48	85	1 726	0:00:01
2	253	40	89	1398	0:00:01
3	256	46	86	1 629	0:00:01
4	253	40	89	1 775	0:00:03
5	257	48	85	1 630	0:00:01
6	260	54	82	1 895	0:00:01
7	256	46	86	1 247	0:00:01
8	257	48	85	1 459	0:00:01
9	260	54	82	1 411	0:00:01
10	256	46	86	1 910	0:00:01

Графік залежності часу роботи алгоритму (**time**) від кількості зроблених відсікань (**ots**) за таблицею 4.12 наведено на рисунок 4.10.

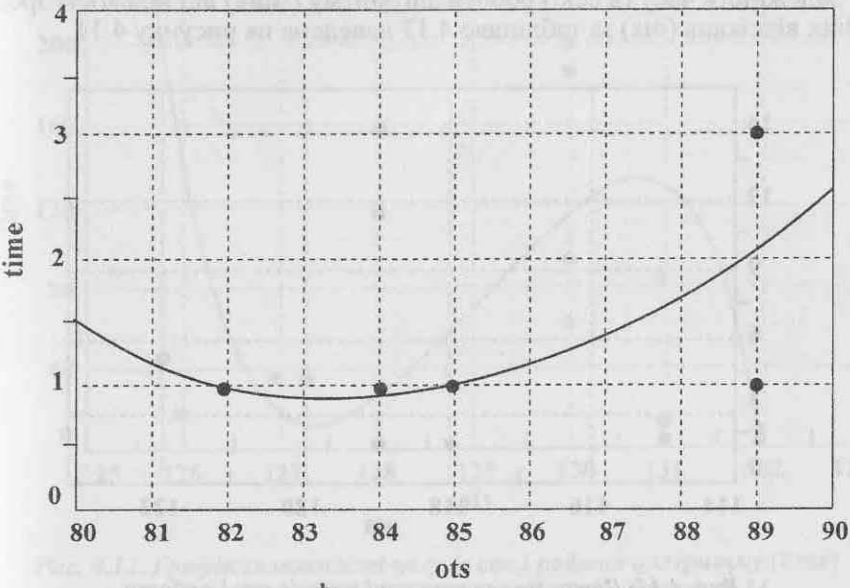


Рис. 4.10. $y = e^{a+\frac{b}{x}+c\ln x}$; **a = –2429,368; b = 37508,517; c = 447,489; r = 0,663; S = 0,537**

У серії з 10 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.13, величини **n**, **m, p, wxod** були сталими: **n** = 55, **m** = 5, **p** = 15, **wxod** = 170. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.13, ілюстрацією якої є рисунок 4.11.

Таблиця 4.13. Результати четвертої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	352	67	115	1452	0:00:01
2	348	59	119	1 139	0:00:01
3	352	67	115	1 331	0:00:02
4	348	59	119	1 737	0:00:11
5	348	59	119	1 583	0:00:15
6	345	53	122	1 637	0:00:05
7	349	61	118	1 563	0:00:01
8	349	61	118	1 553	0:00:01
9	347	57	120	1 761	0:00:04
10	349	61	118	1 564	0:00:01

Залежність часу (в сек.) роботи алгоритму (**time**) від кількості зроблених відсікань (**ots**) за таблицею 4.13 наведена на рисунку 4.11.

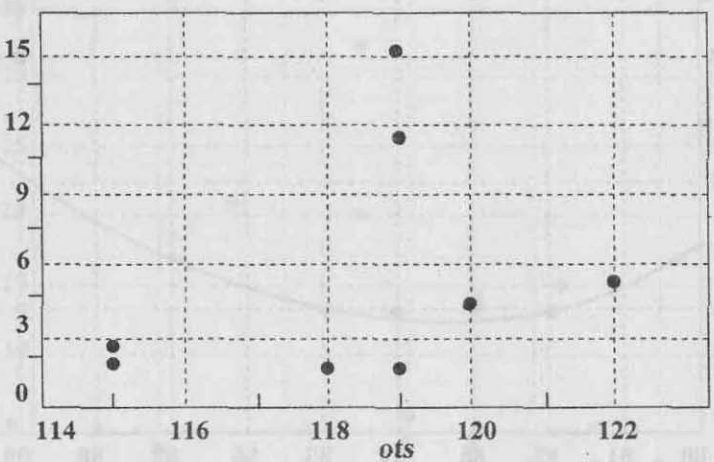


Рис. 4.11. Діаграма залежності часу (в сек.) роботи алгоритму* (time) *від кількості зроблених відсікань* (ots) *за таблицею 4.13

У серії з 10 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.14, величини **n** , **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 60, **m** = 5, **p** = 16, **wxod** = 185. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.14 та на рисунку 4.12.

Таблиця 4.14. Результати п'ятої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	380	67	128	1 574	0:00:20
2	376	59	132	1 338	0:00:07
3	378	63	130	1 949	0:01:02
4	378	63	130	1 829	0:01:29
5	376	59	132	1 484	0:00:02
6	381	69	127	1 846	0:00:13
7	378	63	130	1 847	0:02:58
8	382	71	126	1 568	0:03:38
9	378	63	130	1 637	0:03:14
10	377	61	131	1 696	0:01:26

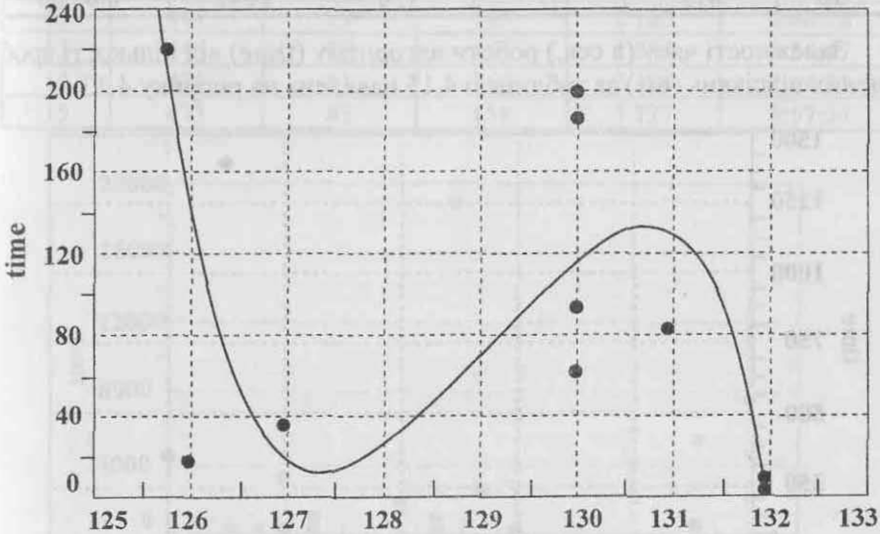


Рис. 4.12. Графік залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (time) *від кількості зроблених відсікань* (ots) *за таблицею 4.14*

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$; a = 24708633; b = –574170,67; c = 4446,939; D = –11,479; r = 0,866; S = 50,486

У серії з 10 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.15, величини **n** , **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 65, **m** = 5, **p** = 17, **wxod** = 200. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.15 та на рисунку 4.13.

Таблиця 4.15. Результати шостої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	413	77	136	1 882	0:01:16
2	407	65	142	1 441	0:00:02
3	416	83	133	1 624	0:00:05
4	407	65	142	1 562	0:00:10
5	408	67	141	2 116	0:24:05
6	411	73	138	1 580	0:00:05
7	407	65	142	1 597	0:00:06
8	407	65	142	1 883	0:06:28
9	416	83	133	1 864	0:01:50
10	413	77	136	1 342	0:00:06

Залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (**time**) від кількості зроблених відсікань (**ots**) за таблицею 4.15 наведена на рисунку 4.13.

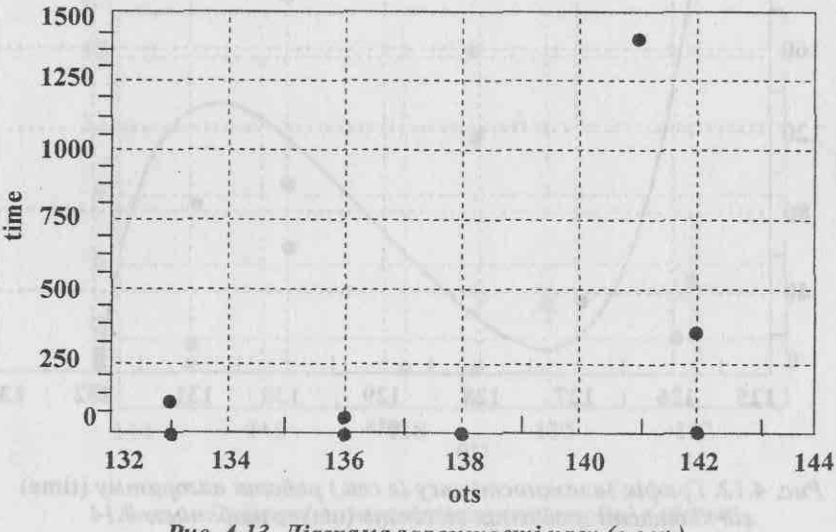


Рис. 4.13. Діаграма залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (**time**) *від кількості зроблених відсікань* (**ots**) *за таблицею 4.15*

У серії з 15 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.16, величини **n**, **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 70, **m** = 5, **p** = 18, **wxod** = 215. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.16, ілюстрацією якої є рисунок 4.14.

Таблиця 4.16. Результати сьомої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	445	85	145	2 117	0:08:09
2	446	87	144	2 085	0:03:40
3	442	79	148	1 790	0:21:33
4	445	85	145	2 152	0:00:43
5	447	89	143	1 647	0:01:21
6	441	77	149	1 849	0:01:08
7	440	75	150	1 801	5:15:24
8	439	73	151	1 535	0:41:10
9	445	85	145	1 915	0:02:07
10	438	71	152	1 769	0:01:44
11	447	89	142	1 565	0:00:36
12	441	77	149	2 165	0:08:26
13	446	87	144	1 838	0:54:47
14	471	81	160	2 124	2:04:31
15	473	85	158	1 727	5:57:54

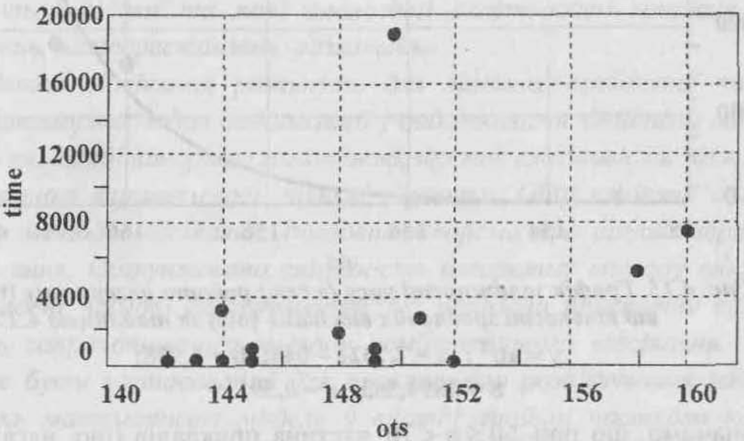


Рис. 4.14. Діаграма залежності часу (в сек.) роботи алгоритму (time) *від кількості зроблених відсікань* (ots) *за таблицею 4.16*

У серії з 5 розрахунків, результати якої наведено в таблиці 4.17, величини **n** , **m**, **p**, **wxod** були сталими: **n** = 75, **m** = 5, **p** = 19, **wxod** = 230. Інші параметри числових експериментів наведені в таблиці 4.17 та на рисунку 4.15.

Таблиця 4.17. Результати восьмої серії числових експериментів

N	kon	ogr	ots	z	time
1	471	81	160	2 126	2:14:38
2	473	85	158	1 823	5:58:14
3	478	95	153	1 547	0:00:18
4	475	89	156	1 807	0:00:07
5	470	79	161	1 582	0:30:42

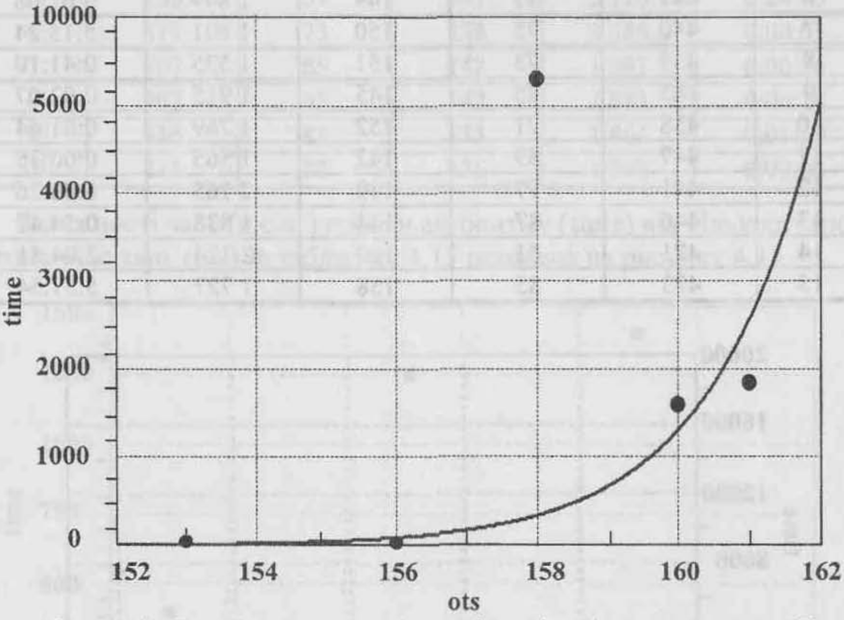


Рис. 4.15. Графік залежності часу (в сек.) роботи алгоритму* (time) *від кількості зроблених відсікань* (ots) *за таблицею 4.17

$$y = ab^x;\ a = 2{,}732e-044;\ b = 1{,}958;$$
$$S = 2894{,}553;\ r = 0{,}591$$

Зазначимо, що при $50 \le \mathbf{n} < 70$ частина прикладів (що, нагадаємо, формуються випадково) не були розв'язані в наслідок обмеженості ресурсів програм для розв'язку ЗЛП. При $\mathbf{n} \ge 70$ частка таких задач була значною. При таких **n** задачі не розв'язувались також з причини примусової зупинки при перебільшенні відведеного часу. Так розрахунки, наведені в таблиці 4.17, були одержані в серії з одинадцяти експериментів, з яких 5 було знято при перевищенні часу (6 год.).

Таким чином, можна зробити висновок про практичну ефективність методу відсікання для задач розглянутого класу при $\mathbf{n} \le 50$.

Післямова

Розвиток комбінаторної оптимізації, як апарату математичного моделювання, виокремлення класу задач евклідової комбінаторної оптимізації викликали необхідність систематичного дослідження властивостей математичних моделей у вигляді задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах, подальшій розробці методів та алгоритмів розв'язку таких задач. У монографії досліджені такі моделі на евклідовій комбінаторній множині полірозміщень як з точки зору властивостей самої множини полірозміщень та її опуклої оболонки, так і в аспекті екстремальних властивостей цільових функцій в задачах оптимізації на полірозміщеннях, а також розвинуто метод комбінаторного відсікання.

Одержані властивості множини полірозміщень можуть бути корисні при розв'язуванні задач оптимізації на ній. З розглянутих властивостей множини полірозміщень як часткові випадки одержуються відомі та нові аналогічні властивості множин переставлень, поліпереставлень, розміщень.

Метод відсікання розвинуто для лінійних евклідових частково комбінаторних задач оптимізації з додатковими лінійними обмеженнями та комбінаторною множиною, що має властивість збіжності з множиною вершин своєї опуклої оболонки. Обґрунтовано алгоритм цього методу відсікання, доведена теорема про вигляд нерівності-відсікання. Обґрунтована скінченість алгоритму методу відсікання. Проведені числові експерименти, які показали практичну ефективність запропонованого методу комбінаторного відсікання. Метод може бути застосований для практичного розв'язування задач, які мають математичну модель у вигляді лінійної частково комбінаторної задачі оптимізації з додатковими лінійними обмеженнями на комбінаторній множині, що збігається з множиною вершин своєї опуклої оболонки.

Список використаної літератури

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
2. Айзенштат В. С., Максимович Е. П. Некоторые классы задач о бродячем торговце // Кибернетика. – 1978. – № 4. – С. 80-83.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
4. Баранов В.И., *Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные* задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 160 с.
5. Белов Ю.А. Об одном классе специальных перестановочных многогранников // Моделирование и анализ информационных систем. – 1996. – № 3 – С. 78-84.
6. Бондаренко В.А., Шуникова Е.В. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки // Журнал *вычисл. матем. и матем. физики*. – М., 1985. – 13 с. Деп. в ВИНИТИ 10.10. 85. – № 7454-В85.
7. Бондаренко В.А. Об одном классе многогранников и их использовании в комбинаторной оптимизации // Доклады АН (Россия). – 1993. – № 3 – С. 303-304.
8. Бурдюк В.Я., Рева В.Н. Об одном методе оптимизации функционалов от перестановок при наличии ограничений // Кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 99-103.
9. Бурдюк В.Я., Семенов В.А. Задача розподілу депутатів по комісіях // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. Сб. науч. тр. Днепропетров. ГУ. – Днепропетровск: Січ. – 1997. – С. 20-21.
10. Бурдюк В.Я., Шкурба В.В. Теория расписаний. Задачи и методы решений // Кибернетика. – 1971. – № 1. – С. 89-102.
11. Бурков В.Н., Ловецкий С.Е. Методы решения экстремальных комбинаторных задач (обзор) // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1968. – № 4. – С. 82-93.
12. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / В.С. Михалевич, Н.З. Шор., Л.А. Галустова и др. – К.: Наукова думка, 1977. – 178 с.
13. Генс Г.В., Левнер Е.В. Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач. – М., 1981. – 66 с. (Препринт / АН СССР, ЦЭМИ).

14. Голуб Н.В., Гребенник И.В., Кузьменко В.М. Комбинаторный подход к построению технологических штриховых кодов минимальной длинны // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 66-71.
15. Гордеев Э.Н. Алгоритмический и постоптимальный анализ устойчивости решений задач дискретной оптимизации: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: ВЦ АН СССР, 1992. – 247 с.
16. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1996. – Т. 36. – № 1. – С. 66-72.
17. Гордон В.С., Шафранский Я.М. К вопросу минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченных элементов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 2. – С. 122-124.
18. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
19. Емеличев В.А., Комлик В.И. Применение динамического программирования к решению задач размещения // Докл. АН БССР. – 1966. – Т. 10. – С. 721-725.
20. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика, 1998. – Т. 10, вып. 1. – С. 20-27.
21. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. Об условиях устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6. – С. 120-127.
22. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
23. Емеличев В.А., Кравцов М.К. Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 4. – С. 137-143.
24. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учебное пособие. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с.
25. Емец О.А. Задачи оптимизации на евклидовом полиперестановочном множестве с повторениями: свойства допустимого множества // В кн.: Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем: Сб. научн. трудов / АН УССР. Ин-т кибернетики АН УССР. – К., 1990. – С. 22-24.

26. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и математические методы. – 1993. – Т. 29, вып. 2. – С. 294-304.
27. Емец О.А. Комбинаторное множество полиразмещений и оптимизация на нем // В кн.: Тези доп. 45 наук. конференції професорів, викладачів ... ін-ту. Ч. 2 / Полтава: Полт. інж.-будів. ін-т., 1993. – С. 206.
28. Емец О.А. Метод отсечения при решении одного класса линейных евклидовых комбинаторных задач оптимизации. – Полтава: Полт. техн. ун-т, 1995. – 20 с. – Деп. у ГНТБ Украины 2.06.95. – № 1408. – Ук95.
29. Емец О.А. Минимизация взвешенной длинны связующей сети линейно расположенных элементов как оптимизация линейной функции // В кн.: Тези доповідей 45 наук. конференції професорів, викладачів ... ін-ту. Ч. 2 – Полтава: Полт. інж.-будів. ін-т, 1993. – С. 203.
30. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 69-72.
31. Емец О.А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах. – Полтава: Полт. инж.-строит. ин-т, 1989. – 11 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89, N2362Ук-89.
32. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и математические методы. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С. 120-129.
33. Емец О.А. Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – № 6. – С. 855-69.
34. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Украинский математический журнал. – 1994. – Т. 46. – № 6. – С. 680-691.
35. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства. – Полтава: Полт. инж.-строит. ин-т, 1983. – 20 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 28.6.83. – № 616 – УкД83.
36. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения: Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Харьков: Харьков. ин-т радиоэлектроники, 1984. – 120 с.

37. Емец О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах // В кн.: Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов: Сб. научн. тр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова – К:, 1993. – С. 34-37.
38. Емец О.А., Валуйская О.А. О методе евклидовой комбинаторной оптимизации с использованием выпуклого продолжения целевой функции и покрывающего множества симплексов. – Полтава: Полт. инж.-строит. ин-т, 1993. – 21 с. – Деп. в ГНТБ Украины 7.2.94. – № 255. – Ук94.
39. Емец О.А., Евсеева Л.Г. Метод решения комбинаторной задачи размещения прямоугольников с использованием оценки и достаточного условия минимума выпуклой недифференцируемой функции // В кн.: Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов: Сб. научн. тр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. – К., 1993. – С. 37-40.
40. Емец О.А., Евсеева Л.Г. Одна комбинаторная задача размещения прямоугольников: алгоритмы решения, численные эксперименты // В кн: Автоматизация архитектурно-строительного проектирования: Межвуз. сб. научн. тр. – Ростов-н/Д: Рост. гос. архит. ин-т, 1994. – С. 130-138.
41. Емец О.А., Емец Е.М. Моделирование инвестиций средствами евклидовой комбинаторной оптимизации // Abstracts Second International School on Actuarial and Financial Mathematics (June, 8-12, 1999, Kyiv). – Kyiv, *1999. – P. 19.*
42. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах евклидовой комбинаторной оптимизации. – Полтава: Полт. техн. ун-т,. 1995. – 21 с. – Деп. в ГНТБ України 01.12.95. – № 2562. – Ук.95.
43. Емец О.А., Емец Е.М., Колечкина Л.Н. Использование метода отсечений при раскрое // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 114-117.
44. Емец О.А., Емец Е.М., Колечкина Л.Н. Отсечения при решении задачи раскроя как оптимизации на перестановках. – Полтава: Полт. гос. техн. ун-т, 1998. – 22 с. – Деп. в ГНТБ України 10.09.98. – № 409. – Ук.98.
45. Емец О.А., Пичугина О.С. Задача упаковки в полосу на сочетаниях с повторениями. – Полтава: Полт. техн. ун-т., 1995. – 18 с. – Деп. в ГНТБ Украины 5.4.95. – № 771. – Ук95.

46. Емец О.А., Пичугина О.С. О приближенном решении условных задач оптимизации на евклидовом множестве сочетаний с повторениями. – Полтава: Полт. инж.-строит. ин-т., 1993. – 16 с. – Деп. в ГНТБ Украины 5.7.93. – № 1355. – Ук93.
47. Емец О.А., Роскладка А.А. Алгоритмическое решение двух параметрических задач оптимизации на множестве сочетаний с повторениями // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 6. – С. 160-165.
48. Ємець Є.М. Безумовна лінійна оптимізаційна задача на полірозміщеннях та її розв'язування // Збірник наук. праць: Вісник Полтав. держ. пед. ін-ту ім. В.Г. Короленка. – Сер. «Фіз.-матем. науки». – 1998, вип. 3. – С. 24-28.
49. Ємець Є.М. Властивості загальної множини полірозміщень та її опуклої оболонки // В кн.: Шоста міжн. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (15-17 травня 1997 р., Київ): Матер. конф. – К., 1997. – С. 158.
50. Ємець Є.М. Лінійна безумовна мінімізація на евклідовій множині полірозміщень // В кн.: Тези доп. 50 наук. конференції ун-ту. – Ч. 1. – Полтава: Полт. держ. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, 1998. – С. 51.
51. Ємець О., Ємець Є. Загальний многогранник полірозміщень та його властивості // В кн.: П'ята міжн. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (16-18 травня 1996 р., Київ): Тези доп. – К., 1996. – С. 140.
52. Ємець О.О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автор. дис. ... докт. фіз.-мат. наук (01.05.01). – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 1997. – 42 с.
53. Ємець О.О., Ємець Є.М. Багатокритеріальна задача е-комбінаторної оптимізації як модель однієї задачі формування портфеля цінних паперів // В кн.: Тези доп. 48 наук. конференції ун-ту. – Ч. 1. – Полтава: Полт. техн. ун-т, 1996. – С. 68.
54. Ємець О.О., Ємець Є.М. Вибір портфеля цінних паперів з урахуванням ризику як евклідова комбінаторна оптимізація // В кн.: Тези доп. 47 наук. конф. ... ун-ту. – Ч. 1. – Полтава: Полт. техн. ун-т, 1995. – С. 70-71.
55. Ємець О.О., Ємець Є.М. Використання моделей і методів комбінаторної оптимізації в задачах економії ресурсів // В кн.: Проблеми праці, економіки та моделювання: Зб. наук. праць. – Ч. 1. – Хмельницький: НВП «Еврика», 1998 – С. 92-93.
56. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доповіді НАНУ. – 2000. – № 9. – С. 105-109.

57. Ємець О.О., Ємець Є.М. Властивості множини поліроміщень, її опуклої оболонки та задачі оптимізації на цій множині. – Полтава: Полт. техн. ун-т, 1997. – 23 с. – Деп. в ДНТБ України 21.08.97. – № 480. – Ук97.
58. Ємець О.О., Ємець Є.М. Математична модель задачі вибору портфеля цінних паперів як задача евклідової комбінаторної оптимізації // В кн.: Тези доп. 46 наук. конф. ... ін-ту. – Ч. 1. – Полтава: Полт. інж.-будів. ін-т, 1994. – С. 80-81.
59. Ємець О.О., Ємець Є.М. Метод відсікання в евклідовій комбінаторній оптимізації: Навч. посібник. – Полтава, 1997. – 30 с.
60. Ємець О.О., Ємець Є.М. Метод відсікання для лінійних задач евклідової комбінаторної оптимізації // В кн.: Всеукраїнська наук. конф. «Розробка та застосування матем. методів в науково-техн. дослідженнях»: Тези доп. – Ч. 3. – Львів: «Львівська політехніка», 1995. – С. 32-33.
61. Ємець О.О., Ємець Є.М. Моделі задач формування портфеля цінних паперів у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізмції – Полтава: Полт. техн. ун-т., 1996. – 11 с. – Деп. в ДНТБ України 16.04.96. – № 960. – Ук96.
62. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Безпосереднє доведення теореми про грані загального переставного многогранника. – Полтава: Полт. тех. ун-т. 1996. – 10 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 03.01.97. – № 6. – Ук97.
63. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Про нове доведення теореми про грані загального переставного многогранника // В кн.: Матеріали конференції. Шоста міжнародна конференція ім. ак. М. Кравчука (15-17 травня 1997 р.). – К., 1997. – С. 160.
64. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Дробово-лінійна задача оптимізації на загальній множині переставлень та властивості області її допустимих розв'язків. – Полтава: Полт. тех. ун-т, 1997. – 25 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 30.12.97. – № 575. – Ук97.
65. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Нове доведення теореми про грані загального переставного многогранника // В кн.: Тези доповідей 49 наук. конференції професорів, викладачів ... університету. – Полтава: Полт. техн. ун-т. 1997. – С. 75.
66. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Розв'язування оптимізаційних задач з дробово-лінійною цільовою функцією на загальній множині переставлень // Вісник держ. ун-ту «Львівська політехніка». – 1998. – № 337, «Прикладна математика». – Т. 2. – Львів: «Львівська політехніка», С. 317-320.

67. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. – Полтава: Полтавський державний технічний ун-т ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – Ч. 1. – 64 с., Ч. 2. – 32 с.
68. Ємець О.О., Недобачій С.І. Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1998. – № 1. – С. 100-106.
69. Ємець О.О., Роскладка А. А. Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях // Український математичний журнал. – 1999. – Т. 51. – № 8. – С. 118-121.
70. Ємець О.О., Роскладка А.А. До оптимізації оцінок екстремальних значень сильно опуклих функцій на сполученнях // Вісник держ. університету «Львівська політехніка». – 1998. – № 337, «Прикладна математика». – Т. 2. – Львів: «Львівська політехніка», С. 320-322.
71. Ємець О.О., Роскладка А.А. Побудова опуклої оболонки загальної множини сполучень // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 4. – С. 95-96.
72. Исаченко А. Н., Емеличев Е. В. Многогранник одной задачи теории расписаний // В кн.: Вопросы планирования и экономико-математического моделирования. – Минск, 1980. – С. 117-119.
73. Каспшицкая М.Ф. Устойчивость решения в задаче коммивояжера // Кибернетика, 1986. – № 3. – С . 121-122.
74. Каспшицкая М.Ф. Устойчивость решения одной комбинаторной оптимизационной задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 10. – С. 60-64.
75. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.
76. Ковалев М. М., Исаченко А. Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22. – № 10. – С. 869-872.
77. Козерацька Л.Н. Цілочислові задачі оптимізації: проблема стійкості і параметричний аналіз: Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – К., 1997. – С. 42.
78. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: исследование устойчивости // Обозрение прикл. и промышл. математики. – 1995. – № 1.– С. 12-30.
79. Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження області визначення задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Збірник наук. праць: Вісник Полтав. держ. пед. ін.-ту ім. В.Г. Короленка. – Сер. «Фіз.-матем. науки». – Вип. 3. – Полтава, 1998. – С. 18-24.

80. Колєчкіна Л.М. Про одну задачу комбінаторної оптимізації з дробово–лінійною функцією цілі на переставленнях // Збірник наукових праць: Вісник Полтав. держ. пед. ін-ту ім. В.Г. Короленка. – Сер. «Фіз.-матем. науки». – Вип. 3. – Полтава, 1998. – С. 32-35.
81. Компьютер и задачи выбора. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
82. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP / А.А. Павлов, А.Б. Литвин, Е.Б. Мисюра, А.А. Павлова, В.И. Родионов. – К.: Техника, 1993. – 126 с.
83. Корбут А.А., Сигал И.Х., Филькенштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ: Обзор теории, алгоритмов, программ и приложений. – Math. Operationsforsch und Statist., Ser. Optimiz., 1977. – № 2. – С. 253-280.
84. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
85. Левин Г. М. К оптимизации функций реккурентно заданных на слабонормированных множествах перестановок // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 5. – С. 9-114.
86. Левин Г.М., Танаев В.С. К теории оптимизации на множествах перестановок // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. 14. – № 7. – С. 588-590.
87. Левитская А.А. Одна комбинаторная задача в классе перестановок над кольцом *Zn* вычетов по нечетному модулю *n* // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 5. – С. 99-108.
88. Леонтьев В. К. Устойчивость решений в линейных экстремальных задачах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: ВЦ АН СССР, 1981. – 247 с.
89. Меламед И.И., Сигал И.Х. Исследование параметров алгоритмов ветвей и границ решения симметричной задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 10. – С. 186-192.
90. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
91. Михалевич В. С., Шкурба В. В. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34-40.
92. Новожилова М. В., Лазарева И.Е. Применение методологии множителей Лагранжа в комбинаторной задаче размещения прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 3. – С. 141-147.
93. Новожилова М. В., Лазарева И.Е. Применение методологии непрерывной оптимизации в одной комбинаторной задаче геометрического проектирования с линейными ограничениями и функцией цели. – Харьков: Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, 1997. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.04.97. – № 1257. – В97.

94. Нурлыбаев А.Н. О графе перестановочного многогранника // Доклады АН Республики Казахстан. – 1992. – № 3. – С. 14-20.
95. Павлов А.А., Павлова Л.А. Основы методологии проектирования ПДС-алгоритмов для труднорешаемых комбинаторных задач // Проблемы информатики и управления. – 1995. – № 4. – С. 135-141.
96. Павлов О.А., Павлова Л.О. Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язувальних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1997. – № 1. – С. 22-26.
97. Пономаренко Л.Д., Макмак П. М. Новые подходы к минимизации на перестановках при упаковке геометрических объектов // Вычислительная техника и машиностроение. – 1980. – № 4. – С. 8-14.
98. Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., Кузьменко В.Н. Комбинаторный метод решения общей задачи выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 121-134.
99. Рева В.Н. Полиномиальный алгоритм решения квадратичной задачи о назначении в экспоненциальных окрестностях // Вопросы прикладной математики и математического моделирования. Сб. науч. тр. Днепропетровского ГУ. – Днепропетровск: Січ, 1997. – С. 145-146.
100. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы: Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 478 с.
101. Рубинштейн М.И. Задачи и методы комбинаторного программирования. – М., 1976. – 71 с.
102. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.
103. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.– К.: Наук. думка, 1981. – 288 с.
104. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ, 1997. – № 1. – С. 3-10.
105. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К.: Наук. думка, 1995. – 288 с.
106. Современное состояние теории исследования операций. – М.: Наука, 1979. – 464 с.
107. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980. – 22 с. (Препринт АН УССР / Ин-т проблем машиностр.; 85).

108. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. – Харьков, 1982. – 33 с. (Препринт АН УССР / Ин-т проблем машиностр.; 173).
109. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства. – Харьков, 1990. – 38 с. (Препринт АН УССР / Ин-т проблем машиностр.; 342).
110. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1985. – Т. 21, вып. 5. – С. 868-881.
111. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
112. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАНУ. – 1999. – № 8. – С. 37-41.
113. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешности исходных данных // Доповіді НАН України. – 1997. – № 7 – С. 56-60.
114. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наукова думка, 1980. – 208 с.
115. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
116. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 3. – С. 69-72.
117. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданых на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 2. – С. 27-37.
118. Стоян Ю.Г., Яковлєв С.В., Ємець О.О., Валуйська О.О. Про існування опуклого продовження функцій, які задані на гіперсфері // Доповіді НАН України. - 1998. – № 2. – С. 128-133.
119. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Паршин О.В. Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n // Докл. Ан УССР. Сер.А. – 1989. – № 5. – С. 73-77.
120. Танаев В. С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
121. Филимонов И.Е. Об упорядочении в R^n множества перестановок // Журнал вычислит. матем. и матем. физики – 1992. – Т. 32. – № 3. – С. 1834-1836.

122. Хачатуров В.Р. Апроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14. – № 6. – С. 1964-1987.
123. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
124. Шкурба В.В. Задача трех станков. – М.: Наука, 1976. – 96 с.
125. Яковлев С.В. Оценки минимума выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах // Кибернетика. – 1989. – № 3. – С. 83-87.
126. *Яковлев С.В., Валуйская О.А. О минимизации линейной функции* на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений // Доповіді НАН України. – 1999. – № 4. – С. 103-108.
127. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах // Известия вузов. Математика. – 1991. – № 11. – С. 74-86.
128. Gaiha P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutoheddron // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V.32, № 2. – P. 323-327.
129. Kova′cs La′szlo. Solvability of a special assignment problem // Publ. Univ. Miskolc. D. – 1996. – 36, № 2. – С. 77-86.
130. Yemets O., Yemets Ye. Optimization problems on a set of polyarrangements // В кн.: Сьома міжн. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (14-16 травня 1998 р., Київ): Матеріали конф. – К., 1998. – С. 167-168.
131. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
132. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
133. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.
134. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
135. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
136. Павлов А.А., Ван Инхуэйн. Особенности решения *NP*-трудных задач комбинаторной оптимизации // Інформатика та нові технології. – 1997. – № 1. – С. 13.
137. Тимофеева Н.К. Упорядочивание множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 6. – С. 78-87.

138. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
139. Charnes A. Optimality and Degeneracy in Linear Programming // Econometrica. – 1952. – V. 20. – P. 160-170.
140. Шор Н.З. Роль избыточных ограничений в улучшении двойственных оценок для полиномиальных оптимизационных задач // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 4. – С. 106-121.
141. Шор Н.З., Бардадым Т.А., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Использование методов негладкой оптимизиции в задачах стохастического программирования // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 33-47.
142. Бурдюк В.Я., Семенов В.А. Разрешимые случаи новой комбинаторной задачи оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 2. – С. 175-178.
143. Гребенник И.В. Решение некоторых задач условной оптимизации линейных функций на перестановочном многограннике // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 55-59.
144. Гребенник И.В. Оценки минимума выпуклых функций с ограниченным множеством точек экстремума на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 2. – С. 111-114.
145. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 3. – С. 78-93.
146. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 3. – С. 172-175.
147. Гуляницкий Л.Ф., Кошлай Л.Б., Сергиенко И.В. О сходимости одного метода вероятностного моделирования для решения задач комбинаторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 3. – С. 164-166.
148. Кузюрин Н.Н. Распределенное принятие решений // Методы комбинаторной оптимизации. – М.: ВЦ РАН, 1997. – С. 30-36.
149. Сергиенко И.В. О некоторых направлениях и результатах работ в области математического программирования и системного анализа // Кибернетика и систем. анализ. – 1995. – № 3. – С. 3-48.
150. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач // Кибернетика и систем. анализ. – 1995. – № 2. – С. 158-162.

151. Яковлев С.В., Гребенник И.В. Локализация решений некоторых нелинейных целочисленных задач оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 5. – С. 116-123.
152. Cooper C., Gilchrist R., Kovalenko I.N., Novakovic D. Deriving the number of «good» permutations, with applications to cryptography // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 5. – С. 10-17.
153. Бурдюк В.Я., Сергеев С.О. О разбиении метрического пространства на непрерывные компоненты // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – С. 185-190.
154. Сергієнко І.В. Інформатика в Україні: становлення, розвиток, проблеми. – К.: Наукова думка, 1999. – 354 с.
155. Емец О.А., Емец Е.М. Моделирование некоторых инвестиционных задач с помощью евклидовой комбинаторной оптимизации // Экономика и матем. методы. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 141-144.
156. Ємець О.О., Ємець Є.М. Безумовна оптимізація на полірозміщеннях: достатні умови та оцінки мінімумів сильно опуклих цільових функцій // Вісник Запорізького державного університету. – Запоріжжя: ЗДУ, 2000. – № 1. – С. 44-48.
157. Ємець О.О., Ємець Є.М. Оцінки та достатні умови мінімуму сильно опуклої функції при її мінімізації на розміщеннях // Волинський математичний вісник. – Рівне: Рівненський державний університет, 2000. – № 7. – С. 67-69.
158. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и матем. методы. – 2001. – Т. 37. – № 1. – С. 118-121.
159. Емец О.А., Валуйская О.А., Чиликина Т.В. Оптимизация работы одной вычислительной системы как задача комбинаторной оптимизации // В кн.: Сборник научных трудов по материалам 6-й международной конференции «Теория и техника передачи приема и обработки информации» («Новые информационные технологии»), (17-19 сентября 2000 г., Туапсе). – Харьков: ХТУРЭ, 2000. – С. 189-190.
160. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение // Экономика и матем. методы. – 2000. – Т. 36. – № 3. – С. 149-152.
161. Ємець О.О., Ємець Є.М. Оцінки та достатні умови мінімуму сильно опуклої функції при її мінімізації на розміщеннях // Волинський математичний вісник. – Рівне: РДГУ, 2000. – № 7. – С. 67-69.

162. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Український математичний журнал. – 2000. – Т. 52. – № 12. – С. 1630-1640.
163. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Моделювання деяких прикладних задач оптимізаційними задачами з дробово-інійною функцією цілі на переставленнях // Волинський математичний вісник. – Рівне: РДГУ, 2000. – № 7. – С. 70-77.
164. Ємець О.О., Пічугіна О.С., Романова Н.Г. Про поширення на поліпереставлення методу Стояна-Яковлева опуклого продовження функції та його ефективність // В кн. VIII міжн. наук. конф. ім. ак. М. Кравчука (11-14 травня 2000 р., Київ): Матеріали конф. – К., 2000. – С. 278.
165. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Оптимізація на розміщеннях у моделюванні інвестиційних задач // В кн.: Економічні проблеми розвитку регіонів та підприємств на початку XXI століття. Всеукраїнська науково-практична конференція (Полтава, 22-23 листопада 2001 р.): Тези доповідей. У двох томах. Том 2. – Полтава: ПДТУ ім. Ю. Кондратюка, 2001 – С. 78-80.
166. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 3. – С. 131-138.
167. Емец О.А., Недобачий С.И., Колечкина Л.Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13. – № 1. – С. 110-118.
168. Емец О.А., Роскладка Е.В. Многоуровневая задача обслуживания как задача евклидовой комбинаторной оптимизации и ее решение // Динамические системы (межвед. науч. сб.). Вып. № 17. – Симферополь: Тавр. нац. ун-т, 2001. – С. 205-209.
169. Ємець О., Романова Н., Роскладка О. Про властивості деяких задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях та методи їх розв'язування // Вісник Львів. ун-ту. Сер. приклад. математика та інформатика. – 2002. – № 5. – С. 89- 94.
170. Валуйская О.А., Емец О.А., Романова Н.Г. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит. математ. и матем. физики. – 2002. – Т. 42. – № 4. – С. 591-596.

171. Валуйська О., Ємець О., Пічугіна О. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. приклад. математика та інформатика. – 2002. – Вип. № 4. – С. 94-101.
172. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Методи відсікання в нелінійній оптимізації на розміщеннях та їх застосування до розв'язування однієї інвестиційної задачі // Збірник наук. праць: Вісник Полтав. держ. пед. ін-ту ім. В.Г. Короленка. – Сер. «Фіз.-матем. науки». – 2002. – Вип. 1 (22). – С.110-116.
173. Ємець О.О., Романова Н.Г., Чілікіна Т.В. Задачі оптимізації на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах // В кн.: Міждержавна науково-методична конференція «Проблеми математичного моделювання» (28-30 травня 2003 р., м. Дніпродзержинськ): Тези доп. – Дніпродзержинськ, 2003. – С. 32-33.
174. Ємець О.О., Роскладка О.В., Недобачій С.І. Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень // Український матем. журн. – 2003. – Т. 55. – № 1. – С. 3-11.
175. Гребенник И.В., Лапко Д.А. Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 1. – С. 109-113.
176. Гребенник И.В., Лапко Д.А. Решение задач оптимизации линейных функций с линейными ограничениями на множестве перестановок, отображенном в R^n // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – № 1. – С. 116-119.
177. Емец О.А., Роскладка Е.В. Решение некоторых евклидовых комбинаторных задач оптимизации методом динамического программирования // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 1. – С. 138-146.
178. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Розв'язування задач нелінійної умовної оптимізації на розміщеннях методом відсікання // Український матем. журн. – 2003. – Т. 55. – № 5. – С. 604-612.
179. Yemets O. Euclidean combinatorial sets in combinatorial optimization – Полтава: Полтав. держ. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, 1998. – 11 с. – Деп. в ДНТБ України 10.09.98. – № 397. – Ук98.
180. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение линейных задач оптимизации на размещениях методом отсечений // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 6. – С. 131-141.

181. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Оптимізація інвестиційних портфелів як евклідова комбінаторна оптимізація на розміщеннях // Економіка і регіон. – 2003. – № 1. – С. 65-67.
182. Ємець О.О., Романова Н.Г. Комбінований метод розв'язування лінійних комбінаторних задач оптимізації на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах // Динамические системы (межвед. науч. сб.). Вып. 18. – Симферополь: Тавр. нац. ун-т., 2004. – С. 166-170.
183. Ємець О.О., Чілікіна Т.В. Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування // Динамические системы (межвед. науч. сб.). Вып. 18. – Симферополь: Тавр. нац. ун-т. – 2004. – С. 160-165.
184. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и систем. анализ. 2004. – № 3. – С. 30-43.
185. Емец О.А., Барболина Т.Н. Лексикографическая эквивалентность в оптимизации на размещениях // В кн.: Материалы VIII международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (2-5 февраля 2004 г., Москва) – М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ, 2004. – С. 187-191.
186. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 5. – С. 115-125.

Наукове видання

СТОЯН Юрій Григорович
ЄМЕЦЬ Олег Олексійович
ЄМЕЦЬ Єлизавета Михайлівна

ОПТИМІЗАЦІЯ НА ПОЛІРОЗМІЩЕННЯХ:
теорія та методи

Головний редактор *Філатов М.В.*
Редактор-коректор *Леус Л.В.*
Технічний та художній редактор *Деркач Є.А.*
Комп'ютерна верстка *Чепелєва Е.П.*
Відповідальний секретар *Слинько Ю.В.*
Технічне забезпечення: *Грицан Л.І., Безрідна О.В., Бойко Т.В., Крисько М.С., Савіна Н.В.*

Здано до редакції 14.04.2005 року. Підписано до друку 23.06.2005 року.
Формат 148×210. Папір 65 г/м². Ум.друк.арк. 6,4 + 0,1 (обкл.).
Тираж 1 000 прим. Зам. № 381

Видано редакційно-видавничим центром ПУСКУ
36014, м. Полтава, вул. Коваля, 3, к. 115, ☎ 8 (0532) 50-24-81
e-mail: rio@uccu.org.ua

СТОЯН ЮРІЙ ГРИГОРОВИЧ

член-кореспондент Національної академії наук України, доктор технічних наук, професор, завідувач відділу математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Підготував більше 50 кандидатів та докторів наук за різними науковими спеціальностями, має більше 300 наукових публікацій, в тому числі більше десяти монографій.

ЄМЕЦЬ ОЛЕГ ОЛЕКСІЙОВИЧ

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики Полтавського університету споживчої кооперації України. Підготував 7 кандидатів наук за спеціальностями: теоретичні основи інформатики та кібернетики, математичне моделювання, має близько 200 наукових публікацій, в тому числі 2 монографії та навчальний посібник. Кандидатська та докторська дисертації захищені під керівництвом Ю.Г. Стояна.

ЄМЕЦЬ ЄЛИЗАВЕТА МИХАЙЛІВНА

кандидат фізико-математичних наук за спеціальністю математичне моделювання, доцент кафедри інформаційно-обчислювальних систем Полтавського університету споживчої кооперації України. Має 45 наукових та науково-методичних публікацій. Кандидатська дисертація захищена під керівництвом Ю.Г. Стояна.