УДК 519.854

Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації: Монографія. - К.: ІСДО, 1993. - 188 с.

Містить виклад останніх досліджень комбінаторних екстремальних задач математичного програмування. Даються означення задач комбінаторної оптимізації і евклідових комбінаторних множин. Досліджуються властивості евклідових комбінаторних множин після їх занурення в арифметичний евклідовий простір: загальних множин переставлень, поліпереставлень, розміщень, множини сполучень з повтореннями. Вивчаються властивості задач оптимізації на цих множинах, обгрунтовуються методи і алгоритми їх розв"язування з лінійними, опуклими та угнутими цільовими функціями цілі. Розглядається побудова математичних моделей деяких задач геометричного проектування у вигляді задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах та їх розв"язок.

Для спеціалістів, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в області оптимізації та математичного моделювання.

Іл. 7. Табл. І. Бібліогр.: 141 назва.

Відповідальний за випуск А.Г.Горбань, канд.фіз.-мат.наук, доцент

Рецензенти: В.П.Путятін, д-р техн.наук, проф.
В.М.Струков, доц.

ISBN 5-7763-2272-3

ВСТУП

Розвиток математичного программування, застосування його в різних галузях людської діяльності, які зв'язані з вибором одного з можливих варіантів дії (при вирішенні проблем управління і планування виробничих процесів, в задачах геометричного проектування і перспективного планування та інших), сприяло появі в останній час великої кількості праць, що присвячені задачам оптимізації на комбінаторних множинах і пов'язаним з цим питанням.

Розглянемо деякі відомі задачі комбінаторної оптимізації та існуючі методи їх розв'язку, почавши з ряду задач на множині переставлень.

Задача I.I (задача комівояжера). Дивись, наприклад, [1,2]. Комівояжеру необхідно побувати в кожному з n міст, виїхавши з фіксованого міста, проїхавши точно по одному разу через інші міста, повернутися в те саме місто. Відомі відстані між будь-якими містами.

Задача полягає в визначенні черги об'їзду міст, при якому сумарна відстань була б мінімальною.

Задача I.2 (задача про призначення). Дивись, наприклад, [1,2]. Є n робіт і n кандидатів на їх виконання. Призначення кандидата під номером i на роботу j пов'язане зі збитками $c(i,j)$.

Задача полягає в находженні такого розподілу виконавців на роботи, при якому сумарні збитки були б мінімальними.

Задача I.3 [2-4]. Є прямокутна плата і n однакових радіомодулів, які розміщуються на платі без прогалин та налягання з фіксованою орієнтацією сторін плати і модулів. Мається на увазі, що відношення довжин паралельних сторін плати і модулів є цілими числами. Задано число зв'язків між кожною парою модулів.

Відстані можуть вимірюватися в евклідовій або манхетенській (ортогональній) метриках.

Задача полягає в находженні такого розміщення модулів, при якому досягається мінімум сумарної довжини зв'язуючої елементи сітки.

Задача I.4 (задача балансування деталей, що обертаються) [3,4]. Задані n робочіх лопаток турбіни та їх статичні моменти. Лопатки з однаковим кутовим кроком насаджуються на робочу ступінь турбіни.

Задача полягає в визначенні такої послідовності лопаток, при якій досягається сумарний мінімально можливий небаланс.

Велика кількість постановок задач оптимізації на переставленнях є в геометричному проектуванні [3,4]. Задачі оптимізації на переставленнях можна формулювати як задачі на множині підстановок. Зупинимось, зокрема, в зв'язку з цим праці [5-7]. Велика кількість праць пов'язана з оптимізацією приоритетно-породжуючих функцій на множині переставлень, на множині переставлень частково упорядкованих елементів, а також функцій, рекурентно заданих на множині переставлень. (Дивись, зокрема, [8-15]). Багато які задачі теорії розкладів, планування формулюються як оптимізаційні задачі на множині переставлень (дивись, наприклад, [16-19]). Оптимізаційні задачі на переставленнях розглядалися також в багатьох інших працях, а також в інших постановках (дивись, зокрема, [2-4, 20-30]).

Розглянемо задачі комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Задача I.5 [2]. Задана множина задач A. З неї треба виділити підмножину в потужності не менше D і упорядкувати її так, щоб час роз'вязку задач з B в заданій черзі на обчислювальних системах з мультіпрограмуванням був мінімальним.

Задача I.6 [2]. Задано m машин $B_1,\dots,B_m$ та n деталей A_1,

..., A_n. Нехай x - деякий розклад обробки деталей на машинах, який встановлює чергу проходження обробки деталей A_i послідовно на машинах $B_1,\dots,B_m$. Задача полягає в находженні розкладу максимальної потужності, який мінімізує деякій заданий функціонал при умові $T(x)\leq T$, де $T=const$, $T(x)$ - час праці по розкладу x.

<u>Задача I.7</u> [2]. Задана геометрична фігура C і сукупність точок $D=\{d_1,\dots,d_k\}$, що належать C, набір прямокутників $A=\{a_1,\dots, a_n\}$. Задано однозначне правило розміщення a_i в d_j для усіх i та j. Задача полягає у виборі з A підмножини мінімальної потужності і її упорядкування, щоб відношення площі покритої частини C до площі C не було менше ніж задана стала $\varphi\leq 1$.

Розглянемо ряд прикладів оптимізаційних задач на множинах сполучень.

<u>Задача I.8 (задача про ранець).</u> Дивись, зокрема, [2,22]. Турист збирається в дорогу. Ранець, який він бере з собою не може витримати вантаж більше G. Є набір з n предметів харчування, для яких відомі калорійність і вага. Задача полягає в виборі такої підмножини предметів харчування, щоб сумарна вага її не перевищувала G, а калорійність була максимальною.

<u>Задача I.9</u> [2]. Дана множина A, яка складається з розв'язуваних на ЕОМ задач. Позначимо $V(x)$ та $t(x)$ відповідно пам'ять та час розв'язку всіх задач $x\subset A$, і нехай V та T - деякі сталі. Задача полягає в виборі такого сполучення x^*, яке задовольняє обмеженням $V(x^*)\leq V$, $t(x^*)\leq T$ та доставляє максимум лінійній згортці функціоналів $V(x)$, $t(x)$ з заданими сталими коефіцієнтами.

<u>Задача I.10 (задача інтерполяції дискретної функції, що отримана експериментальним шляхом)</u> [2]. *Дана множина точок* $A=\{a_1,\dots, a_n\}$ і значення деякої функції $f(a_i)$ в кожній точці $a_i\in A$, які отримані в експерименті. Задача полягає в визначенні підмножини $x\subset A$ потужності не більше N, інтерполяція по якій функції $f(a)$

функцією $\varphi(a)$ дає мінімальне відхилення.

Розглянемо ряд задач на множині розподілів.

Задача I.II (задача про купу каміння) [31]. Є купа каміння $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$, відома вага $b(a_i)$ кожного каменю $a_i \in A$. Задача полягає в розподілі купи A на m частин так, щоб вага самої важкої з них була б мінімальною.

Задача I.12 [2]. Є множина задач. Необхідно знайти розподіл множини задач на мінімальну кількість підмножин так, щоб пам'ять ЕОМ, що займається задачами кожної з цих підмножин, не перевищувала заданої сталої.

Задача I.13 (задача оптимізації оргструктури) [32]. Є множина підприємств і множина зв'язків між ними. Під зв'язком розуміється показник, що характеризує матеріально-речові, фінансові або інформаційні течії. Задані інтенсивності всіх зв'язків, об'єми виробництва всіх підприємств. Необхідно розподілити сукупність A на об'єднання підприємств, щоб виконувалися такі умови: 1) об'єм виробництва в кожнім об'єднанні не перевищує деякої сталої c; 2) в одне об'єднання попадають тільки ті підприємства, яким це дозволено; 3) кількість підприємств в кожнім об'єднанні не перевищує деякої сталої k. Задача полягає в находженні такого розподілу множини A, на якому досягається мінімум сумарної інтенсивності зв'язків між об'єднаннями.

З розвитком потреби розв'язувати задачі комбінаторної оптимізації з розмірністю більшою, ніж у задач, що розв'язуються повним перебором, виникла необхідність в розробці відповідних методів.

Найбільшого поширення набули так звані комбінаторні методи [1,33], які об'єднують методи віток та меж [1,33,34], метод послідовного аналізу варіантів [35], методи побудови послідовності розв'язків [36], методи локальної оптимізації [2,37], метод динамічного програмування [38], метод послідовних розрахунків [39], апроксимаційно-комбінаторний метод [40] та інші.

Зауважимо, що оскільки комбінаторна оптимізація зародилася у лоні дискретної, то комбінаторні методи також початково застосовувалися до задач в цілочисловій постановці. Метод віток та меж вперше був застосований до задачі комбінаторної оптимізації (задачі комівояжера) в праці [41]. Застосування методу динамічного програмування до задач оптимізації комбінаторного типу, певно, почалось з праць [42,43], в яких розглядається задача про комівояжера.

Застосуванню методів послідовного аналізу варіантів до розв'язку задач календарного планування присвячені, зокрема, праці [16,18,19], до задачі комівояжера - праця [28].

Метод послідовних розрахунків виник як метод розв'язку одного класу екстремальних задач: оптимізації субмодулярної функції, що визначена на всіх підмножинах деякої скінченної множини. Як відмічено у [1], порядок об'єму перебору при цьому не перевищує полінома третього степеня від вимірності задачі.

Основна ідея комбінаторних методів полягає у переході від повного перебору скінченної множини розв'язків до скороченого, напрямленого. Комбінаторні методи мають низку позитивних якостей, що пояснюють їх переважання не тільки в комбінаторній, але й у дискретній оптимізації в цілому, а саме: 1) гнучкість, універсальність, можливість застосування до усяких задач комбінаторної оптимізації в будь-якій постановці; 2) відсутність необхідності установлювати скінченність процесу розв'язку з огляду на скінченність допустимої множини та по побудові алгоритмів.

Від решти комбінаторних методів метод динамічного програмування вигідно відрізняється таким. Якщо він може бути застосований, то є можливість наперед оцінити потребу в пам'яті ЕОМ і кількість операцій. (У монографії [1] наведені відповідні оцінки для декількох алгоритмів методу динамічного програмування у випадку задачі комівояжера і узагальненої задачі про ранець в цілочисловій постановці). Хоча метод динамічного програмування дозволяє (порівняно з повним перебором) понизити кількість операцій, але при цьому зростає об'єм потрібної пам'ті ЕОМ. Іншими вадами цього методу є уживаність його в порівняно вузьких рамках та залежність від характеристик ЕОМ, що використовуються, прогнозу оцінки його поведінки.

Для решти комбінаторних методів, хоча вони й можуть бути застосовані, як вже зазначено, до будь-яких задач комбінаторної оптимізації, взагалі кажучи, відсутні апріорні оцінки трудомісткості, об'єму необхідної пам'яті та інших параметрів, що характеризують в тій чи іншій мірі ефективність методів. Зокрема,у монографії [2] зазначено наступні тенденції, що проявилися при числових експериментах по методах віток і меж: 1) експоненціальне зростання трудомісткості при збільшенні розмірів задачі; 2) значна трудомісткість доведення оптимальності отриманого (можливо, дуже швидко) розв'язку; 3) суттєва залежність трудомісткості рішення як від способу галуження так і від способу обчислення оцінок.

Бурхливо розвивається комбінаторна оптимізація у напрямку теоретичного дослідження складності комбінаторних екстремальних задач, виділення розв"язуваних випадків таких задач. Зазначемо в цьому зв'язку праці [7,21,44,45].

Зауважимо, що методи комбінаторного типу ідейно близькі. Так, первісне правило відсіву безперспективних варіантів в методі послідовного аналізу варіантів - принцип монотонної рекурсивності [46] - близький критерію оптимальності динамічного програмування [38]. В праці [47] зазначається, зокрема, близькість ідей методів віток і меж та динамічного програмування. А перша праця по методах побудови послідовності розв'язків [48] відзначає їх спорідненість методам динамічного програмування. В праці [49] показано, що апроксимаційно-комбінаторний метод є одним з варіантів схеми методу побудови послідовності розв'язків.

Зазначимо ряд вад розглянутих комбінаторних методів. Використовуваний в методі побудови послідовності розв'язків алгоритм галуження-елімінації, відмічений в [49] як основний для розв'язку широкого класу задач дискретної оптимізації, вимагає значного об'єму пам'яті ЕОМ. Методи віток і меж, хоч і прості у реалізації, але, взагалі кажучи, мають ті ж недоліки [49].

Серед методів локальної оптимізації для задач комбінаторного типу домінують алгоритми методу вектора спаду [2], що є ітераційним методом напрямленого перебору градієнтного типу. Однак в деяких випадках застосування алгоритмів методу вектора спаду утруднено на околах великого радіуса. У монографії [2] розглянута велика кількість застосувань методу, дивись також [50].

Неможливість точного розв'язку задач комбінаторної оптимізації, що мають велику вимірність, специфічні обмеження привели до розробки наближених методів, серед яких домінують методи локальної оптимізації, що зазначені вище, і методи випадкового пошуку [2,22,34,49]. Розробляються також наближені методи, що є модифікацією точних (дивись, наприклад, [51]). Наближені методи мають суттєві вади: 1) отриманий локальний екстремум може не збігатися з глобальним; 2) не можна, кажучи взагалі, оцінити різницю між отриманим локальним і глобальним екстремумом апріорно.

Зауважимо, що часто наближені методи використовуються в комбінації один з одним [2,49]. В [52] розглядається ефективність наближених алгоритмів комбінаторної оптимізації в ряді випадків.

Великого поширення дістав метод околів, що звужуються

[3,4], який є методом адаптивного випадкового пошуку з можливістю локальної оптимізації. Особливо широко його використання в задачах геометричного проектування (в тому числі в розміщенні геометричних об'єктів), де на деякому етапі розв'язку виникає необхідність розв'язування задач комбінаторної оптимізації [3,4,29,53]. Треба зазначити працездатність методу околів,що звужуються для задач великої вимірності, наявність доведення збіжності (по імовірності) до глобального екстремуму для спеціальних випадків [54]. Але розв'язок задач цим методом вимагає значних затрат часу ЕОМ, якщо обчислення одного значення функціоналу трудомістке. Розвиток цього методу привів до появи методу послідовної статистичної оптимізації [4].

Особливе місце в методах комбінаторної оптимізації займає евристичний підхід. (В його руслі лежить метод значущих змінних для мінімізації функціоналів на переставленнях [28]). Евристичні алгоритми розв'язку задач комбінаторної оптимізації розглядалися в багатьох працях (дивись, наприклад, [2,32,33,34,55,56]). Евристичні алгоритми, хоч і дозволяють враховувати будь-які обмеження, а також звичайно швидко дають розв'язок, але не гарантують його оптимальності. Відхилення від глобального екстремуму оцінити, як правило, важко, а часом неможливо. Крім того, в евристичних алгоритмів існують так звані аномалії [57].

Все викладене, нові потреби практики дозволять зробити висновок про актуальність розробок нових підходів і методів комбінаторної оптимізації і дослідження властивостей задач оптимізації комбінаторного типу.

Далі викладено деякі результати останніх досліджень комбінаторних множин після їх занурення в арифметичний евклідовий простір, а також розроблені на цій основі підходи, методи та алгоритми розв'язку задач комбінаторної оптимізації.

І. ОЗНАЧЕННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

І.І. Постановка основної задачі оптимізації на комбінаторній множині

У вступі розглянуто ряд задач оптимізації комбінаторного типу. Всі вони укладаються в рамки такої основної задачі комбінаторної оптимізації.

Нехай є скінченна множина Q комбінаторної природи. Позначимо q довільний елемент з Q, а $|Q|$ - кількість елементів Q. Нехай задано деякий функціонал F на множині Q. Під основною задачею комбінаторної оптимізації будемо розуміти задачу знаходження екстремуму

$$F(q^*) = \operatorname*{extr}_{q\in Q} F(q) \tag{І.І}$$

і екстремалі

$$q^* = \arg \operatorname*{extr}_{q\in Q} F(q). \tag{І.2}$$

Розв'язком задачі (І.І), (І.2) назвемо пару $\langle F(q^*),q^*\rangle$. Задачі (І.І), (І,2) можуть ставитись незалежно одна від одної, тоді під розв'язком розуміють відповідно $F(q^*)$, q^*.

Назвемо основною задачою мінімізації на комбінаторній множині задачу визначення

$$F(q^*) = \min_{q\in Q} F(q), \qquad q^* = \arg \min_{q\in Q} F(q) ,$$

а основною задачою комбінаторної максимізації - задачу знаходження

$$F(q^*) = \max_{q\in Q} F(q), \qquad q^* = \arg \max_{q\in Q} F(q) .$$

Специфіка задач комбінаторної оптимізації часто не дозволяє точно розв'язувати задачу (І.І), (І.2). В цьому випадку шукається наближений розв'язок. В зв'язку з цим розрізняють такі постановки.

Знайти точку $q^{o} \in Q$ таку, що

$$|F(q^{o}) - \operatorname*{extr}_{q \in Q} F(q)| \leqslant \varepsilon, \qquad (I.3)$$

де $\varepsilon>0$ – точність розв'язку.

Знайти точку $\tilde{q} \in Q$, де Q – метричний простір, таку, що

$$\rho(\tilde{q}, \arg \operatorname*{extr}_{q \in Q} F(q)) \leqslant \delta, \qquad (I.4)$$

де $\delta>0$ – точність розв'язку, а $\rho(.,.)$ – метрика простору Q.

Зазначимо при цьому, що розглядаються постановки, коли

$$\varepsilon = \varepsilon_o |\operatorname*{extr}_{q \in Q} F(q)|,$$

де $\varepsilon_o>0$ – відносна точність розв'язку, а величини ε, ε_o, δ або задані апріорно, або визначаються апостеріорно.

Часто, знаходячи наближений розв'язок, мають на увазі локальний екстремум. Введемо це поняття. Нехай Q – топологічний простір, а $O(q,Q)$ – окіл точки $q \in Q$. Локальним екстремумом функціоналу $F(q)$ назвемо

$$F(\bar{q}) = \operatorname*{extr}_{q \in O(q,Q)} F(q), \qquad (I.5)$$

а локальною екстремаллю

$$\bar{q} = \arg \operatorname*{extr}_{q \in O(q,Q)} F(q). \qquad (I.6)$$

Очевидно, що при $O(q,Q) = Q$ задачі (I.1), (I.2) і (I.5), (I.6) збігаються. Екстремалі в задачах мінімізації будемо називати мінімалями, а в задачах максимізації – відповідно максималями.

I.2. Означення і приклади евклідових комбінаторних множин

Позначимо через J_n множину n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1,\dots,n\}$, нехай $J_n^o = J_n \cup \{0\}$, $J_o = \varnothing$. Дамо означення необхідних далі понять.

Під мультимножиною, як і в [58], будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові (нерозрізнимі).

Мультимножина, у якої всі елементи різні, є множиною. Всяку мультимножину A можна зобразити її основою $s(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, і кратністю – числом повторення кожного елемента основи цієї мультимножини. Способи задання мультимножини аналогічні способам задання множини. Наприклад, мультимножина $A=\{a,a,a,b,b,c\}$ має основу $s(A)=\{a,b,c\}$ і кратності $k(a)=\eta_1=3$, $k(b)=\eta_2=2$, $k(c)=\eta_3=1$. Кратності елементів основи мультимножини записують також у вигляді показника степеня. Тоді можна записати $A=\{a^3,b^2,c^1\}$. Список кратностей мультимножини $A=\{a^v, b^w, \dots\}$ називають її первинною специфікацією і позначають $[A]=\{v, w, \dots\}$. Вторинною специфікацією мультимножини $A=\{a^v, b^w, \dots\}$ називається первинна специфікація її первинної специфікації, тобто $[[A]]=[\{v,w,\dots\}]$. Таким чином, якщо A – множина, що складається з m (різних) елементів a_i, $i\in J_m$, то $A=\{a_1, \dots, a_m\}$, $[A]=\{1^m\}$, $[[A]]=m$. Якщо ж $B=\{a^m\}$, то $[B]=\{m\}$, $[[B]]=1$. При $C=\{a^m,b\}$ маємо $[C]=\{m,1\}$, $[[C]]=\{1^2\}$.

Розглянемо дії з мультимножинами. Додавання мультимножин визначається так. Нехай A – мультимножина з основою $s(A)=\{x, y, z, \dots\}$ і кратностями $\{k_A(x), k_A(y), k_A(z), \dots\}$, а B – мультимножина з основою $s(B)=\{x, y, z, \dots\}$ і кратностями $\{k_B(x), k_B(y), k_B(z), \dots\}$, де $k_A(x)\geq 0$, $k_A(y)\geq 0$, $k_A(z)\geq 0$, $k_B(x)\geq 0$, $k_B(y)\geq 0$, $k_B(z)\geq 0$, і так далі. Тоді під сумою $A+B$ мультимножин A та B розуміють мультимножину з основою $s(A+B)=s(A)\cup s(B)$ і кратностями $\{k_{A+B}(x), k_{A+B}(y), k_{A+B}(z), \dots\} = \{k_A(x)+k_B(x), k_A(y)+k_B(y), k_A(z)+k_B(z), \dots\}$. Тобто при додаванні мультимножин їх основи об'єднуються, а кратності однакових елементів основи додаються. Суму n мультимножин A_i будемо позначати $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

Об'єднанням мультимножин A і B є мультимножина $C=A\cup B$, основою якої є множина $s(A\cup B)=s(A)\cup s(B)$, а кратність будь-якого елемента a основи визначається як $\max(k_A(a), k_B(a))$.

Перерізом мультимножин A і B є мультимножина $C=A\cap B$, основою якої є множина $S(A\cap B)=S(A)\cap S(B)$, а кратність довільного елемента a основи визначається як $\min(K_A(a),\ K_B(a))$.

Мультимножина B з основою $S(B)$ називається підмультимножиною мультимножини A з основою $S(A)$, якщо $S(B)\subset S(A)$ і для кожного елементу $a\in S(B)$ виконується нерівність $K_B(a)\leq K_A(a)$. Позначається це таким же знаком $\subset$, що і для множин, тобто $B\subset A$.

Назвемо k-елементну підмультимножину B мультимножини A k-вибіркою, тобто B - k-вибірка, якщо $B\subset A$, $|B|=k$. Наприклад, якщо $A=\{a^2,\ b^3\}$, $k=3$, то 3-вибірки - це $\{a^2,\ b\}$, $\{a,\ b^2\}$, $\{b^3\}$. Більш глибоке знайомство з поняттям мультимножини та діями над ними можна зробити, наприклад, за [58].

Нехай k, n, η - натуральні константи, g_j, e_i - дійсні числа $\forall j\in J_\eta$, $\forall i\in J_n$, а $G=\{g_1,\ \ldots,\ g_\eta\}$ - мультимножина з основою $S(G)=$ $=\{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$, первинною специфікацією $[G]=\langle\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\rangle$, $\eta_i\geq 1$ $\forall i\in J_n$, $\eta_1+\ldots+\eta_n=\eta$, $\eta\geq k$. Не порушуючи спільності, можна вважати, що $\eta_i\leq k$ $\forall i\in J_n$. Зазначимо, що по означенню основи мультимножини $e_i\neq e_j$ $\forall i\neq j$, $i,j\in J_n$. Очевидно, що з такого означення мультимножини G випливає, що $\eta\leq nk$. Як G - мультимножина, то існує принаймні $i\in J_n$, що $\eta_i>1$, а з цього випливає, що $\eta>n$.

Розглянемо упорядковану k-вибірку

$$e = (g_{i_1},\ g_{i_2},\ \ldots,\ g_{i_k}) \tag{I.7}$$

з мультимножини G, де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$.

Означення I.I [58]. *Множину E, елементами якої є k-вибірки* $\bar{e}=(\bar{e}_1,\ \ldots,\ \bar{e}_k)$, $\bar{\bar{e}}=(\bar{\bar{e}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{e}}_k)$ *вигляду* (I.7) *з мультимножини* G *назвемо евклідовою комбінаторною множиною, якщо з умов* $\bar{e}_j=\bar{e}_m$, $\bar{e}_m=\bar{\bar{e}}_j$, $\bar{e}_j\neq\bar{\bar{e}}_j$, $j,m\in J_k$ *випливає* $\bar{e}\neq\bar{\bar{e}}$.

Іншими словами, множина E має таку властивість: два елементи $\bar{e}$, $\bar{\bar{e}}$, що належать множині E, відмінні один від одного, коли вони *незалежно від інших відмінностей відрізняються порядком слідування символів, що їх утворюють.*

Для стислості викладу будемо далі іноді називати евклідову комбінаторну множину е-комбінаторною множиною або просто е-множиною. Розглянемо деякі е-комбінаторні множини.

<u>Множина переставлень без повторення з k різних дійсних чисел.</u> Розглянемо упорядковані k-вибірки вигляду (I.7) з мультимножини G при умові, що $\eta=n=k$. Це означає, що $[G]=\{1^n\}$, тобто мультимножина G є множиною. При цьому k-вибірки будуть відрізнятися *одна від одної тільки порядком слідування чисел, бо* $\eta=k$. Таку k-вибірку назвемо переставленням без повторення. Сукупність всіх таких переставлень утворює множину переставлень без повторення k різних дійсних чисел множини G. Позначимо її $P_k(G)$.

<u>Множина переставлень з повтореннями з k дійсних чисел, з яких n різні.</u> Розглянемо упорядковані k-вибірки вигляду (I.7) з мультимножини G при умові, що $k=\eta$. Очевидно, що з цієї умови випливає, що такі k-вибірки будуть відрізнятися одна від одної тільки порядком слідування чисел. Такі k-вибірки назвемо переставленнями з повтореннями. Сукупність всіх таких переставлень утворює множину переставлень з повтореннями з k дійсних чисел мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$, серед яких n різних. Позначимо цю сукупність $P_{kn}(G)$. Очевидно, що $P_{kk}(G)=P_k(G)$, тому множину $P_{kn}(G)$ будемо також називати загальною множиною переставлень.

<u>Поліпереставна множина.</u> Розглянемо упорядковане розбиття множини J_k на s множин $K_1, \ldots, K_s$, які задовольняють умовам $K_i \cap K_j=\emptyset$, $K_i \neq \emptyset$, $\forall i,j \in J_s$. Позначимо через H множину елементів вигляду $\pi=(\pi(1), \ldots, \pi(k))=(\pi^1, \ldots, \pi^s)$, де π^i $\forall i \in J_s$ - довільне *переставлення елементів множини* K_i. *Нехай* $\eta=k$, $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, *як* і раніше, позначає мультимножину. Множину $P_{kn}^s(G,H)=\{(g_{\pi(1)}, \ldots, g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$ назвемо поліпереставною множиною з повтореннями

або загальною поліпереставною множиною. Елементи цієї множини будемо називати поліпереставленнями (з повтореннями). У випадку, коли $s(G)=G$, тобто G - множина, іншим чином при $k=n$, $P^s_{kk}(G,H)$ будемо називати поліпереставною множиною без повторень і позначати $P^s_k(G,H)$, а елементи її - називати поліпереставленнями без повторень. Якщо немає потреби підкреслювати кількість елементів в G, $s(G)$, або кількість множин K_i, $i\in J_s$, що утворюють поліпереставну множину, то наряду з позначенням $P^s_{kn}(G,H)$ будемо використовувати також $P(G,H)$. Очевидно, що множина $P^s_{kn}(G,H)$ задовольняє визначенню I.I, тобто є евклідовою комбінаторною множиною. Зазначимо також, що коли $s=1$, то $H=P_k(J_k)$ і $P^1_{kn}(G,H)=P_{kn}(G)$, $P^1_k(G,H)=P_k(G)$.

<u>Множина k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел.</u> Нехай $[G]=\langle 1^n\rangle$, тобто G - множина, $\eta=n$, $G=s(G)$. За такої умови множину всіх упорядкованих k-вибірок вигляду (I.7) з множини G називають множиною k-розміщень без повторення з n різних дійсних чисел множини G. Позначимо цю множину розміщень $A^k_n(G)$. Зазначимо, що при $k<n$ маємо множину розміщень у власному розумінні слова, а при $n=k$ $A^k_n(G)=P_k(G)$.

<u>Множина k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел.</u> Нехай $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ - мультимножина з основою $s(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ та первинною специфікацією $[G]=\langle k^n\rangle$, тобто $\eta=nk$, а кратності η_i елементів e_i однакові і дорівнюють k $\forall i\in J_n$. За таких умов множину всіх упорядкованих k-вибірок вигляду (I.7) з мультимножини G називають множиною k-розміщень з повтореннями з n різних дійсних чисел. Позначимо цю множину $\bar{A}^k_n(G)$.

<u>Загальна множина k-розміщень.</u> Нехай $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, як і раніше, - мультимножина з основою $s(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ і первинною специфікацією $[G]=\langle \eta_1, \ldots, \eta_n\rangle$, де $\eta_i\le k$ $\forall i\in J_n$. Сукупність усіх упорядкованих k-вибірок вигляду (I.7) з мультимножини G будемо називати загальною множиною k-розміщень і позначати її через

$A^k_{\eta n}(G)$. Зазначимо, що оскільки елементи первинної специфікації мультимножини G задовольняють умови $\eta_i \leq k$, то в кожному елементі множини $A^k_{\eta n}(G)$ не більше η_i елементів $e_i \in S(G)$ $\forall i \in J_n$. Якщо ж $\eta_i < k$ $\forall i \in J_n$, то, очевидно, що ні в одному елементі множини $A^k_{\eta n}(G)$ не має k однакових чисел e_i, $i \in J_n$ (на відміну від множини $\bar{A}^k_n(G)$, де є n елементів, що складаються з однакових чисел e_i, $i \in J_n$). Зазначимо також, що при $n=\eta$, тобто при $\eta_i=1$ $\forall i \in J_n$, множина $A^k_{\eta n}(G)$ збігається з множиною $A^k_n(G)$ розміщень без повторень: $A^k_{nn}(G)=A^k_n(G)$, а при $\eta_i=k$ $\forall i \in J_n$, тобто при $\eta=kn$, множина $A^k_{\eta n}(G)$ перетворюється на множину $\bar{A}^k_n(G)$: $A^k_{\langle kn \rangle n}(G)=\bar{A}^k_n(G)$. Цим пояснюється наявність слова "загальна" в назві множини $A^k_{\eta n}(G)$. Очевидно, що $|A^k_n(G)| \leq |A^k_{\eta n}(G)| \leq |\bar{A}^k_n(G)|$, причому рівності досягаються в тільки що вказаних випадках.

<u>Множина полірозміщень</u>. Нехай, як і раніше, $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ — мультимножина з основою $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$, первинною специфікацією $[G]=\langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$, $\eta_1+\ldots+\eta_n=\eta$, $1 \leq \eta_i \leq k$ $\forall i \in J_n$. Розглянемо упорядковане розбиття множини J_η на s множин $N_1, \ldots, N_s$, що задовольняє умовам $N_i \cap N_j = \varnothing$, $N_i \neq \varnothing$ $\forall i, j \in J_s$, а також упорядковане розбиття числа k на s доданків $k_1, \ldots, k_s$, що задовольняють умовам $1 \leq k_i \leq n_i$ $\forall i \in J_s$, де $n_i = |N_i|$. Очевидно, що $k_1+\ldots+k_s=k$, $n_1+\ldots+n_s=\eta$.

Нехай H — множина всіх k-вибірок з множини J_η вигляду $\pi=(\pi(1), \ldots, \pi(k))=\pi_{11}, \ldots, \pi_{1k_1}, \ldots, \pi_{s1}, \ldots, \pi_{sk_s})$, де $\pi^i=(\pi_{i1}, \ldots, \pi_{ik_i})$ — довільна k_i-вибірка з множини N_i $\forall i \in J_s$. Множину $A^{ks}_{\eta n}(G,H)=\{(g_{\pi(1)}, \ldots, g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$ назвемо множиною *полірозміщень з повтореннями або загальною множиною полірозміщень*. У випадку, коли $S(G)=G$, тобто G — множина і $\eta=n$, $A^{ks}_{nn}(G,H)$ будемо називати множиною полірозміщень без повторень і позначати

$A_n^{ks}(G,H)$. Якщо немає потреби підкреслювати кількість елементів в G, в $S(G)$, в π або кількість множин N_i, $i\in J_s$, за допомогою яких утворюється множина поліроміщень, то наряду з позначенням $A_{\eta n}^{ks}(G,H)$ будемо використовувати також $A(G,H)$. Очевидно, що множина $A(G,H)$ задовольняє означення I.I, тобто є е-множиною. Елементи множини $A_{\eta n}^{ks}(G,H)$ будемо називати поліроміщеннями з повтореннями, а елементи множини $A_n^{ks}(G,H)$ – поліроміщеннями без повторень. Зазначимо також, що якщо $k=\eta$, то $A_{kn}^{ks}(G,H)=P_{kn}^{s}(G,H)$, а якщо $s=1$, то $H=A_{\eta}^{k}(J_{\eta})$, а $A_{\eta n}^{k1}(G,H)=A_{\eta n}^{k}(G)$.

Множина k-сполучень з повтореннями з n різних дійсних чисел. Розглянемо мультимножину $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ з основою $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ і первинною специфікацією $[G]=\{k^n\}$. Елементами множини k-сполучень з повтореннями є всі k-вибірки з мультимножини G вигляду

$$e=(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}), \tag{I.8}$$

де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_\eta$ $\forall j,t\in J_k$. Не втрачаючи спільності, можна вважати, що для будь-якого елемента e вигляду (I.8) з множини k-сполучень з повтореннями виконуються нерівності

$$g_{i_1}\leqslant g_{i_2}\leqslant \ldots \leqslant g_{i_k}. \tag{I.9}$$

Множина всіх упорядкованих умовою (I.9) k-вибірок e вигляду (I.8) очевидно задовольняють визначенню I.I е-множини. Позначимо її $\bar{C}_n^k(G)$.

Зазначимо, що розглянуто лише деякі з евклідових комбінаторних множин. Далі в деяких випадках будемо пропускати G в позначенні множин, тобто $P_k(G)=P_k$ тощо.

Виділення з усіх комбінаторних множин е-множин зв'язано з можливістю їх занурення в евклідовий простір.

І.3. Відображення комбінаторних множин в арифметичний евклідовий простір

Раніше дано означення е-комбінаторної множини E. Ця множина цікава тим, що дозволяє занурення її в арифметичний евклідовий простір.

<u>Означення І.2</u> [59]. Нехай E - евклідова комбінаторна множина, а e в зображенні (І.7) - елемент E. Тоді відображення $f: E \to E_f \subset R^k$ будемо називати зануренням E в арифметичний евклідовий простір, якщо f ставить множину E у взаємно однозначну відповідність множині E_f за таким правилом: для $e=(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}) \in E$, $x=f(e)$, $x=(x_1, \ldots, x_k) \in E_f$ маємо $x_j=g_{i_j}$ $\forall j \in J_k$.

Образ множини E в R^k (тобто множину E_f) будемо виходячи з [59] називати спеціальною комбінаторною множиною. Далі для стислості викладу будемо використовувати також скорочене її позначення - с-комбінаторна множина або просто с-множина. Зауважимо, що с-множина є також е-множиною.

Поряд з відображенням f розглянемо також відображення f_N, що переводить множину E в множину $E_{f_N} \subset R^k$ за таким правилом: для $e=(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}) \in E$, $x=f_N(e)$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$ маємо $x_j=i_j$ $\forall j \in J_k$. При необхідності одночасно розглядати множини E_f та E_{f_N} будемо використовувати позначення E_φ.

С-комбінаторні множини для е-комбінаторних множин, розглянутих раніше, позначимо так: $E_k(G)=f(P_k(G))$, $E_{kn}(G)=f(P_{kn}(G))$, $\bar{E}^k_n(G)=f(\bar{A}^k_n(G))$, $E^k_n(G)=f(A^k_n(G))$, $E^s_{kn}(G,H)=f(P^s_{kn}(G,H))$, $E^k_{\eta n}(G)=f(A^k_{\eta n}(G))$, $E^{ks}_{\eta n}(G,H)=f(A^{ks}_{\eta n}(G,H))$, $\bar{S}^k_n(G)=f(\bar{C}^k_n(G))$.

3^x

I.4. Задачі евклідової комбінаторної оптимізації

Введення поняття е-комбінаторна множина дозволяє виділити з множини задач оптимізації комбінаторного типу, що описуються основною задачею комбінаторної оптимізації (I.I), (I.2), ті задачі, в яких як множина Q розглядаються е-множини E (або їх підмножини). А саме, визначити

$$F(g^*)=\underset{g\in E}{\mathrm{extr}}\ F(g); \tag{I.10}$$

$$g^*=\arg \underset{g\in E}{\mathrm{extr}}\ F(g). \tag{I.11}$$

Введення відображень f та f_N дає можливість замінити розв'язок задачи (I.10), (I.11) розв'язком такої задачі: знайти

$$\Phi(x^*)=\underset{x\in E_\varphi}{\mathrm{extr}}\ \Phi(x); \tag{I.12}$$

$$x^*=\arg \underset{x\in E_\varphi}{\mathrm{extr}}\ \Phi(x), \tag{I.13}$$

де $\Phi(x)$ – функція k змінних, що означена на множині E_φ, $\Phi: E_\varphi \to R^1$, яка відповідає функціоналу $F(g)$, $g\in E$. Під відповідністю функції $\Phi(x)$ функціоналу $F(g)$, $g\in E$, $x=\varphi(g)$ *розуміється наступне:* $F(g)=\Phi(\varphi(g))$ $\forall g\in E$. Тут φ – це f або f_N. Функція $\Phi(x)$ може бути означена на множині $E_\Phi \supset E_\varphi$, $E_\Phi \subset R^k$. Якщо в задачі (I.12), (I.13) функція $\Phi(x)$ задана у вигляді єдиного аналітичного виразу, то природньо вважати,що E_Φ – область означення цього виразу при $x\in R^k$ або її частина.

<u>Означення I.3.</u> Задачу (I.12), (I.13) назвемо евклідовою задачою комбінаторної оптимізації або коротко е-задачою оптимізації чи просто е-задачою.

Часто буває зручно задачу (I.12), (I.13) зобразити в такому вигляді: знайти

$$\Phi(x^*)=\operatorname*{extr}_{x\in E_\psi} \Phi(x); \tag{I.14}$$

$$x^*=\arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\psi} \Phi(x) \tag{I.15}$$

при обмеженнях

$$\psi^i(x) \le 0 \quad \forall i\in J_r; \tag{I.16}$$

$$\psi^{r+i}(x) = 0 \quad \forall i\in J_s, \tag{I.17}$$

де r,s - деякі цілі невід'ємні константи, $J_o=\emptyset$, а множина $E_\psi\subset R^k$ і функції $\psi^i: E_\psi\to R^1$ $\forall i\in J_{r+s}$ такі, що $E_\varphi=\{x \mid x\in E_\psi, \psi^i(x)\le 0 \ \forall i\in J_r; \psi^{i+r}(x)=0 \ \forall i\in J_s\}$.

Іноді зручно таке зображення задачі (I.12), (I.13): знайти

$$H(y^*)=\operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} H(y); \tag{I.18}$$

$$y^*=\arg \operatorname*{extr}_{x\in E_\varphi} H(y) \tag{I.19}$$

при обмеженнях

$$\varphi^i(y) \le 0 \quad \forall i\in J_r; \tag{I.20}$$

$$\varphi^{r+i}(y) = 0 \quad \forall i\in J_s, \tag{I.21}$$

де $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $y=(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_m)\in R^m$, m - деяка натуральна константа ($m\ge k$), а $H(y)$, $\varphi^i(y)$ $\forall i\in J_{r+s}$ - функції m змінних. Обмеження (I.16), (I.17), (I.20), (I.21) назвемо додатковими обмеженнями е-задачі. Е-задачу в зображенні (I.18)-(I.21) при $m=k$ назвемо повністю комбінаторною е-задачою, а при $m>k$ - частково комбінаторною. При цьому змінні $y_{k+1}, \ldots, y_m$ будемо називати неперервними, а $x_1, \ldots, x_k$ - комбінаторними. Якщо $r+s=0$, тобто додаткових обмежень немає, то е-задачу (I.18)-(I.21) назвемо евклідовою безумовною задачою комбінаторної оптимізації, у противному випадку - умовною е-задачою. Якщо функції $H(y)$, $\varphi^i(y)$ $\forall i\in J_{r+s}$ лінійні, то задачу (I.18)-(I.21) назвемо лінійною е-задачою. Аналогічно по вигляду цільової функції і (або) вигляду додаткових обмежень будемо називати е-задачу (1.18)-(1.21) відповідно е-задачою опуклої, угнутої, сепарательної, квадратичної, нелінійної, недиференційовної, позиноміальної оптимізації тощо.

Далі розглянемо властивості евклідових комбінаторних множин.

2. ВЛАСТИВОСТІ ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

2.1. Властивості загальної множини переставлень

Як і раніше, нехай $E_{kn}=f(P_{kn}(G))$, $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$. Тоді за означенням P_{kn} в точках $x\in E_{kn}$ справедлива рівність

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i . \tag{2.1}$$

Тому має місце наступне твердження.

<u>Теорема 2.1</u> [59]. Точки множини E_{kn} належать гіперплощині (2.1) простору R^k.

Не порушуючи спільності, можна вважати, що елементи мультимножини G задовольняють умові

$$g_i \le g_{i+1} \quad \forall i\in J_{k-1}. \tag{2.2}$$

<u>Теорема 2.2</u> [59]. Точки множини E_{kn} належать $(k-1)$-сфері з центром у точці O_1, яка має координати $x_1= \ldots =x_k=t^*$, де

$$t^* = (g_1 + \ldots + g_k) / k, \tag{2.3}$$

і радіус

$$r = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(g_i - \left(\sum_{j=1}^{k} g_j \right) / k\right)^2 \right)^{1/2} . \tag{2.4}$$

Виконується рівняння (2.1) $\forall x\in E_{kn}$, тому множина E_{kn} лежить на $(k-2)$-сфері, що описується системою з (2.1) і рівнянням

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i- t^*) = r^2.$$

Подальший розгляд властивостей множини E_{kn} грунтується на

[60–64]. Розглянемо многогранну множину $\Pi_{kn}(G)$, що означається наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} x_j \le \sum_{j=1}^{k} g_j ; \\ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} g_j ; \end{cases} \tag{2.5}$$

$\alpha_j \in J_k$, $\alpha_j \ne \alpha_r$ $\forall j \ne r$, $j, r \in J_i$ $\forall i \in J_k$. Нагадаємо, що виконується умова (2.2).

Назвемо сукупність нерівностей системи (2.5), що мають однакове значення величини i, i-ю *спілкою нерівностей цієї системи*, а верхню нерівність системи (2.5) – нульовою спілкою.

<u>Теорема 2.3.</u> Многогранна множина $\Pi_{kn}(G)$ є многогранником.

<u>Доведення.</u> Достатньо розглянути нерівності спілок 1 та $k-1$, які з урахуванням нерівностей спілок 0 та k дають k-куб:

$$g_1 \le x_i \le g_k \qquad \forall i \in J_k . \tag{2.6}$$

Таким чином, множина $\Pi_{kn}(G)$ обмежена, оскільки є частиною k-куба. Тобто множина $\Pi_{kn}(G)$ є многогранником.

<u>Теорема 2.4.</u> $E_{kn} = V_k$, де $V_k = \mathrm{vert}\,\Pi_{kn}(G)$ – множина вершин многогранника $\Pi_{kn}(G)$.

<u>Доведення.</u> Покажемо спочатку, що $E_{kn} \subset V_k$, а потім $V_k \subset E_{kn}$. Доведемо, що $E_{kn} \subset V_k$. Нехай $b^* = (b^*_{j_1}, \ldots, b^*_{j_k}) \in E_{kn}$, $j_i \in J_k$ $\forall i \in J_k$. Покажемо, що $b^* \in V_k$. В i-й спілці нерівностей системи (2.5) в точці b^*, хоча б наступне обмеження виконується як рівність

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\beta_j} - \sum_{j=1}^{i} g_j \ge 0,$$

де β_j визначається із співвідношення $g_j = b^*_{\beta_j}$ $\forall j \in J_i$ $\forall i \in J_k$. Нехай $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik})$ – вектор коефіцієнтів біля змінних в останній нерівності $\forall i \in J_k$. Розглянемо матрицю $C = [\alpha_{ij}]$ $\forall i, j \in J_k$. Неважко бачити, *що переставленням стовпців з C можна отримати $C' = [c_{ij}]$* таку, що $c_{ij} = 0$ при $j > i$ та $c_{ij} = 1$ при $j \le i$ $\forall i, j \in J_k$. Визначник $\det C' \ne 0$, це означає, що $\det C \neq 0$ також. Отже, $b^* \in V_k$, а в силу довільності вибору $b^* \in E_{kn}$ має місце включення $E_{kn} \subset V_k$.

Доведемо, що $E_{kn} \supset V_k$, скориставшись методом математичної індукції. Для $k=2$, та $k=3$ справедливість цього включення очевидна. *Припустимо, що це включення виконується також для* $k=m-1$ і від противного доведемо, що воно вірно для $k=m$. Нехай

$$x_p^* = \beta \neq g_j \quad \forall j \in J_m, \quad p \notin J_m, \tag{2.7}$$

де $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in V_m$. Тоді можна вказати $t \in J_{m-1}$ та $\alpha > 0$ такі, що виконуються співвідношення $g_t < \beta < g_{t+1}$, $g_t + \alpha = \beta$. (Нагадаємо, що виконуються нерівності (2.2)). Підставимо значення x_p з виразу (2.7) в систему (2.5) при $k=m$. Далі з цієї системи вилучемо ті нерівності, у яких права частина менше при однаковій лівій частині. При цьому $\forall s \in J_t$ вилучається нерівність

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{s} g_j - \beta ,$$

тому що в системі є нерівність

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{s-1} g$$

і $g_s - \beta < 0$ $\forall s \in J_t$, бо $g_s < g_t < \beta$; тут $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ $\forall i, j \in J_m$, $\alpha_r = p$, $\alpha_j \in J_m$. А при $s \in J_{m-1} \setminus J_t$ вилучається нерівність

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{s-1} g_j ,$$

тому, що в системі є ще нерівність

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{s} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{t-1} g_j + (g_{t+1} - \alpha) + \sum_{j=t+2}^{s} g_j ,$$

і легко бачити, що

$$\sum_{j=1}^{t-1} g_j + \sum_{j=t+1}^{s} g_j - \alpha \geq \sum_{j=1}^{s-1} g_j .$$

Дійсно останню нерівність маємо з вірного для всіх $s \in J_{m-1} \setminus J_t$

співвідношення $g_t + \alpha < g_{t+1} \leqslant g_s$. З першої спілки нерівностей системи (2.5) вилучемо вірну числову нерівність, або тотожність.

Таким чином, після вказаного підставлення і наступного вилучення нерівностей отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \bar{x}_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m-1} \bar{b}_j ; \\ \sum\limits_{j=1}^{i} \bar{x}_{\alpha_j} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{i} \bar{b}_j , \end{cases} \tag{2.8}$$

де $\alpha_j \in J_{m-1}$, $\alpha_j \neq \alpha_r$ $\forall j \neq r$, $\forall j, r \in J_i$ $\forall i \in J_{m-1}$; $\bar{x}_r = x_r$ $\forall r \in J_{p-1}$, $\bar{x}_r = x_{r+1}$ $\forall r \in J_{m-1} \setminus J_{p-1}$; $\bar{b}_r = g_r$ $\forall r \in J_{t-1}$; $\bar{b}_t = g_{t+1} - \alpha$; $\bar{b}_r = g_{r+1}$ $\forall r \in J_{m-1} \setminus J_t$. Очевидно, що це система вигляду (2.5) при $k=m-1$, *бо* в силу (2.2) і нерівності $g_t < g_{t+1} - \alpha < g_{t+1}$ маємо $\bar{b}_i \leqslant \bar{b}_{i+1}$ $\forall i \in J_{m-2}$. Умова $V_k \subset E_{kn}$ для $k=m-1$ вірна за припущенням. Нехай $\bar{b}^* = (\bar{b}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{b}_{\alpha_{m-1}}) \in V_{m-1}$, де $V_{m-1} = \mathrm{vert}\,\Pi_{(m-1),\bar{n}}(\bar{G})$, $\bar{n}$ – кількість різних елементів мультимножини $\bar{G} = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m-1}\}$, многогранник $\Pi_{(m-1),\bar{n}}(\bar{G})$ означається системою нерівностей (2.8). Тоді, $\bar{b}^* \in E_{(m-1),\bar{n}}(\bar{G})$, бо з припущення індукції для $k=m-1$ випливає $V_{m-1} = E_{(m-1),\bar{n}}(\bar{G})$. Побудуємо $b^* = (b^*_{\alpha_1}, \ldots, b^*_{\alpha_m})$ наступним чином: $b^*_{\alpha_i} = \bar{b}_{\alpha_i}$ $\forall i \in J_{p-1}$; $b^*_{\alpha_p} = \beta$; $b^*_{\alpha_{i+1}} = \bar{b}_{\alpha_i}$ $\forall i \in J_{m-1} \setminus J_{p-1}$, де p визначається з умови $\alpha_p = t$. З одного боку точка $b^* \in V_m$, бо $\bar{b}^* \in V_{m-1}$ і виконується рівність (2.7). Підставимо b^* в систему (2.5) при $k=m$. Легко бачити, що при цьому в спілці з номером t немає нерівностей, що виконуються як рівності, а в *інших спілках є лише $m-1$ лінійно незалежних умов, що в* точці b^* обертаються на рівності. Таким чином, з другого боку, $b^* \notin V_m$. Отримали протиріччя. Таким чином, (2.7) не вірно. Отже, припущення індукції при $k=m$ справедливо. Тобто доведено, що $E_{kn} \supset V_k$. А із справедливості цього включення і протилежного, яке обгрунтоване в першій частині доведення, отримуємо $E_{kn} = V_k$. Що і треба було довести.

Назвемо $\Pi_{kn}(G)$ загальним переставним многогранником. Окремі випадки $\Pi_{kn}(G)$ розглянуті в [65–65]. В [65] розглянуто випадок, коли G – множина невід'ємних чисел $g_1>\ldots>g_k\geq 0$ (позначимо цей многогранник $\Pi_k^+(G)$), а в [66] – при більш слабких умовах, коли G – множина, а обмеження $g_k\geq 0$ відсутнє. Іншими словами розглянуто випадок опуклої оболонки $\Pi_k(G)$ множини $E_k(G)=f(P_k(G))$. В [67] досліджується множина $P_k(G)$ і її опукла оболонка $\Pi_k(G)$, де G – множина цілих чисел.

Розглянемо властивості многогранника $\Pi_{kn}(G)$, почавши з опису m-граней цього многогранника, $m\in J^0_{k-2}$.

<u>Теорема 2.5</u> [68,69]. Нехай мультимножина $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ має основу $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ і первинну специфікацію $[G]=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$; $e_1>\ldots>e_n$; $g_1\geq\ldots\geq g_\eta$. Нехай $k_0=0$, $k_1=\eta_1$, $k_2=\eta_1+\eta_2$, ..., $k_n=\eta_1+\ldots+\eta_n=n$.

а) Нехай F – m-грань многогранника $\Pi_{kn}(G)$, що означається системою

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega} x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega\subset J_k; & (2.9) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i. & (2.10) \end{cases}$$

Тоді існують такі підмножини $\omega_1\subset\ldots\subset\omega_{k-m}=J_k$, для яких нерівності (2.9) *обертаються на рівності при любому* $x\in F$, *тобто відповідні обмеження – жорсткі для* F. При цьому F – множина розв'язків системи, одержаної з (2.9), (2.10) заміною в (2.9) нерівностей рівностями для $\omega=\omega_\sigma$ при $\sigma\in J_{k-m-1}$.

б) Якщо для підмножин $\omega_1\subset\ldots\subset\omega_\lambda=J_k$ нерівності в (2.9), (2.10) замінити рівностями, то множина F розв'язків отриманої системи є m-гранню многогранника $\Pi_{kn}(G)$:

$$m=\dim F = k-\{\lambda + \sum(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1)\}$$

і підсумовування провадиться по всіх індексах $\sigma\in J_\lambda$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in J_n$, $k_{j-1}\leqslant|\omega_{\sigma-1}|$ та $|\omega_\sigma|\leqslant k_j$ (вважаємо, що $|\omega_0|=0$).

<u>Доведення</u>. У випадку, коли елементи мультимножини G невід'ємні, тобто $g_n\geqslant 0$, теорема справедлива [70]. Для доведення в загальному випадку скористаємося паралельними перенесеннями множини $E_{kn}(G)$ вершин многогранника $\Pi_{kn}(G)$ у напрямках усіх координатних осей на довільну величину δ так, щоб усі вершини мали невід'ємні координати. Отже,

$$\begin{cases} x_i = x_i' - \delta, \\ g_i = g_i' - \delta, \quad \forall i\in J_k. \end{cases} \tag{2.11}$$

Так як в правій і лівій частинах всіх нерівностей (2.9) і рівності (2.10) кількість доданків однакова, то в силу (2.11) для многогранника $\Pi_{kn}(G')$, де $G'=\{g_1+\delta, \ldots, g_n+\delta\}$, система, що його описує, має вигляд (2.9), (2.10). Звідси випливає справедливість теореми.

<u>Наслідок 2.6</u> [65]. Множина розв'язків системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega\subset J_k; \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i \end{cases}$$

є i-гранню, $i\in J^0_{k-2}$, переставного многогранника $\Pi_k^*(G)$, $G=\{g_1, \ldots, g_n\}$ в тому і тільки в тому випадку, коли кожне з цих розв'язків обертає в рівності нерівності системи лише для підмножин ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_{k-i-1}, що мають властивість

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_{k-i-1} \subset J_k. \tag{2.12}$$

Нехай, як і раніше, $\Pi_{kn}(G)$ визначається системою (2.5) при умові (2.2).

<u>Наслідок 2.7</u> [60]. Якщо $x=(x_1, \ldots, x_k)$ – вершина $\Pi_{kn}(G)$, то справедливо

$$\{\alpha_1^1\}\subset\{\alpha_1^2,\alpha_2^2\}\subset\ldots\subset\{\alpha_1^{k-1},\ldots,\alpha_{k-1}^{k-1}\}\subset\{\alpha_1^k,\ldots,\alpha_k^k\}=J_k, \quad (2.13)$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_t \quad \forall i\in J_k. \quad (2.14)$$

І навпаки, якщо виконуються умови (2.13), (2.14), то x – вершина *загального переставного многогранника* $\Pi_{kn}(G)$.

<u>Теорема 2.8.</u> *Вершинами загального переставного многогранника* $\Pi_{kn}(G)$, *суміжними з вершиною* $g=(g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_k})$, *є усякі вершини, які одержані з* g *переставленням компонент рівних* e_i, e_{i+1} $\forall i\in J_{n-1}$ *і тільки вони.*

<u>Доведення.</u> Воно витікає з теореми 2.5 і означень ребра і суміжних вершин.

<u>Теорема 2.9.</u> *Кількість* R *суміжних з довільною вершиною многогранника* $\Pi_{kn}(G)$ *вершин обчислюється так:* $R=\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\ldots+\eta_{n-1}\eta_n$.

<u>Доведення.</u> Згідно з теоремою 2.8, щоб з вершини $g=(g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_k})$ одержати їй суміжну, треба переставити елементи e_i, e_{i+1}, $\forall i\in J_{n-1}$. Кількість елементів e_i дорівнює η_i, $i\in J_n$. Кількість суміжних з g вершин, що одержуються з переставлення двох елементів e_i, e_{i+1} дорівнює $\eta_i\eta_{i+1}$, $i\in J_{n-1}$, а всіх – $R=\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\ldots+\eta_{n-1}\eta_n$. Що і треба було довести.

<u>Зауваження 2.1.</u> *Неважко бачити, що кількість нерівностей,* які входять в систему (2.5), дорівнює 2^k, тому що в спілці i системи міститься $\binom{k}{i}$ нерівностей. (Тут і далі через $\binom{k}{i}$ позначено число сполучень з k елементів по i). А як відомо, $\binom{k}{0}+\ldots+\binom{k}{k}=2^k$.

Нехай для мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$ виконується умова (2.2), а первинна специфікація мультимножини $[G]=(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ така, що $\eta_1>1$. Очевидно, що в цьому випадку при виконанні нерівностей першої спілки системи (2.5) справедливі нерівності і наступних η_1-1 спілок, і їх можна видалити з системи, що описує $\Pi_{kn}(G)$. Тому кількість R нерівностей, що залишається, визначається так:

$$R = 1 + k + \binom{k}{\eta_1+1} + \ldots + \binom{k}{k}. \qquad (2.15)$$

Аналогічні міркування можна провести і у випадку, коли первинна специфікація мультимножини така, що $\eta_k>1$. При цьому, очевидно, що при виконанні нерівностей спілки $k-1$ виконуються нерівності і η_k-1 спілок з номерами $k-\eta_k,\ k-\eta_k+1,\ \ldots,\ k-2$.

<u>Теорема 2.10</u> [59]. *Множина E_{kn} симетрична відносно усякої гіперплощини виду*

$$x_i - x_j = 0, \quad i\neq j \quad \forall\ i,j \in J_k. \qquad (2.16)$$

<u>Наслідок 2.11.</u> Множина E_{kn} симетрична відносно всякої $(k-2)$-площини, яка описується системою рівнянь (2.1), (2.16).

<u>Означення 2.1</u> [60,62]. Назвемо дві i-грані S_1^i, S_2^i $(k-1)$-многогранника M суміжними, якщо вони перерізаються по $(i-1)$-*грані* S^{i-1} *цього многогранника, тобто*

$$S_1^i \cap S_2^i = S^{i-1}, \quad i \in J_{k-2}. \qquad (2.17)$$

Нехай є дві i-грані S_1^i та S_2^i, $i\in J_{k-2}$ переставного многогранника $\Pi_k^*(G)$. Тоді за наслідком 2.6 *існує множина* $\Omega_1^i=\{\omega_j^1\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_1^i та $\Omega_2^i=\{\omega_j^2\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_2^i. Ці множини задовольняють умові (2.12). Нехай виконується співвідношення (2.17). За наслідком 2.6 існує множина $\Omega^{i-1}=\{\omega_j\}_{j=1}^{k-i}$, що відповідає грані S^{i-1} і задовольняє умові (2.12). Так як в точках грані S^{i-1} повинні одночасно виконуватися обмеження, що описують грані S_1^i та S_2^i, то

$$\Omega^{i-1} = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i. \qquad (2.18)$$

Припустимо, що виконується умова (2.18). З наслідку 2.6 випливає, що існують грані S_1^i та S_2^i, що визначаються множинами Ω_1^i та Ω_2^i, але в силу (2.18) маємо (2.17). Таким чином, доведено наступний критерій суміжності граней многогранника $\Pi_k^*(G)$.

<u>Теорема 2.12</u> [60,62]. Для того, щоб дві i-грані S_1^i та S_2^i

многогранника $\Pi_k^+(G)$ були суміжними, необхідно і достатньо, щоб множина Ω^{i-1} в зображенні (2.18) визначала $(i-1)$-грань s^{i-1}_i; $i\in J_{k-2}$.

Розглянемо $(k-2)$-грані переставного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ і, зокрема, $\Pi_k^+(G)$. За теоремою 2.5 кожна $(k-2)$-грань визначає множину $\omega_1\subset J_k$. Назвемо типом $(k-2)$-грані переставного многогранника кількість елементів $|\omega_1|$ у відповідній множині ω_1. Ясно, що $|\omega_1|\in J_{k-1}$. Позначимо $K(k,\alpha)$ кількість суміжних $(k-2)$-граней до $(k-2)$-грані типу α переставного многогранника $\Pi_k^+(G)$. Справедлива така формула

$$K(k,\alpha) = 2^{k-\alpha} + 2^{\alpha} - 4. \tag{2.19}$$

Дійсно, у випадку многогранника $\Pi_k^+(G)$ кількість $K'(k,\alpha)$ $(k-2)$-граней типу i, $i\le i<\alpha$, суміжних з вибраною $(k-2)$-гранню типу α обчислюється так:

$$K'(k,\alpha) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{i}.$$

А кількість $K''(k,\alpha)$ суміжних з даною $(k-2)$-гранню типу α $(k-2)$-граней типів i, де $\alpha<i\le k-1$ обчислюється за формулою

$$K''(k,\alpha) = \sum_{j=1}^{n-\alpha-1} \binom{k-\alpha}{j}.$$

Тому після деяких перетворень, одержуємо

$$K(k,\alpha) = K'(k,\alpha) + K''(k,\alpha) = \sum_{j=0}^{k-\alpha} \binom{k-\alpha}{j} + \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} - 4 = 2^{k-\alpha}+2^{\alpha}-4,$$

тобто формула (2.19) має місце.

Назвемо характеристичною точкою $(k-2)$-грані типу i $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)\subset\Pi_{kn}(G)$, що визначається множиною $\omega_1=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$, таку точку $o_2=(x_1, \ldots, x_k)$, координати якої задовольняють умовам

$$x_{\alpha_1} = \ldots = x_{\alpha_i}; \tag{2.20}$$

$$x_{\alpha_{i+1}} = \ldots = x_{\alpha_k}; \tag{2.21}$$

$$o_2 \in s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i). \tag{2.22}$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо такі координати точки

$o_2 \in s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$;

$$\alpha^* = x_{\alpha_t} = \left(\sum_{j=1}^{i} g_j\right) / i, \quad \forall t \in J_i, \tag{2.23}$$

$$\beta^* = x_{\alpha_t} = \left(\sum_{j=i+1}^{k} g_j\right) / (k-i), \quad \forall t \in J_k / J_i. \tag{2.24}$$

Назвемо характеристичним променем $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ загального переставного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ промінь, що починається в точці $o_1(t^*, \ldots, t^*)$ і проходить через характеристичну точку o_2 $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Позначимо цей промінь o_1o_2. Точку перетину променя o_1o_2 з $(k-1)$-сферою, що визначається теоремою 2.2, позначимо o_3. Не важко впевнитися, що координати точки $o_3 = (x'_1, \ldots, x'_k)$ задовольняють таким умовам:

$$x'_{\alpha_1} = \ldots = x'_{\alpha_i} = \alpha_1^*; \tag{2.25}$$

$$x'_{\alpha_{i+1}} = \ldots = x'_{\alpha_k} = \beta_1^*; \tag{2.26}$$

$$i\alpha_1^* + (k-i)\beta_1^* = g_1 + \ldots + g_k; \tag{2.27}$$

$$i(t^* - \alpha_1^*)^2 + (k-i)(t^* - \beta_1^*)^2 = r^2, \tag{2.28}$$

де r знаходиться з (2.4), а t^* – з (2.3).

Легко бачити, що при $\omega_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$, тобто якщо грань $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ задається системою рівнянь (2.1) і $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_i} = g_1 + \ldots + g_i$, з умов (2.27), (2.28) випливає:

$$\alpha_1^* = t^* - r\gamma, \tag{2.29}$$

$$\beta_1^* = t^* + r/(k\gamma) \tag{2.30}$$

при

$$\gamma = ((k-i) / (ki))^{1/2}, \tag{2.31}$$

де у випадку многогранника $\Pi_{kn}(G)$ r знаходиться з (2.4), а t^* – з (2.3), а якщо

$$G = \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{2.32}$$

тобто розглядається многогранник $\Pi_k(J_k)$, то α_1^*, β_1^* обчислюються за формулами (2.29), (2.30), в яких $t^* = 0{,}5(k+1)$;

$r=0,5((k-1)k(k+1)/3)^{1/2}$.

Теорема 2.13 [60,62]. Характеристичний промінь o_1o_2 $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ перпендикулярний до цієї грані, а ті точки множини E_{kn}, що належать $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, лежать на сім'ї $(k-2)$-сфер з центрами на промені o_1o_2.

Доведення. Запишемо рівняння характеристичного променя o_1o_2 $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ як прямої, що проходить через точки o_1 і o_2:

$$\frac{x_{\alpha_1}-t^*}{\alpha^*-t^*}=\ldots=\frac{x_{\alpha_i}-t^*}{\alpha^*-t^*}=\frac{x_{\alpha_{i+1}}-t^*}{\beta^*-t^*}=\ldots=\frac{x_{\alpha_k}-t^*}{\beta^*-t^*},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ визначаються рівнянням гіперплощини $x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_i}=g_1+\ldots+g_i$, яке з рівнянням (2.1) означають $(k-2)$-грань $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, числа t^*, α^*, β^* обчислюються за формулами (2.3), (2.23), (2.24) відповідно. Запишемо параметричні рівняння [71] $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ в координатах у вигляді $x_i=x_{i0}+\sum_{j=1}^{k-2}a_{ij}t_j$, де x_0 – довільна точка площини, $a_j=(a_{1j}, \ldots, a_{kj})$ – напрямні вектори, t_j – параметри площини $\forall j\in J_{k-2}$. Маємо

$$\begin{cases} x_{\alpha_1}=g_1+\ldots+g_i-x_{\alpha_2}-\ldots-x_{\alpha_i}; \\ x_{\alpha_2}=x_{\alpha_2}; \\ \ldots \\ x_{\alpha_i}=x_{\alpha_i}; \\ x_{\alpha_{i+1}}=g_{i+1}+\ldots+g_k-x_{\alpha_{i+2}}-\ldots-x_{\alpha_k}; \\ x_{\alpha_{i+2}}=x_{\alpha_{i+2}}; \\ \ldots \\ x_{\alpha_k}=x_{\alpha_k}, \end{cases}$$

де $t_1=x_{\alpha_2}, \ldots, t_{i-1}=x_{\alpha_i}, t_i=x_{\alpha_{i+2}}, \ldots, t_{k-2}=x_{\alpha_k}$ – параметри $(k-2)$-площини, в якій лежить грань $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $x_0=(g_1+\ldots+g_i, 0, \ldots, 0, g_{i+1}+\ldots+g_k, 0, \ldots, 0)$, а напрямні вектори мають вигляд

$$a_1=(-1,1,0,0,\dots,0);$$
$$a_2=(-1,0,1,0,\dots,0);$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{i-1}=(-1,0,\dots,0,1,0,\dots,0);$$
$$a_i=(0,\dots,0,-1,1,0,\dots,0);$$
$$a_{i+1}=(0,\dots,0,-1,0,1,0,0,\dots,0);$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{k-3}=(0,\dots,0,-1,0,\dots,0,1,0);$$
$$a_{k-2}=(0,\dots,0,-1,0,\dots,0,1),$$

тут на місці крапок серед координат стоять нулі. Напрямний вектор променя o_1o_2 має вигляд $a_0=(\alpha^*-t^*, \dots, \alpha^*-t^*, \beta^*-t^*, \dots, \beta^*-t^*)$. Зауважимо, що у векторах a_i $\forall i\in J^{\alpha}_{k-2}$, точці x_0 на місці i стоять координати, що відповідають x_{α_i} $\forall i\in J_k$.

Щоб промінь o_1o_2 був перпендикулярний $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$, необхідно і достатньо [71], щоб його напрямний вектор a_0 був перпендикулярний усім напрямним векторам a_i, $i\in J_{k-2}$, $(k-2)$-площини, в якій лежить грань $s(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$. Легко бачити, що

$$(a_0, a_j) = -(\alpha^* - t^*) + (\alpha^* - t^*) = 0 \quad \forall j\in J_{i-1};$$
$$(a_0, a_j) = -(\beta^* - t^*) + (\beta^* - t^*) = 0 \quad \forall j\in J_{k-2}\setminus J_{i-1},$$

тобто скалярні добутки всіх напрямних векторів $(k-2)$-площини з напрямним верктором променя o_1o_2 дорівнюють нулю. Отже, промінь перпендикулярний $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$.

Щоб довести другу частину теореми, обчислимо відстань ρ_1 від точки o_2 – основи перпендикуляру – до довільної точки $A\in E_{kn}$, $A\in s(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$:

$$\rho_1^2 = \rho^2(o_2, A) = \sum_{j=1}^{i} (g_j - \alpha^*)^2 + \sum_{j=i+1}^{k} (g_j - \beta^*)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} (g_i - (\sum_{t=1}^{i} g_t) / i)^2 + \sum_{j=i+1}^{k} (g_j - (\sum_{t=i+1}^{k} g_t)/(k-i))^2,$$

де α^{*}, β^{*} підставлені з (2.23), (2.24) відповідно. Оскільки $\rho_1(o_2,A)=\mathrm{const}$ для всіх точок A множини E_{kn}, що належать $(k-2)$-грані $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, то ці точки рівновіддалені від будь-якої точки променя o_1o_2, пендикулярного до $s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, що і доводить другу частину теореми.

Зауваження 2.2. Сфери, про які йдеться в теоремі 2.13, з центрами в точках o_1, o_2, o_3 мають радіуси відповідно r, ρ_1, ρ_2, де r обчислюється за формулою (2.4), $\rho_1=\rho(o_2,A)$ обчислено при доведенні теореми, а $\rho_2=\rho(o_3,A)$, $A\in E_{kn}$, $A\in s(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, обчислюється за формулою

$$\rho_2 = \left(\sum_{j=1}^{i} (g_j - \alpha_1^{*})^2 + \sum_{j=i+1}^{k} (g_j - \beta_1^{*})^2\right)^{1/2}$$

або підставляючи з (2.29), (2.30) α_1^{*}, β_1^{*} отримуємо

$$\rho_2 = \left(\sum_{j=1}^{i} (g_j - t^{*} + r\gamma)^2 + \sum_{j=i+1}^{k} (g_j - r/(k\gamma))^2\right)^{1/2},$$

де t^{*}, r, γ обчислюються відповідно за формулами (2.3), (2.4), (2.31).

Легко бачити, що для $E_k(J_k)$

$$\rho_1 = (k(k+1)(2k+1)/6 - i(i+1)^2/4 - (k+i+1)(k-i)/4)^{1/2},$$

$$\rho_2 = ((k-1)k(k+1)/6 - k((k+1)(k-i)i(k-i)/12)^{1/2})^{1/2},$$

або, використовуючи значення радіуса $r = 0.5((k-1)k(k+1)/3)^{1/2}$ $(k-1)$-сфери:

$$\rho_1 = (r^2 - ki(k-i)/4)^{1/2};$$

$$\rho_2 = (2r^2 - r(ki(k-i))^{1/2})^{1/2}.$$

В [3, 72] розглянуті питання розкладності множини E_{kn} по сім'ях паралельних гіперплощин. Далі розглядається підхід до розкладення множини E_{kn} по $(k-2)$-площинах. Проаналізуємо випадок множини E_k.

Теорема 2.14 [60, 62]. Кожна нерівність i-сполки системи (2.5) породжує множину $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, що містить не більше $\binom{k}{i}$

паралельних між собою $(k-2)$-площин, які означаються системою рівнянь, що складається з (2.1) і рівняння

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j} , \tag{2.33}$$

де $\alpha_j, \beta_j \in J_k, \alpha_t \neq \alpha_j, \beta_t \neq \beta_j$ при $t \neq j$, $t, j \in J_i, i \in J_{k-1}$.

<u>Доведення.</u> Якщо дві різні $(k-2)$-площини H_1^i, H_2^i, що лежать в одній множині $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, відрізняються тільки правою частиною рівняння (2.33), то їх паралельність очевидна. Дійсно, якщо перейти від рівнянь $(k-2)$-площин H_1^i, H_2^i у вигляді відповідно

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = g_1 + \ldots + g_k ; \\ x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_i} = g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_i} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = g_1 + \ldots + g_k ; \\ x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_i} = g_{\gamma_1} + \ldots + g_{\gamma_i} , \end{cases}$$

де $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in J_k, \alpha_t \neq \alpha_j ; \beta_t \neq \beta_j ; \gamma_t \neq \gamma_j$ при $t \neq j$, $t, j \in J_i$, $i \in J_{k-1}$, до їх параметричних рівнянь, то для H_1^i маємо:

$$\begin{cases} x_{\alpha_1} = g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_i} - x_{\alpha_2} - \ldots - x_{\alpha_i} ; \\ x_{\alpha_2} = x_{\alpha_2} ; \\ \ldots \\ x_{\alpha_i} = x_{\alpha_i} ; \\ x_{\alpha_{i+1}} = g_{\beta_{i+1}} + \ldots + g_{\beta_k} - x_{\alpha_{i+2}} - \ldots - x_{\alpha_k} ; \\ x_{\alpha_{i+2}} = x_{\alpha_{i+2}} ; \\ \ldots \\ x_{\alpha_k} = x_{\alpha_k} ; \end{cases}$$

а для H_2^i – такі ж рівняння, де замість g_{β_t} стоять g_{γ_t} $\forall t \in J_k$. Тому $(k-2)$-площини H_1^i, H_2^i мають однакові напрямні вектори a_i, $\forall i \in J_{k-2}$. (Координати векторів a_i, $\forall i \in J_{k-2}$ виписані при доведенні теореми 2.13). Це означає [71] паралельність довільних $(k-2)$-площин $H_1^i, H_2^i \in D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$.

5[x]

Кількість $(k-2)$-площин, що породжуються однією нерівністю i-ї спілки системи (2.5) з лівою частиною $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_i}$, дорівнює кількості способів вибору доданків суми $g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_i}$, що стоїть у правій частині (2.33). Кількість різних наборів $g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_i}$ дорівнює кількості сполучень з k елементів по i: $\binom{k}{i}$. Але суми, які складаються з цих наборів, можуть бути рівними, це залежить від мультимножини G та конкретних наборів вигляду $g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_i}$. В цих випадках площини пристають, тому $|D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)| \leq \binom{k}{i}$. Твердження доведено.

Зазначимо, що справедлива рівність

$$D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = D_{k-i}(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k) \quad \forall i \in J_{k-1}. \qquad (2.34)$$

<u>Теорема 2.15</u> [60, 62]. Нехай

$$D = \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{\alpha} D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i),$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Тоді $|D| \leq \binom{2k}{k}/2 - 1$.

<u>Доведення.</u> Справедливість цієї формули випливає з твердження 2.14 і того факту, що i-та спілка нерівностей системи (2.5) містить $\binom{k}{i}$ обмежень. Дійсно, кожна i-та спілка породжує $|\bigcup_{\alpha} D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)|$ $(k-2)$-площин вигляду (2.1), (2.33), де $|\bigcup_{\alpha} D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)| = \binom{k}{i} |D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)|$, а $|D| = 0{,}5 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} |D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)|$. (Поява коефіцієнта 0,5 пояснюється (2.34)). Скориставшись твердженням 2.14, одержимо

$$|D| \leq \left(\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i}^2 \right) /2 = \binom{2k}{k}/2 - 1,$$

що і треба було довести.

<u>Означення 2.2</u> [60, 62]. Назвемо $(k-2)$-площину (2.1), (2.33) з довільної множини $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ $(k-2)$-площиною кратності $\varkappa$, якщо є рівно $\varkappa$ i-вибірок з мультимножини G, що породжує E_k таких, що суми елементів цих вибірок рівні між собою і рівні

$\sum_{j=1}^{i} g_{\beta_j}$.

Очевидно, що множини $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $i \in J_{k-1}$, породжувані нерівностями однієї спілки системи (2.5), мають однакові кількості $(k-2)$-площин рівної кратності.

<u>Зауваження 2.3.</u> Якщо кожну $(k-2)$-площину кратності $\varkappa$ розглядати як $\varkappa$ $(k-2)$-площин кратності 1, вважаючи, що $\varkappa$ різним наборам, які утворюють суми в правій частині (2.33), при рівних сумах відповідають $\varkappa$ різних $(k-2)$-площин кратності 1 (а не одна площина кратності $\varkappa$), тоді зрозуміло, що у кожній i-й спілці кожна нерівність породжує рівно $\binom{k}{i}$ $(k-2)$-площин кратності 1, $i \in J_{k-1}$, а загальна їх кількість $|D^*|$ визначається так:

$$|D^*| = \binom{2k}{k}/2 - 1, \qquad (2.35)$$

де D^* – множина всіляких $(k-2)$-площин вигляду (2.1), (2.33) кратності 1. Таким чином, справедливо наступне твердження.

<u>Теорема 2.16</u> [80, 82]. Сума кратностей $(k-2)$-площин вигляду (2.1), (2.33), що породжені а) любою нерівністю i-ї спілки нерівностей системи (2.5), дорівнює $\binom{k}{i}$, $i \in J_{k-1}$; б) усіма нерівностями i-ї спілки – $\binom{k}{i}^2$, $i \in J_{k-1}$; в) усіма нерівностями спілок i $\forall i \in J_{k-1}$ – $|D^*|$, що обчислюється за формулою (2.35).

<u>Теорема 2.17</u> [80, 82]. Кожна $(k-2)$-площина $H_j^i \in D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ кратності $\varkappa_j^i$ містить точно $(k-i)!\,i!\,\varkappa_j^i$ точок множини E_k $\forall i \in J_{k-1}$ $\forall j \in J_t$, де $t = |D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)|$.

<u>Доведення.</u> Нехай $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_k$. Тоді кожна невідома у лівій частині (2.33) може набувати значення однієї з констант, що утворюють суму у правій частині цього рівняння. Таких можливостей для одного набору, який складає суму в правій частині (2.33), є $i!$. Зрозуміло, що змінні, які стоять у лівій частині (2.1) і залишилися при цьому невизначеними, можуть визначитися $(k-i)!$ способами. А так як $(k-2)$-площина H_j^i $(i \in J_{k-1}, j \in J_t)$, що розглядаєть-

ся, має кратність x_j^i, то одна й та ж за значенням сума, яка стоїть у правій частині (2.33), може бути отримана x_j^i способами. Таким чином, на H_j^i лежить $x_j^i(k-i)!i!$ точок множини E_k, $i\in J_{k-1}$, $j\in J_t$, що і треба було довести.

Позначимо $E(H_j^i)\subset E_k$ – підмножину тих точок з E_k, які лежать на $(k-2)$-площині H_j^i, $i\in J_{k-1}$, $j\in J_t$. Наступна теорема установлює розкладність множини E_k по любій сім'ї $\{H_j^i\ \forall j\in J_t\}=D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ паралельних $(k-2)$-площин H_j^i, $\forall i\in J_{k-1}$, $\forall j\in J_t$.

Теорема 2.18 [60, 62]. Справедливе співвідношення

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{t} E(H_j^i)\quad \forall i\in J_{k-1}. \tag{2.36}$$

Доведення. Позначимо t_j^i – кількість точок множини E_k, які лежать на $(k-2)$-площині H_j^i, $i\in J_{k-1}$, $j\in J_t$. Нехай, як і раніше, x_j^i – кратність $(k-2)$-площини H_j^i, $i\in J_{k-1}$, $j\in J_t$. Тоді, використовуючи теорему 2.17, можемо записати

$$\sum_{j=1}^{t} t_j^i = (k-i)!\,i!\sum_{j=1}^{t} x_j^i . \tag{2.37}$$

В силу твердження 2.16, $\sum_{j=1}^{t} x_j^i = \binom{k}{i}$, тому (2.37) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{t} t_j^i = k! . \tag{2.38}$$

А в силу того, що $|E_k|=k!$ і взаємно однозначності відображення f (означення 1.2), паралельності $(k-2)$-площин H_j^i, $i\in J_{k-1}$, $j\in J_t$ (твердження 2.14) і рівності (2.38), маємо справедливість рівності (2.36), що і треба було довести.

Як видно з системи (2.1), (2.33), усі $(k-2)$-площини з множини $D_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ лежать в гіперплощині (2.1), $i\in J_{k-1}$. Це дозволяє будувати в'язки гіперплощин в R^k, які мають властивості відповідних $(k-2)$-площин. Для цього гіперплощини будують так, щоб кожна з них містила по одній $(k-2)$-площині вигляду (2.1), (2.33). Якщо додатково зажадати, щоб ці гіперплощини були перпендикулярні гіперплощині (2.1), то отримаємо сім'ю гіперплощин, що розглянута в [3, 72].

Зазначимо, що теореми відносно розкладності аналогічні розглянутим для множини E_k легко довести і для множини E_{kn}. Але зараз на цьому зупинятися не будемо, тому що ці твердження можна розглядати як наслідок результатів, які будуть викладені далі в підрозд. 2.3

2.2. Властивості загальної множини поліпереставлень

Розглянемо опуклу оболонку загальної поліпереставної множини $E^s_{kn}(G,H)$ $\Pi^s_{kn}(G,H)=\mathrm{conv}E^s_{kn}(G,H)$. Якщо далі при викладі не буде потреби підкреслювати значення параметрів k, n, s, будемо використовувати також позначення $E(G,H)=E^s_{kn}(G,H)$ та $\Pi(G,H)=\Pi^s_{kn}(G,H)$.

Нехай $G^{K_i}\subset G$ – k_i-елементна мультимножина ($k_i=|K_i|$ $\forall i\in J_s$), що утворена елементами G $g_1^{K_i},\dots,g_{k_i}^{K_i}$ з номерами з множини K_i, k_1+ $+\dots+k_s=k$. Упорядкуємо, не порушуючи спільності подальших міркувань, компоненти мультимножини G^{K_i}

$$g_1^{K_i}\geq g_2^{K_i}\geq\dots\geq g_{k_i}^{K_i}.$$

Покладемо

$$N_i'=\{(\sum_{j=1}^{i-1}k_j)+1,\ (\sum_{j=1}^{i-1}k_j)+2,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{i}k_j\}\ \forall i\in J_s.$$

<u>Теорема 2.19.</u> Множина $\Pi(G,H)$ визначається сукупністю всіх розв'язків системи

$$\begin{cases}\sum\limits_{j\in N_i'}x_j=\sum\limits_{j=1}^{k_i}g_j^{K_i}\ \ \forall i\in J_s;\\[2ex] \sum\limits_{j\in\omega^i}x_j\leq\sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|}g_j^{K_i}\ \ \forall\omega^i\subset N_i'\ \ \forall i\in J_s.\end{cases}\tag{2.39}$$

<u>Доведення.</u> Виберемо число ε, що задовольняє співвідношенню

$$0 < \varepsilon < \Big(\min_{\substack{i,j \in J_n \\ i \neq j}} |e_i - e_j| \Big) / \mu ,$$

де $\mu = \max_{1 \le i \le n} \{\eta_i\}$, а η_i – кратність елемента e_i у мультимножині G. Не порушуючи спільності подальших міркувань, можна вважати, що $g_1 \ge \ldots \ge g_k$, $g_i \in G$ $\forall i \in J_k$. Розглянемо множину G^{ε}, яка будується з елементів мультимножини G таким чином: $g_1^{\varepsilon} = g_1$, $g_t^{\varepsilon} = g_t$, якщо $g_t \neq g_{t-1}$. У противному разі $g_t^{\varepsilon} = g_{t-1}^{\varepsilon} - \varepsilon$, $\forall t \in J_k \setminus \{1\}$. Очевидно, що $g_1^{\varepsilon} > \ldots > g_k^{\varepsilon}$. Нехай $g_1^{K_i,\varepsilon} > \ldots > g_{k_i}^{K_i,\varepsilon}$, де $G^{K_i,\varepsilon} = \Big\{ g_1^{K_i,\varepsilon}, \ldots, g_{k_i}^{K_i,\varepsilon} \Big\}$ – k_i-елементна множина ($k_i = |K_i|$ $\forall i \in J_s$), що утворена елементами множини G^{ε} з номерами з множини K_i. Тоді на основі теореми 1 з [73] можна стверджувати, що многогранник $\Pi(G^{\varepsilon}, H)$ означається системою співвідношень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in N_i'} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i,\varepsilon} \quad \forall i \in J_s ; \\ \sum\limits_{j \in \omega^i} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{K_i,\varepsilon} \quad \forall \omega^i \subset N_i' \quad \forall i \in J_s . \end{cases} \tag{2.40}$$

Здійснимо граничний перехід, спрямувавши $\varepsilon \to 0$. За побудовою $g_j^{K_i,\varepsilon} \to g_j^{K_i}$, многогранник $\Pi(G^{\varepsilon}, H)$ переходить в $\Pi(G, H)$, а з системи (2.40) для $\Pi(G^{\varepsilon}, H)$ одержуємо систему (2.39) для $\Pi(G, H)$, що і треба було довести.

Назвемо спілкою $(i, |\omega^i|)$ нерівностей системи (2.39) сукупність нерівностей цієї системи з фіксованими значеннями пари чисел $i, |\omega^i|$ $\forall \omega^i \subset N_i'$ $\forall i \in J_s$.

Нехай мультимножина $G^{K_i} = \{g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}\}$ має основу $S(G^{K_i}) = \{e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i\}$, первинну специфікацію $[G^{K_i}] = \{p_1^i, \ldots, p_{n_i}^i\}$, $p_1^i + \ldots + p_{n_i}^i = k_i$. Нехай $g_j^{K_i} \ge g_{j+1}^{K_i}$ $\forall j \in J_{k_i - 1}$, $i \in J_s$. Якщо $p_1^i > 1$, то очевидно, що в цьому випадку при виконанні нерівностей спілки $(j, 1)$ виконуються і нерівності сплок $(j,2), \ldots, (j,p_1^i)$. Дійсно, так як $x_q \leq g_1^{K_i}$, то $x_q + x_m \leq g_1^{K_i} + g_1^{K_i}$ $(\forall q,m \in \omega^i \subset N_i', \ i \in J_s)$ і так далі, $\sum\limits_{q=1}^{p_1^i} x_{\alpha_q} \leq p_1^i g_1^{K_i}$, $\alpha_q \in \omega^i \subset N_i'$, $i \in J_s$. Тобто в системі (2.39), що описує $\Pi(G,H)$, можна залишити нерівності сплок $(i,1)$, (i, p_1^i+1), $(i,p_1^i+2), \ldots,$ (i,k_i-1). Аналогічні міркування можна провести і у випадку, коли $p_{n_i}^i > 1$.

Многогранник $\Pi(G,H)$ будемо називати загальним (на відміну від випадку $\Pi(G^e,H)$, коли G^e – множина) многогранником евклідової *поліпереставної множини з повтореннями*, або загальним поліпереставним многогранником.

Нехай M_i є d_i-вимірним многогранником $\forall i \in J_s$. Як відомо (дивись, наприклад [69]), під добутком многогранників $M_1, \ldots, M_s$ розуміють множину $\mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} M_i = \{x \in R^{d_1+\ldots+d_s} \mid x=(x_1,\ldots,x_s),\ x_i \in M_i$ $\forall i \in J_s\}$. Далі нам буде потрібна наступна лема [74], що приводиться згідно [73].

<u>Лема 2.20.</u> 1) Добуток многогранників є многогранником; 2) $\dim(\mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} M_i) = \sum\limits_{i=1}^{s} \dim M_i$, де $\dim A$ – вимірність множини A; 3) k-вимірні грані многогранника $\mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} M_i$ утворюють множину з елементами вигляду $\mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} F_i$, де F_i – є k_i-вимірна грань многогранника M_i та $k_1+\ldots+k_s=k$.

Позначимо n_i кількість елементів основи мультимножини $\bar{G}^{K_i} = \{g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}\}$.

<u>Теорема 2.21.</u> $\Pi(G,H) = \mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$.

<u>Доведення.</u> Як випливає з системи (2.5), $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, $i \in J_s$, – це многогранник, що визначається системою

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in N_i'} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i} \;; \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{K_i} \quad \forall \omega^i \subset N_i' . \end{cases} \qquad (2.41)$$

Розглянемо добуток всіх s d_i-вимірних многогранників $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$. За означенням добутку многогранників $\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i}) = \{x \in R^{d_1+\ldots+d_s} \mid x=(x_1, \ldots, x_s), x_i \in \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i}) \; \forall i \in J_s\}$, тобто $x \in \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$ задовольняє кожній з s систем вигляду (2.41) $\forall i \in J_s$. Очевидно, що система (2.39) містить усі системи (2.41) $\forall i \in J_s$. Таким чином, якщо $x \in \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, то $x \in \Pi(G,H)$, і навпаки, що і треба було довести.

Теорема 2.22. Множина $E(G,H)$ збігається з множиною вершин многогранника $\Pi(G,H)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що $E(G,H) \subset \Pi(G,H)$. Нехай $g(\pi) \in E(G,H)$. За означенням множини $E(G,H)$ $g(\pi) = (g_{\pi^1}, \ldots, g_{\pi^i}, \ldots, g_{\pi^s})$, де $\pi^i = (\pi_{i1}, \ldots, \pi_{ik_i})$ - переставлення елементів множини K_i, а $g_{\pi^i} = (g_{\pi_{i1}}, \ldots, g_{\pi_{ik_i}})$ - переставлення елементів мультимножини $G^{K_i} = \{g_1^{K_i}, \ldots, g_{k_i}^{K_i}\}$. Тобто $g_{\pi^i} \in E_{k_i n_i}(G^{K_i})$, отже, за теоремою 2.4 $g_{\pi^i} \in \mathrm{vert}\, \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$. Утворимо множину $F = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} F_i$, де $F_i = g_{\pi^i}$ - вершини $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$. Очевидно, що $F = g(\pi)$. За теоремою 2.21 $\Pi(G,H) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, тому за лемою 2.20 (пункт 3)) $g(\pi)$ - нульмірна грань (вершина) многогранника $\Pi(G,H)$. Таким чином, в силу довільності $g(\pi) \in E(G,H)$ ми одержуємо справедливість включення $E(G,H) \subset \mathrm{vert}\, \Pi(G,H)$.

Протилежне включення $\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)\subset E(G,H)$ доводиться у зворотному порядку. Нехай $g(\pi)\in\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$. За теоремою 2.21 $\Pi(G,H)=\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}}\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, а за лемою 2.20 (пункт 3)) $g(\pi)=\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} g_{\pi^i}$, де g_{π^i} – вершини многогранника $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$. Згідно з теоремою 2.24, $g_{\pi^i}\in\mathrm{vert}\,\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, тому $g_{\pi^i}\in E_{k_i n_i}(G^{K_i})$, тобто g_{π^i} має вигляд $g_{\pi^i}=(g_{\pi_{i1}},\ldots,g_{\pi_{ik_i}})$. Підставляючи g_{π^i} у цьому вигляді у попередній добуток, що дорівнює $g(\pi)$, одержуємо $g(\pi)=(g_{\pi^1},\ldots,g_{\pi^s})$, що за означенням множини $E(G,H)$ дає можливість записати $g(\pi)\in E(G,H)$. В силу довільності $g(\pi)\in\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ маємо $\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)\subset E(G,H)$. Об'єднуючи це і протилежне доведене раніше включення, одержуємо $E(G,H)=\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$, що і треба було довести.

Теорема 2.23. Вершина $g(\pi)\in\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ є суміжною до вершини $g(\sigma)\in\mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ тоді і тільки тоді, коли $g(\sigma)$ утворюється з $g(\pi)$ переставленням двох нерівних одна одній компонент – $g_j^{K_i}$ та $g_{j+1}^{K_i}$, $j\in J_{k_i-1}$, $i\in J_s$.

Доведення. У випадку, коли G – множина, аналогічна теорема обгрунтована у [73]. Тому для вершин многогранника $\Pi(G^{\varepsilon},H)$, що описується системою (2.40) і розглянутий при доведенні теореми 2.19, вона справедлива. Якщо здійснити граничний перехід, спрямувавши $\varepsilon\to 0$, то суміжні вершини у многограннику $\Pi(G^{\varepsilon},H)$ перейдуть в суміжні в многограннику $\Pi(G,H)$, при умові, що $g_j^{K_i}\neq g_{j+1}^{K_i}$, $\forall j\in J_{k_i-1}$ $\forall i\in J_s$. В протилежному випадку $g(\sigma)=g(\pi)$, що і доводить теорему.

Теорема 2.24. Точки множини $E(G,H)$ належать $(k-2)$-сфері $W\subset R^k$, що описується системою з рівняння (2.1) і

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-t^*)^2=r^2, \qquad (2.42)$$

де t^*, r обчислюються за формулами (2.3), (2.4) відповідно.

Доведення. Очевидно, що $E(G,H)\subset E_{kn}(G)$. Множина $E_{kn}(G)$ згідно

6*

з теоремою 2.2 лежить на $(k-2)$-сфері w, що описується системою (2.I), (2.42). Що і доводить справедливість теореми.

Теорема 2.25. Точки множини $E(G,H)$ лежать на еліптичному циліндрі з $(k-2)$-основою, який задається рівнянням

$$\sum_{j\in N_i'} (x_j - t_i^*)^2 = r_i^2, \quad i\in J_s, \tag{2.43}$$

де $t_i^* = \left(\sum_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i}\right) / k_i$; $r_i = \left(\sum_{j=1}^{k_i} (g_j^{K_i} - t_i^*)^2\right)^{1/2}$.

Лема 2.26. Вписаний в $(n-1)$-сферу S_{n-1} n-многогранник M_n перерізається з S_{n-1} в вершинах $\mathrm{vert}M_n$ цього многогранника і тільки в них.

Доведення. Те, що $S_{n-1}\cap M_n \subset \mathrm{vert}M_n$, очевидно. Доведення протилежного включення $S_{n-1}\cap M_n \subset \mathrm{vert}M_n$ проведемо методом математичної індукції. Позначимо O_1 - центр S_{n-1}, r_{n-1} - її радіус, $A,B\in \mathrm{vert}M_n$, $X\in M_n$.

Розглянемо випадок $n=2$, тобто коли S_1 - коло, 2-многогранник M_2 - многокутник. Нехай O_1O_3 - радіус кола S_1, перпендикулярний стороні AB многокутника M_2 (дивись рис. I), яку перетинає промінь O_1X, де X довільна точка M_2, що лежить на S_1. Точку перетину O_1O_3 з AB позначимо O_2. Можливі три положення X в M_2: I) $X\in \mathrm{vert}M_n$ (тобто $X=A$, або $X=B$), в цьому випадку лема справедлива; 2) $X\in AB$, позначимо тут A вершину M_2 на стороні AB найближчу до X. З прямокутних трикутків O_1O_2X, O_1O_2A, так як $OA_1=r_1$, $O_1X=r_1$ випливає $AX=0$, тобто $A=X\in \mathrm{vert}M_2$. 3) $X\in \mathrm{int}M_2$, $X\in S_1$. Точку перетину променя O_1X з AB позначимо O_4 (дивись рис. 2). Випадок $O_4=A$: при цьому $O_1O_4=O_1A=r_1$ та $O_1X=r_1$, тобто $O_1X=O_1A=r_1$, що означає $X=A$. Тепер нехай $O_4\neq A$. З одного боку $O_1O_4>O_1X$ ($X\in \mathrm{int}M_2$, а $O_4\in AB$ - сторона M_2), а тому, що $X\in S_1$, $O_1X=r_1$ випливає $O_1O_4>r_1$. З другого боку, так як $O_4\neq A$, то з прямокутних трикутників $O_1O_2O_4$, O_1O_2A маємо $O_1O_4=((O_1O_2)^2+(O_2O_4)^2)^{1/2}$; $O_1A=((O_1O_2)^2+(O_2A)^2)^{1/2}$. Так як $O_2A>O_2O_4$, то $O_1O_4<O_1A=r_1$. Отримали протиріччя: $O_1O_4<r_1$, $O_1O_4>r_1$, тобто припущення $O_4\neq A$ не вірно. І, отже, $O_4=A$, що тягне за собою $A=X$, тобто $X\in vertM_2$.

Таким чином, при $n=2$ лема справедлива, бо вірне включення $S_1\cap M_2\subset vertM_2$.

Припустимо, що це включення справедливе у випадку $n=m-1$, тобто $S_{m-2}\cap M_{m-1}\subset vertM_{m-1}$, і доведемо його справедливість у випадку $n=m$.

Нехай S_{m-1} – $(m-1)$-сфера з центром в точці O_1, радіусом r_{m-1}, в яку вписаний m-многогранник M_m, точка $X\in S_{m-1}$, $X\in M_m$. Покажемо, що $X\in vertM_m$. Так як $X\in M_m$, то розглянемо три випадки розташування X відносно M_m. 1) $X\in vertM_m$; 2) X належить i-грані ($i>0$) многогранника M_m; 3) $X\in intM_m$. У випадку 1) включення виконується. У випадку 2) візьмемо гіпергрань $M_{m-1}\ni X$. Опустимо перпендикуляр з O_1 на M_{m-1} (рис. 3). Позначимо O_2 точку перетину цього перпендикуляра з гранню M_{m-1}, і нехай $A\in M_{m-1}$ – довільна вершина M_m. Так як $X\in S_{m-1}$, то $O_1X=r_{m-1}$. Розглянемо трикутники XO_2O_1, AO_2O_1. Вони прямокутні. Так як O_1O_2 – загальний катет, а гіпотенузи рівні $O_1X=O_1A=r_{m-1}$, то $O_2X=O_2A=r_{m-2}$. Тобто ми одержали те, що для $(m-1)$-многогранника M_{m-1}, вписаного в сферу S_{m-2} з радіусом r_{m-2} і центром в точці O_2, точка X задовольняє умовам: $X\in M_{m-1}$, $X\in S_{m-2}$.

Зазначимо, що вписаність M_{m-1} в S_{m-2} випливає з наступного. В допущенні, що $A,B\in vertM_{m-1}$, з прямокутних трикутників AO_1O_2, BO_1O_2, що мають один і той же катет O_1O_2, а також в силу вписаності M_m в S_{m-1} і того, що $vertM_{m-1}\subset M_m$, і отже $O_1A=O_1B=r_{m-1}$, одержуємо $O_2A==O_2B=r_{m-2}$.

Отже, згідно з методом математичної індукції припущення індукції для $n=m-1$ вірно, тому $X\in vertM_{m-2}$. Але так як

$vertM_{m-2} \subset vertM_{m-1}$, то $x \in vertM_{m-1}$ і в силу довільності $x \in S_{m-1} \cap M_m$ у випадку 2) маємо справедливість включення $S_{m-1} \cap M_m \subset vertM_m$.

Розглянемо випадок 3), коли $x \in intM_m \cap S_{m-1}$ (дивись рис. 4). Проведемо промінь O_1x до перетину з деякою гіпергранню многогранника M_{m-1} в точці O_4. На цю гіпергрань опустимо перпендикуляр O_1O_2, $O_2 \in M_{m-1}$. Розглянемо прямокутні трикутники $O_1O_2O_4$, O_1O_2A, де $O_2O_4 = ((O_1O_4)^2 - (O_1O_2)^2)^{1/2}$, $O_2A = ((O_1A)^2 - (O_1O_2)^2)^{1/2}$. Так як $O_1O_4 = r_{m-1} + xO_4$, а $O_1A = r_{m-1}$, то $O_2O_4 > O_2A = r_{m-2}$, де r_{m-2} - радіус сфери S_{m-2} з центром в точці O_2, описаної навколо M_{m-1}. (Доведення, що M_{m-1} вписаний в S_{m-2}, проводиться як у випадку 2)). Але так як $O_4 \in M_{m-1}$, то $O_2O_4 \leq r_{m-2}$, отримали протиріччя з нерівністю $O_2O_4 > r_{m-2}$. Отже припущення, що $x \in intM_m$, не вірно. Отже $x \notin intM_m$, а це розглянуто вище. Таким чином, при $n=m$ припущення індукції доведено, тобто включення $S_{m-1} \cap M_m \subset vertM_m$ справедливо. Це доводить його для довільного n: $S_{n-1} \cap M_n \subset vertM_n$. Об'єднуючи це включення з очевидним протилежним включенням одержуємо $S_{n-1} \cap M_n = vertM_n$, що і треба було довести.

<u>Теорема 2.27.</u> Точки множини $E(G,H)$ і тільки вони задовольняють системам обмежень, що складаються з (2.39), та (2.42); з (2.39) та s рівнянь $(\forall i \in \overline{J_s})$ (2.43).

<u>Доведення.</u> Перша частина доводиться як наслідок леми 2.26 для множини $\overline{E}(G,H)$, що за теоремою 2.22 збігається з множиною $vert\overline{\Pi}(G,H)$. За теоремою 2.19 многогранник $\Pi(G,H)$ визначається системою (2.39), а з теореми 2.24 маємо, що $vert\Pi(G,H) \subset W$, де W - сфера, що визначається рівняннями (2.42), (2.1). Враховуючи, що рівняння (2.1) належать системі (2.39), одержуємо справедливість твердження, що точки множини $E(G,H)$ і тільки вони задовольняють системі з (2.39) та (2.42).

Для доведення другої частини теореми розглянемо многогранник

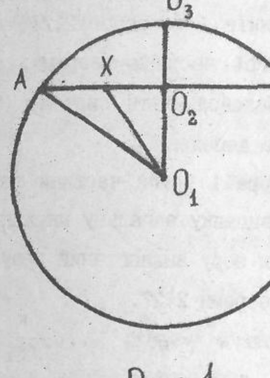


Рис.1

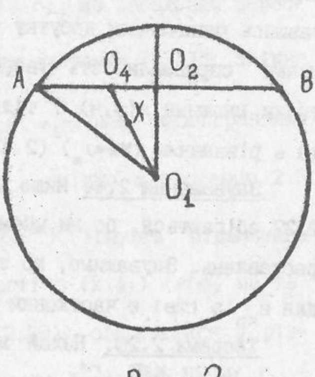


Рис.2

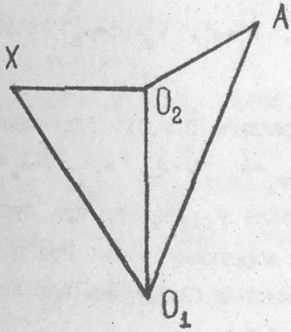


Рис.3

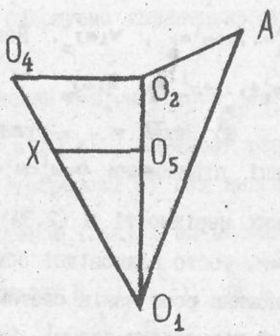


Рис.4

$\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, який згідно з теоремами 2.4 і 2.2 вписаний в сферу, що задається системою з рівняння (2.43) і рівняння з системи (2.41). З леми 2.26 маємо, що точки множини $E_{k_i n_i}(G^{K_i})=$ $=\mathrm{vert}\,\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$ і тільки вони задовольняють системі обмежень, що складається з (2.41) і (2.43) при фіксованому $i\in J_s$. Далі, скориставшись означенням добутку многогранників і теоремою 2.21, отримуємо справедливість твердження другої частини теореми, тобто точки множини $E(G,H)$ і тільки вони задовольняють системі (2.39) та рівнянням $(\forall x\in J_s)$ (2.43). Теорема доведена.

Зауваження 2.4. Якщо $s=1$, то перша і друга частини теореми 2.27 збігаються, бо ми маємо в цьому випадку загальну множину переставлень. Зауважимо, що з цієї точки зору аналогічний результат для E_{kn} з [75] є частковим випадком теореми 2.27.

Теорема 2.28. Нехай мультимножина $G^{K_i}=\{g_1^{K_i},\ldots,g_{k_i}^{K_i}\}$, де $g_1^{K_i}\geq\ldots\geq g_k^{K_i}$, $\forall i\in J_s$, має основу $S(G^{K_i})=\{e_1^i,\ldots,e_{n_i}^i\}$, де $e_1^i>$ $>\ldots>e_{n_i}^i$, $\forall i\in J_s$; та первинну специфікацію $[G^{K_i}]=\{p_1^i,\ldots,p_{n_i}^i\}$, $p_1^i+\ldots+p_n^i=k_i$, $\forall i\in J_s$. Нехай $k_0^i=0$, $k_1^i=p_1^i$, $k_2^i=p_1^i+p_2^i$, $\ldots$, $k_{n_i}^i=$ $=p_1^i+\ldots+p_{n_i}^i=k_i$ $\forall i\in J_s$.

а) Нехай F – m-грань многогранника $\Pi(G,H)$. Тоді знайдуться такі підмножини $\emptyset=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset\ldots\subset\omega_{k_i-m_i}^i=N_i'$ $\forall i\in J_s$, $m_1+\ldots+m_s=m$, для яких нерівності з (2.39) обертаються у рівності при будь-якому $x\in F$, тобто відповідні обмеження є жорсткими для F. При цьому F – множина розв'язків системи, одержаної з (2.39) заміною нерівностей рівностями для $\omega_{\sigma_i}^i$ $\forall\sigma_i\in J_{k_i-m_i}^0$ $\forall i\in J_s$.

б) Якщо для підмножин $\emptyset=\omega_0^i\subset\omega_1^i\subset\ldots\subset\omega_{q_i}^i=N_i'$ $\forall i\in J_s$ нерівності в (2.39) замінити рівностями, то множина F розв'язків одержаної системи ε m-гранню многогранника $\Pi(G,H)$, де $m=m_1+\ldots+m_s$, а $m_i=k_i-(q_i-\Sigma(|\omega^i_{\sigma_i}|-|\omega^i_{\sigma_i-1}|-1))$ і підсумовування провадиться по всіх індексах $\sigma_i\in J_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in J_{n_i}$, що $k^i_{j-1}\leqslant|\omega^i_{\sigma_i-1}|$ та $|\omega^i_{\sigma_i}|\leqslant k^i_j$ (вважаємо, що $|\omega^i_0|=0$), $\forall i\in J_s$.

Доведення. Доведемо а). Нехай F – m-грань многогранника $\Pi(G,H)$. За теоремою 2.21 $\Pi(G,H)=\overset{s}{\underset{i=1}{\circledast}}\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, де загальний переставний многогранник $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$ описується системою (2.41). Згідно з лемою 2.20 m-грань $F=\overset{s}{\underset{i=1}{\circledast}}F_i$, де F_i – m_i-грань многогранника $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, $m_1+\ldots+m_s=m$. Зафіксуємо $i\in J_s$, згідно з теоремою 2.5 для m_i-грані F_i многогранника $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$ існують підмножини $\emptyset=\omega^i_0\subset\omega^i_1\subset\ldots\subset\omega^i_{k_i-m_i}=N'_i$, для яких нерівності з (2.41) (або, що те саме для раніше зафіксованого i, – з (2.39)) обертаються у рівності для будь-якого $x^i\in F_i$, де $x=(x^1,\ \ldots,\ x^s)$. При цьому F_i – множина розв'язків системи, що отримана з (2.39) заміною нерівностей рівностями при $\omega^i=\omega^i_{\sigma_i}$ $\forall\sigma_i\in J^o_{k_i-m_i}$, $\forall i\in J_s$. Оскільки викладене вірно $\forall i\in J_s$ та $x=(x^1,\ \ldots,\ x^s)$, то одержуємо справедливість частини а) теореми.

Доведемо частину б). Нехай для підмножин $\emptyset=\omega^i_0\subset\omega^i_1\subset\ldots\subset\omega^i_{q_i}=N'_i$ $\forall i\in J_s$ нерівності в (2.39), або те саме в (2.41), замінені рівностями. Це означає для любого $i\in J_s$ (за теоремою 2.5) для многогранника $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, який описується системою (2.41), що множина розв'язків F_i одержаної системи ε m_i-гранню $\Pi_{k_i n_i}(G^{K_i})$, де $m_i=k_i-(q_i+\Sigma(|\omega_{\sigma_i}|-|\omega_{\sigma_i-1}|-1))$, тут підсумовування провадиться по всіх індексах $\sigma_i\in J^o_{q_i}$, для кожного з яких знайдеться таке $j\in J_{n_i}$, що $k^i_{j-1} \leq |\omega^i_{\sigma_i-1}|$ та $|\omega^i_{\sigma_i}| \leq k^i_j$. (Вважаємо, що $|\omega^i_0|=0$). З урахуванням теореми 2.21 та леми 2.20 отримуємо, що $\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} F_i = F$ – m-грань многогранника $\Pi(G,H)$, де $m=m_1+\ldots+m_s$. Що і треба було довести в б). Таким чином, теорема доведена.

<u>Теорема 2.29.</u> Множина $E(G,H)$ симетрична відносно усякої гіперплощини виду

$$x_j - x_m = 0,\ j\neq m \quad \forall j,m\in\omega^i\subset N_i' \quad \forall i\in J_s . \tag{2.44}$$

<u>Доведення.</u> Розглянемо довільну точку $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_k)\in E(G,H)$, $\alpha_j\neq\alpha_m$ і обчислимо її відстань від площини T_{jm}, що задається рівнянням $x_j-x_m=0$. Ця відстань, очевидно, дорівнює $h_A=|\alpha_j-\alpha_m|/\sqrt{2}$. Розглянемо точку B, яку одержимо з A перестановкою α_j і α_m: $B=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_k)$. Згідно з тим, що $j,m\in\omega^i\subset N_i'$ $\forall i\in J_s$, $B\in E(G,H)$. Відстань точки B від гіперплощини T_{jm} дорівнює $h_B=|\alpha_m-\alpha_j|/\sqrt{2}$. Очевидно, що точки A та B лежать по різні сторони площини T_{jm}. Зазначимо, що якщо $\alpha_j=\alpha_m$, то $A\in T_{jm}$. Легко бачити, що пряма L_{jm}, яка проходить через точки A та B має напрямний вектор $q=(q_1, \ldots, q_k)$, де $q_m=\alpha_j-\alpha_m$, $q_j=\alpha_m-\alpha_j$, $q_t=0$ $\forall t\in J_k\setminus\{m,j\}$. Оскільки напрямний вектор прямої L_{jm} паралельний нормальному вектору гіперплощини T_{jm}, то $L_{jm}\perp T_{jm}$ $\forall j\neq m$, $j,m\in\omega^i\subset N_i'$ $\forall i\in J_s$. В силу довільності вибору точки A і площини T_{jm}, того, що $h_A=h_B$, одержуємо справедливість теореми.

<u>Теорема 2.30.</u> Множина $E(G,H)$ симетрична відносно всякої $(k-1-|\Omega|)$-площини, яка описується системою з $|\Omega|$ рівнянь:

$$\sum_{j\in N_i'} x_j = \sum_{j=1}^{k_i} g_j^{K} \quad \forall i\in\Omega\subset J_s \tag{2.45}$$

і будь-якого з рівнянь набору (2.44).

<u>Доведення.</u> Згідно з теоремою 2.29 множина $E(G,H)$ симетрична відносно будь-якої гіперплощини T_{jm}, що описується умовою (2.44). В силу теорем 2.19 та 2.22 множина $E(G,H)$ лежить на будь-якій

m-площині з набору (2.45) ($m=k-|\Omega|$), тобто точки A, B, розглянуті при доведенні теореми 2.29, лежать на цій же m-площині, то з симетричності A і B відносно гіперплощини T_{jm} безпосередньо випливає їх симетричність відносно перерізу будь-якої гіперплощини T_{jm} з m-площиною, що і доводить теорему.

Зазначимо, що для множини $E(G,H)$ можна розглянути аналогічно тому, як це зроблено раніше для множини E_{kn}, питання розкладності її по паралельних площинах. Зауважимо, що більшість розглянутих вище властивостей загальної множини поліпереставлень уперше досліджено в працях [62, 68, 76, 77].

2.3. Властивості загальної множини розміщень

Позначимо $\Pi^k_{\eta n}(G)=\mathrm{conv}E^k_{\eta n}(G)$ і назвемо загальним многогранником розміщень. Нехай елементи мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ упорядковані таким чином:

$$g_1 \leqslant \ldots \leqslant g_\eta . \qquad (2.46)$$

Теорема 2.31. Загальний многогранник розміщень $\Pi^k_{\eta n}(G)$ задається системою нерівностей

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall\omega\subset J_k . \qquad (2.47)$$

Доведення. Скористуємося тим, що відомий [66, 78] многогранник $\Pi^k_{\eta n}(G)=\Pi^k_\eta$ при $n=\eta$ (тобто $\eta_i=1$ $\forall i\in J_n$). Зазначимо, що при цьому нерівності (2.46) перетворюються у строгі: $g_1 < \ldots < g_\eta$. Цей многогранник задається системою виду (2.47):

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} a_j \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} a_{n-j+1} \quad \forall\omega\subset J_k , \qquad (2.48)$$

де $A=\{a_1, \ldots, a_\eta\}$ позначено множину, що породжує множину $A^k_\eta(A)$, $a_1< \ldots <a_\eta$ (для відміни від мультимножини G, що породжує множину $A^k_{\eta n}(G)$).

7^x

Побудуємо множину A за правилом

$$a_{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{j-1}+m}=e_j+(m-1)\varepsilon \ \forall m\in J_{\eta_j} \ \forall j\in J_n, \quad (2.49)$$

вважаючи, що $\eta_o=0$, а ε вибираючи так:

$$0<\varepsilon<\frac{1}{\mu}\min_{\substack{i,j\in J_n\\ i\neq j}}|e_i-e_j|,$$

де $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ - основа мультимножини G, а $[G]=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ - її первинна специфікація, а

$$\mu=\max_{1\leq j\leq n}\{\eta_j\}-1.$$

Зазначимо, що $\mu\neq 0$, бо G - мультимножина і отже, існує принаймні одне $i\in J_n$ таке, що $\eta_i>1$.

Опукла оболонка множини $E_\eta^k=f(A_\eta^k(A))$ - многогранник $\Pi_\eta^k(A)$ розміщень без повторення, що породжується елементами множини $A=\{a_1, \ldots, a_\eta\}$, які обчислюються за (2.49), - описується системою (2.48). Здійснимо граничний перехід, спрямувавши $\varepsilon\to 0$. Згідно з побудовою $a_i\to g_i$ при $\varepsilon\to 0$ $\forall i\in J_\eta$. Множина E_η^k переходить в $E_{\eta n}^k(G)$, многогранник $\Pi_\eta^k(A)$ - в $\Pi_{\eta n}^k(G)$, а з системи нерівностей (2.48), що описує $\Pi_\eta^k(A)$, одержуємо в загальному випадку надмірну систему нерівностей (2.47), що описує загальний многогранник розміщень $\Pi_{\eta n}^k(A)$, *що і треба було довести.*

Наслідок 2.32. Якщо $\eta_1\geq k$, то ліві нерівності в системі (2.47) можуть бути замінені нерівностями $g_1\leq x_i$ $\forall i\in J_k$. Якщо $\eta_n\geq k$, то праві нерівності в системі (2.47) можуть бути замінені нерівностями $x_i\leq g_\eta$ $\forall i\in J_k$. Якщо умови $\eta_1\geq k$, $\eta_n\geq k$ виконуються разом, то многогранник $\Pi_{\eta n}^k(A)$ перетворюється на k-куб: $g_1\leq x_i\leq g_\eta$ $\forall i\in J_k$.

Зауважимо, що, як неважко бачити, кількість нерівностей, які входять в систему (2.47) дорівнює $R=2[\binom{k}{1}+\ldots+\binom{k}{k}]=2^{k+1}-2$, де $\binom{k}{i}$ - число сполучень з k елементів по i, $i\in J_k$. Кількість нерівностей можна скоротити, якщо $\eta_1>1$ або $\eta_n>1$. Коли $\eta_1>1$, то якщо виконується нерівність з системи (2.47) вигляду $x_i \geqslant g_1$ $\forall i \in J_k$, то виконуються і нерівності з (2.47) вигляду

$$\sum_{i \in \omega} x_i \geqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \quad \forall \omega \subset J_k, \ 1 < |\omega| \leqslant \eta_1 .$$

Тобто останні нерівності в системі (2.47) надлишкові і їх можна вилучити. Тому кількість нерівностей, що залишиться, є

$$R = 2^k - 1 + k + \sum_{i=\eta_1+1}^{k} \binom{k}{i} .$$

Аналогічно, якщо $\eta_n > 1$, то в цьому випадку при виконанні нерівностей з системи (2.47) вигляду $x_i \leqslant g_\eta$ $\forall i \in J_k$ виконуються і нерівності з системи (2.47) вигляду

$$\sum_{i \in \omega} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \omega \subset J_k, \ 1 < |\omega| \leqslant \eta_n .$$

Тобто в цьому випадку останні нерівності в системі (2.47) є надлишкові і їх можна вилучити. Тому кількість нерівностей, що залишилися, обчислюється за формулою $R = 2^k - 1 + k + \sum_{i=\eta_1+1}^{k} \binom{k}{i}$. Якщо умови $\eta_1 > 1$ і $\eta_n > 1$ виконуються одночасно, то, очевидно, можна вилучити разом нерівності, які вилучали в першому і другому випадках, і кількість нерівностей, що залишаються в системі (2.47), обчислюється так: $R = 2k + \sum_{i=\eta_1+1}^{k} \binom{k}{i} + \sum_{i=\eta_n+1}^{k} \binom{k}{i}$.

Теорема 2.33. Точка $x \in \Pi^k_{\eta n}(G)$ – вершина загального многогранника розміщень тоді і тільки тоді, коли її координати є перестановленнями чисел $g_1, g_2, \dots, g_s, g_{\eta-r+1}, g_{\eta-r+2}, \dots, g_\eta$, де $r, s \in J^0_k$, $s+r=k$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 2.31, розглянемо многогранник $\Pi^k_\eta(A)$, що описується системою нерівностей (2.48), де a_i, $\forall i \in J_\eta$, визначається з (2.49); в такий же спосіб здійснемо граничний перехід, спрямувавши $\varepsilon \to 0$. Згідно з побудовою при $\varepsilon \to 0$ $a_i \to g_i$ $\forall i \in J_\eta$. Множина E^k_η переходить в множину $E^k_{\eta n}(G)$, многогранник $\Pi^k_\eta(A)$

– в $\Pi^k_{\eta n}(G)$, а вершини першого – в вершини другого. При цьому, очевидно, що кількість вершин в $\Pi^k_{\eta n}(G)$ не більше $|\mathrm{vert}\,\Pi^k_{\eta}(A)|$, бо при переході до цього многогранника вершини $\Pi^k_{\eta}(A)$ можуть тільки суміститися, тобто дві вершини перетворюються на одну точку з $\mathrm{vert}\,\Pi^k_{\eta n}(G)$. Нових точок, відмінних від точок множини $E^k_{\eta n}(G)$, при описаному граничному переході, очевидно, не виникає. А як відомо [66], вершиною многогранника $\Pi^k_{\eta}(A)$ вектор x є тоді і тільки тоді, коли його компоненти є переставленням чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{\eta-r+1}, a_{\eta-r+2}, \ldots, a_{\eta}$, де $r, s \in \overset{o}{J}_k$, $s+r=k$. А так як $a_i \to g_i$ при $\varepsilon \to 0$ $\forall i \in J_k$, то з цього і випливає справедливість теореми для $\Pi^k_{\eta n}(G)$.

Наслідок 2.34. Множина вершин загального многогранника розміщень $\Pi^{\eta-1}_{\eta n}(G)$ збігається з множиною $E^{\eta-1}_{\eta n}(G)$.

Теорема 2.35. Якщо $x \in R^k$ – вершина загального многогранника розміщень $\Pi^k_{\eta n}(G)$, то всі суміжні з нею вершини одержують або переставленням в x компонент g_i, g_{i+1} $(g_i \neq g_{i+1}$, $i \in J_{s-1}$, $i \in J_{\eta-1} \setminus J_{\eta-r})$, або заміною компоненти g_s $(g_{\eta-r+1})$ на $g_{\eta-r}$ (g_{s+1}), де відповідно $g_s \neq g_{\eta-r}$ $(g_{\eta-r+1} \neq g_{s+1})$, $r, s \in \overset{o}{J}_k$, $s+r=k$.

Доведення. Справедливість теореми випливає з аналогічної теореми [66, 78] для многогранника розміщень, якщо її застосувати для многогранника $\Pi^k_{\eta}(A)$, який побудовано при доведенні теореми 2.31, з граничного переходу при $\varepsilon \to 0$ та того факту, що переставлення рівних компонент вершини x дає знову вершину x.

Раніше розглянуто розкладання множини переставлень по сім'ях паралельних гіперплощин, $(k-2)$-площин. Ці результати можуть бути поширені на множину $E^k_{\eta n}(G)$, а саме: кожна нерівність системи (2.47) породжує множину $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$, яка містить не більше $\binom{\eta}{|\omega|}$ паралельних між собою гіперплощин вигляду

$$\sum_{i \in \omega} x_i = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\beta_i}, \tag{2.50}$$

на яких лежать точки множини $E^k_{\eta n}(G)$, де $(x_1, \ldots, x_k) \in R^k$, $\beta_i \in J_\eta$,

$\beta_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$, $i, j \in J_{|\omega|}$, $\omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|}\} \subset J_k$.

Неважко бачити, що якщо $D = \bigcup_{|\omega|=1}^{k} \bigcup_{\omega} D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$, то $|D| \leq \sum_{|\omega|=1}^{k} \binom{k}{|\omega|}\binom{n}{|\omega|}$, де $\omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|}\} \subset J_k$.

<u>Означення 2.3.</u> Назвемо гіперплощину (2.50) з будь-якої множини $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ гіперплощиною кратності x, якщо існує рівно x $|\omega|$-вибірок з мультимножини G (яка породжує множину $E^k_{\eta n}(G)$) таких, що суми компонентів цих вибірок рівні між собою і дорівнюють сумі $\overline{g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_{|\omega|}}}$.

Якщо кожну гіперплощину кратності x розглядати як x пристаючих гіперплощин кратності 1, вважаючи, що x різним $|\omega|$-вибіркам з G, суми компонентів яких дорівнюють сумі в правій частині (2.50) $g_{\beta_1} + \ldots + g_{\beta_{|\omega|}}$), відповідають x різних гіперплощин (а не одна кратності x), то зрозуміло, що при кожному фіксованому $|\omega|$ кожна пара нерівностей системи (2.47) (права і ліва) породжує точно $\binom{n}{|\omega|}$ гіперплощин кратності 1, $|\omega| \leq k$, а їх загальна кількість $|D^*|$ визначається так:

$$|D^*| = \sum_{|\omega|=1}^{k} \binom{n}{|\omega|}\binom{k}{|\omega|}, \tag{2.51}$$

де D^* - множина всіляких гіперплощин вигляду (2.50) кратності 1. Тобто сума кратностей гіперплощин вигляду (2.50), які породжені: а) любою нерівністю (при $|\omega| = \mathrm{const}$) системи (2.47) дорівнює $\binom{n}{|\omega|}$; б) всіма нерівностями при одному і тому ж $|\omega|$ - $\binom{n}{|\omega|}\binom{k}{|\omega|}$; в) всіма нерівностями - $|D^*|$, що обчислюються за формулою (2.51).

Ясно, що якщо $t_j^{|\omega|}$ - кількість точок множини $E^k_{\eta n}(G)$, які належать гіперплощині $H_j^{|\omega|} \in D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ кратності $x_j^{|\omega|}$, то

$$t_j^{|\omega|} = x_j^{|\omega|}\, |\omega|!\, \frac{(n-|\omega|)!}{(n-k)!}, \quad \forall \omega \subset J_k, \ \forall j \in J_t, \tag{2.52}$$

де $t=|D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})|$.

Нехай $E(H_j^{|\omega|})\subset E_{\eta n}^k(G)$ – підмножина тих точок з $E_{\eta n}^k(G)$, які лежать на гіперплощині $H_j^{|\omega|}$. Наступна теорема установлює розкладність множини $E_{\eta n}^k(G)$ по будь-якій сім'ї $\{H_j^{|\omega|}, \forall j\in J_t\}=D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ паралельних гіперплощині $H_j^{|\omega|}$, $\omega\subset J_k$, $t=|D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})|$.

<u>Теорема 2.36.</u> $E_{\eta n}^k(G)=\bigcup_{j=1}^{t} E(H_j^{|\omega|})$, $\forall\omega\subset J_k$.

<u>Доведення.</u> Позначимо, як і раніше, $t_j^{|\omega|}$ – кількість точок множини $E_{\eta n}^k(G)$, які лежать на гіперплощині $H_j^{|\omega|}$, а $x_j^{|\omega|}$ – кратність гіперплощини $H_j^{|\omega|}$, $\omega\subset J_k$, $j\in J_t$. Тоді, використовуючи (2.52), можемо записати

$$\sum_{j=1}^{t} t_j^{|\omega|} = |\omega|!\frac{(\eta-|\omega|)!}{(\eta-k)!}\sum_{j=1}^{t} x_j^{|\omega|} . \tag{2.53}$$

Як зазначено вище, $\sum_{j=1}^{t} x_j^{|\omega|} = \binom{\eta}{|\omega|}$. Після підстановки цієї рівності в співвідношення (2.53) останнє набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{t} t_j^{|\omega|} = \eta(\eta-1)\ \ldots\ (\eta-k+1) . \tag{2.54}$$

В силу паралельності гіперплощин $H_j^{|\omega|}$, $\omega\subset J_k$, $\forall j\in J_t$, з урахуванням означення кратності гіперплощини і рівності (2.54) одержимо справедливість твердження теореми. Дійсно, число різних k-розміщень з елементів мультимножини $G=\{g_1,\ldots,g_\eta\}$ дорівнює $R=\eta(\eta-1)\ldots(\eta-k+1)$, а так як $E(H_i^{|\omega|})\cap E(H_j^{|\omega|})=\emptyset$ при $i\neq j$ (в силу паралельності гіперплощин $H_i^{|\omega|}$ та $H_j^{|\omega|}$) і рівності правої частини (2.54) числу R, одержимо, що всі k-розміщення розподілені по гіперплощинах сім'ї, яка розглядається. Що і треба було довести.

<u>Наслідок 2.37.</u> Якщо $|\omega|=k$, то $E_{\eta n}^k(G)=\bigcup_{j=1}^{t} E_{kq}(G')$, де $G'=\{g_1', \ldots, g_k'\}\subset G$, а $q=|S(G')|$.

<u>Доведення.</u> При $|\omega|=k$ множина $E(H_j^{|\omega|})$ являє собою мно-

жину переставлень з k елементів $g'_1, \ldots, g'_k$, вибраних з мультимножини G при побудові гіперплощини $H_j^{|\omega|}$. Якщо позначити через $q=|S(G')|$, тобто кількість різних елементів мультимножини G', то одержуємо, що $E(H_j^{|\omega|})=E_{kq}(G')$. Далі, застосувавши теорему 2.36, одержуємо $E_{\eta n}^k(G)=\bigcup_{j=1}^{t} E_{kq}(G')$, що і треба було довести.

Зауважимо, що *справедливі аналогічні* результати для $E_{nk}(G)$ як частковий випадок твердження 2.36, 2.37, бо $E_{nk}(G)$ можна розглядати як частковий випадок $E_{\eta n}^k(G)$.

Можливі й інші підходи до розкладення множини $E_{\eta n}^k(G)$ по деяких множинах M_j, які в об'єднанні дають множину $E_{\eta n}^k(G)$. Ці підходи можуть бути пов'язані, наприклад, з фіксацією деякого елемента g_i, $i \in J_\eta$. Розглянемо розкладення з фіксацією g_1 та g_η.

Із структури множини $E_{\eta n}^k(G)$ безпосередньо випливає справедливість наступного співвідношення:

$$E_{\eta n}^k(G) = \bigcup_{\substack{i=0 \\ \eta_i^* \geq k}}^{\tau} \left(E^k_{\eta_i^* n_i^*}(G_i^*) \setminus \tilde{E}^k_{\eta_i^* n_i^*}(G_i^*)\right), \qquad (2.55)$$

де G_i^* - мультимножина з основою $S(G_i^*)=\{e_{i+1}, \ldots, e_{n-i}\}$ та первинною *специфікацією* $[G_i^*]=\{\eta_{i+1}, \ldots, \eta_{n-i}\}$, $\tau=[(n-1)/2]$, $[\cdot]$ - ціла частина числа, $n_i^*=|S(G_i^*)|=n-2i$, $\eta_i^*=|G_i^*|=\eta_{i+1}+\ldots+\eta_{n-i}$, $\forall i \in J_\tau^0$; $\tilde{E}^k_{\eta_i^* n_i^*}(G_i^*)$ - підмножина множини $E^k_{\eta_i^* n_i^*}(G_i^*)$, кожний елемент якої не містить чисел, що дорівнюють e_{i+1}, e_{n-i}.

З (2.55) випливає співвідношення

$$E_{\eta n}^k(G) \subset \bigcup_{\substack{i=0 \\ \eta_i^* \geq k}}^{\tau} \operatorname{bd} \Pi^k_{\eta_i^* n_i^*}(G_i^*),$$

де $\operatorname{bd} M$ - межа M.

Для множин E_n^k, $\bar{E}_n^k$ усі розглянуті розкладення $E_{\eta n}^k(G)$ конкретизовані в [79].

2.4. Властивості множини сполучень з повтореннями

Нехай $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ – мультимножина з основою $S(G)=\{e_1,$ $\ldots, e_n\}$ та первинною специфікацією $[G]=\{k^n\}$, тобто $\eta=nk$. Не порушуючи спільності, можна вважати, що

$$g_1 \leqslant \ldots \leqslant g_\eta \,, \qquad (2.56)$$

$$e_1 < \ldots < e_n \,. \qquad (2.57)$$

Розглянемо множину $\bar{S}_n^k(G)=f(\bar{C}_n^k(G))$, яка означена вище. Зазначимо, що накладання умови (I.9) на елементи e в зображенні (I.8) множини $\bar{C}_n^k(G)$ не порушує спільності подальших міркувань. Насправді, якщо ми будемо розглядати k-вибірки виду (I.8), поставивши вимогу, щоб вони задовольняли відмінному від (I.9) порядку $g_{j_1} \leqslant \ldots \leqslant g_{j_k}$, де $g_{j_i} \in G$, $j_i \in J_\eta$, $i \in J_k$, то неважко бачити, що k-сполучення $e'=(g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}) \in R^k$ переходить в k-сполучення $e=(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}) \in$ $\in R^k$, якщо підстановку індексів $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{pmatrix}$ помножити на підстановку $p_2 = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$. Добуток підстановок $p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$, як легко бачити, відповідає в просторі R^k перепозначенню осей координат, що не порушує спільності подальших міркувань.

Позначимо $\operatorname{conv} \bar{S}_n^k(G)=\bar{Q}_n^k(G)$ та назвемо $\bar{Q}_n^k(G)$ многогранником сполучень з повтореннями. Наступні теореми дозволяють описати многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ у вигляді системи лінійних нерівностей.

<u>Теорема 2.38.</u> Точки $y_i=(y_{i1}, \ldots, y_{ik}) \in R^k$, де $y_{ij}=e_1$ $\forall j \in J_{k-i+1}$, $y_{i(j+k-i+1)}=e_n$ $\forall j \in J_{i-1}$, $\forall i \in J_{k+1}$, і тільки вони є вершинами многогранника, що описується системою

$$e_1 \leqslant x_1, \quad x_i \leqslant x_{i+1}, \ \forall i \in J_{k-1}, \quad x_k \leqslant e_n \,. \qquad (2.58)$$

<u>Доведення.</u> Як відомо (дивись, наприклад, [65]), точка $x \in R^k$ є вершиною многогранника в тому і тільки в тому випадку, якщо серед нерівностей, що задають його, знайдуться k лінійно незалежних об

межень, кожному з яких x задовольняє як рівності. Розглянемо точку y_i з умови теореми, $i \in J_{k+1}$. Припишемо кожній нерівності системи (2.58) номер: нерівності $e_1 \leq x_1$ – номер 1, нерівності $x_i \leq x_{i+1}$ $i \in J_{k-1}$ – номер $i+1$, *а нерівності* $x_k \leq e_n$ *– номер* $k+1$. *Покажемо*, що точка y_i – вершина многогранника, що описується системою (2.58). Дійсно, y_i задовольняє як рівностями всім нерівностям системи (2.58), крім тієї, що має номер $k+2-i$. Ці нерівності є лінійно незалежними. Щоб показати це, розглянемо визначник Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} k-i+1 \text{ рядок}, \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} i-1 \text{ рядок}. \end{array}$$

Його легко перетворити до вигляду, де на діагоналі будуть стояти лише ± 1, а на решті місць – нулі. Для цього з першими $k-i+1$ рядками вчинимо так. Перший рядок віднімемо від другого, одержимо в другому рядку на головній діагоналі -1, решта елементів – нулі. Додамо одержаний другий рядок до третього, отримаємо в третьому рядку на головній діагоналі -1, решту – нулі і так далі. З останніми $i-1$ рядками визначника зробимо таке. Останній рядок додамо до передостаннього (що має номер $k-1$). В рядку $k-1$ на головній діагоналі одержимо 1, а решта елементів – нулі. Отриманий $(k-1)$-й рядок додамо до $(k-2)$-го, одержимо на головній діагоналі в ньому 1, решта елементів – нулі і так далі. Таким чином, перетвореннями, що *не міняють значення визначника, ми одержали з* Δ *визначник* Δ' з елементами головної діагоналі, що дорівнюють ± 1, і нульовими елементами на інших місцях. Тому, так як $\det\Delta'$ дорівнює добутку елементів головної діагоналі, $\det\Delta = \det\Delta' = \pm 1 \neq 0$. А так як Δ – визначник, укладений з коефіцієнтів нерівностей системи (2.58), то нерівності, що його утворюють, є лінійно незалежними. Таким чином, y_i – вершина многогранника, що описується системою (2.58),

8ˣ

$i \in J_{k+1}$. а так як система (2.58) містить усього $k+1$ підсистему з k нерівностей, кожна з яких, як показано вище, відповідає y_i, $i \in J_{k+1}$, то розглянутий многогранник не має інших вершин, що відрізняються від y_i, $i \in J_{k+1}$. Що і треба було довести.

Наслідок 2.39. Многогранник, що описується системою (2.58) є k-симплексом, якщо $n \geq 2$.

Доведення. Згідно з означенням (дивись, наприклад, [65]), k-симплекс – це опукла оболонка $(k+1)$-ї афінно незалежної точки. Покажемо, що усі точки y_i, $i \in J_{k+1}$, з формулювання теореми 2.38 є афінно незалежними. Для цього розглянемо квадратну матрицю A вимірності $k+1$, стовпцями якої є вектори $x^i = (y_i, 1)$, $i \in J_{k+1}$. Через те $n \geq 2$, тобто $e_1 \neq e_n$, можемо позначити $a = e_n - e_1 > 0$. Знайдемо

$$\det A = \begin{vmatrix} e_1 & e_1 & \dots & e_1 & e_n \\ e_1 & e_1 & \dots & e_n & e_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_1 & \dots & e_n & e_n \\ e_1 & e_n & \dots & e_n & e_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & e_n - e_1 \\ e_1 & 0 & \dots & e_n - e_1 & e_n - e_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & 0 & \dots & e_n - e_1 & e_n - e_1 \\ e_1 & e_n - e_1 & \dots & e_n - e_1 & e_n - e_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & a \\ 0 & \dots & a & a & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \dots & a & a & a \end{vmatrix} = (-1)^k a^k \neq 0 ;$$

тут другий визначник одержано з першого відніманням від усіх, починаючи з другого, стовпців першого стовпця. Третій визначник отримано з другого розкладанням його по елементах останнього рядка. Отже, $\det A \neq 0$, а це означає, що многогранник, описаний системою (2.58), – k-симплекс. Що і треба було довести.

Теорема 2.40. Точка $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ належить многограннику $\bar{Q}_n^k(G)$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє системі (2.58).

Доведення. Точки y_i, $i \in J_{k+1}$, з формулювання теореми 2.38 належать множині $\bar{S}_n^k(G)$, причому згідно з теоремою 2.38 вони і тільки вони є вершинами многогранника, що описується системою (2.58). Як відомо (дивись, наприклад, [65]), опуклий многогранник збігається з опуклою оболонкою своїх вершин, а опукла оболонка будь-якої множини - це найменша опукла множина, що його містить. Через те що всі точки множини $\bar{S}_n^k(G)$, відмінні від y_i, $i\in J_{k+1}$, також задовольняють системі (2.58), що випливає з означення множини $\bar{S}_n^k(G)$, нерівностей (1.9), (2.57) то, таким чином, многогранник, що описується системою (2.58), є опуклою оболонкою множини $\bar{S}_n^k(G)$, тобто є многогранником $\bar{Q}_n^k(G)$. Що і треба було довести.

Наслідок 2.41. Многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ є k-симплексом.

Доведення. Справедливість цього твердження випливає з наслідка 2.39 і теореми 2.40.

Наслідок 2.42. Вимірність многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ дорівнює k, якщо $n\geq 2$.

Доведення. Це випливає з наслідків 2.39, 2.41, бо усі $k+1$ вершини $\bar{Q}_n^k(G)$ є афінно незалежні, що за означенням вимірності і засвідчує: $\dim \bar{Q}_n^k(G)=k$.

Як і раніше будемо позначати $J_n \cup \{0\} = J_n^0$.

Наслідок 2.43. Кожний набір з $(i+1)$-ї вершини многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ визначає його i-грань; кількість i-граней многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ дорівнює $\binom{k+1}{i+1}$, $\forall i\in J_{k-1}^0$.

Доведення. Многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ - k-симплекс, тому для нього справедливе твердження 2.16 з [65, с. 23], звідкіля безпосередньо випливає справедливість цього наслідку.

Лема 2.44. Якщо усі N вершин $y_m\in R^k$, $m\in J_N$, грані $F\subset R^k$ многогранника задовольняють системі рівнянь вигляду

$$Ax = B, \qquad (2.59)$$

де $x^T\in R^k$, $B^T\in R^k$, A - є $(k\times q)$-матрицею, причому q - довільне натуральне число, то будь-яка точка $y\in F$ задовольняє системі рівнянь

(2.58) і навпаки.

Доведення. Як відомо (дивись, наприклад, [65, с. 191]), грань F збігається з опуклою оболонкою своїх вершин. Тобто $\forall y \in F \ \exists \lambda_i \in R^1$, $\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in J_N$ і

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \tag{2.60}$$

такі, що

$$y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i . \tag{2.61}$$

Але за формулою леми

$$Ay_m = B \quad \forall m \in J_N . \tag{2.62}$$

Покажемо, що

$$Ay = B . \tag{2.63}$$

Підставимо в співвідношення (2.63) вираз (2.61) і перетворимо його з врахуванням рівностей (2.60) та (2.61):

$$Ay = A\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} (A\lambda_i y_i) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (Ay_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right) B = B.$$

Перша частина леми доведена. Проведенням цих же перетворень у зворотньому порядку легко установити справедливість другої частини леми.

Теорема 2.45. Множина точок $x=(x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ є i-гранню многогранника $\bar{\Omega}_n^k(G)$ тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком системи будь-яких $k-i$ рівнянь, $i \in J_{k-1}^o$, з набору:

$$x_1 = e_1 , \quad x_j = x_{j+1} \ \ \forall j \in J_{k-1}, \quad x_k = e_n . \tag{2.64}$$

Доведення. Згідно з наслідком 2.43 кожний набір, що складається з $i+1$ вершини многогранника $\bar{\Omega}_n^k(G)$ взаємно однозначно означає його i-грань, $i \in J_{k-1}^o$. При доведенні теореми 2.38 було установлено, що будь-яка вершина y_i, $j \in J_{k+1}$, однозначно означається підмножиною нерівностей (що обертаються в точці y_i у рівності) системи (2.58), і ця підмножина не містить точно однієї з нерівностей системи (2.58).

Очевидно, що в будь-якій з $i+1$ підсистем системи (2.58), що означає вершину y_j, $j \in J_{k+1}$, є нерівності, які збігаються з нерівностями *інших таких підсистем. Причому* $k-i$ нерівностей є спільними для всіх підсистем. Дійсно, всього в системі (2.58) $k+1$ нерівність. Кожна підсистема (з $(i+1)$-ї) не містить одну з них, причому кожний раз *іншу. Таким чином, кількість нерівностей, які* збігаються, $k+1-(i+1)=k-i$. І всі вони за означенням вершини обертаються на рівності в кожній з $(i+1)$-ї розглядуваної вершини, тобто лежать в наборі (2.64).

З іншого боку, згідно з твердженням 4.3 [65, с.33], підмножина розв'язків F системи (2.58), що описує многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ є i-гранню *цього многогранника в тому і тільки тому випадку, коли* серед нерівностей системи (2.58) знайдуться $k-i$ лінійно незалежних обмежень, кожному з яких будь-яка точка $x \in F$ задовольняє як рівності.

Покажемо, що одержані вище $k-i$ рівнянь з набору (2.64) є лінійно незалежні. Для цього установимо лінійну незалежність будь-яких k рівнянь з цього набору (2.64), або, що те саме - будь-яких k нерівностей системи (2.58). Визначник Δ, розглянутий при доведенні теореми 2.38, не дорівнює нулю, тому ранг системи (2.58) дорівнює k, тобто будь-які k нерівності системи лінійно незалежні. Отже, одержані вище $k-i$ нерівності системи (2.58) також лінійно незалежні, як частина деякого набора k лінійно незалежних нерівностей. А так як кожній з них вершина y_j, $j \in J_{k+1}$, задовольняє як рівності, то за лемою 2.44 їм задовольняє будь-яка точка $x \in F$ і навпаки, що і тягне за собою справедливість твердження теореми, яка доводиться.

<u>Наслідок 2.46.</u> *Многогранник* $\bar{Q}_n^k(G)$ - *простий.*

<u>Доведення.</u> Як відомо (дивись, наприклад, [65]), k-много-

гранник називають простим, якщо кожна його вершина належить рівно k *граням максимальної вимірності*.

У многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$, як випливає з теореми 2.45, усього $k+1$ грань вимірності $k-1$. І кожна з цих граней описується одним з рівнянь (2.64). Будь-яка вершина многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ згідно з теоремами 2.38 та 2.40 задовольняє точно k з них. Звідси і випливає справедливість наслідка.

Наслідок 2.47. Многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ є k-суміжним.

Доведення. Як відомо (дивись, наприклад, [65]), k-суміжним називається многогранник, якщо кожна його вершина є множиною вершин деякої власної грані многогранника. Для многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ це безпосередньо випливає з того, що $\bar{Q}_n^k(G)$ – k-симплекс.

Позначимо, як звичайно, через $f(M)=(f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$ f-вектор k-многогранника M, де f_i – кількість i-граней многогранника M, $i \in J_{k-1}^0$. Нехай $G_i=\{g_{1i}, \dots, g_{\eta_i i}\}$ – деяка мультимножина з основою $S(G_i)=\{e_{1i}, \dots, e_{n_i i}\}$ і первинною специфікацією $[G_i]=$ $=(\eta_{1i}, \dots, \eta_{n_i i})$, $i \in J_2$.

Наслідок 2.48. Многогранники $\bar{Q}_{n_1}^k(G_1)$ та $\bar{Q}_{n_2}^k(G_2)$, якщо $G_1 \neq G_2$, *f-еквівалентні*.

Доведення. Як відомо [65], два різних многогранника називаються f-еквівалентними, якщо їх f-вектори збігаються. Для $\bar{Q}_{n_1}^k(G_1)$ та $\bar{Q}_{n_2}^k(G_2)$ цей збіг випливає з того, що обидва многогранники є *k-симплексами*.

Розглянемо деякі властивості многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$, скориставшись апаратом комбінаторної топології [80, 81] (дивись також [65]). Нагадаємо необхідні означення.

Означення 2.4. Комплексом називається скінченна сукупність K многогранників в R^k, яка задовольняє умовам: 1) нарівні з кожним многогранником $M\in K$ до K входять також будь-яка грань многогранника M; 2) переріз будь-яких двох многогранників з K є гранню кожного з них. Вимірністю комплексу K називається максимальна вимірність многогранників з K.

Означення 2.5. Нехай M - k-многогранник в R^k, $d\in J_k^o$. Множина всіх граней *вимірності, що не перевищує d, многогранника M є* комплексом, який називається d-кістяком многогранника M. $(k-1)$-кістяк многогранника M називається крайовим комплексом многогранника M. Позначимо його $F(M)$.

Означення 2.6. Два комплекси K_1, K_2 називаються ізоморфним, якщо між ними існує взаємно однозначне відображення, яке зберігає операцію включення. Два многогранники M_1 та M_2 називаються комбінаторно еквівалентними, якщо ізоморфні їх крайові комплекси $F(M_1)$ та $F(M_2)$. Позначається комбінаторна еквівалентність так: $M_1 \cong M_2$. При цьому кажуть, що M_1 та M_2 є многогранниками одного комбінаторного типу.

Теорема 2.49. Многогранники $\bar{Q}^k_{n_1}(G_1)$ та $\bar{Q}^k_{n_2}(G_2)$ комбінаторно еквівалентні.

Доведення. Обидва многогранники - $\bar{Q}^k_{n_1}(G_1)$, $\bar{Q}^k_{n_2}(G_2)$ - k-симплекси, тому вони, як відомо [65, с. 76], мають один і той же комбінаторний тип, тобто $\bar{Q}^k_{n_1}(G_1) \cong \bar{Q}^k_{n_2}(G_2)$.

Означення 2.7 [65, 82]. Напівматроїдом рангу d називається пара $(\{F\},\{V\})$, де $\{F\}$ - непуста скінченна множина, елементи якої називаються абстрактними гранями, $\{V\}$ - сім'я її непустих підмножин, які називаються вершинами. При цьому вершини і грані повинні задовольняти наступним властивостям: 1) кожна вершина v містить рівно d абстрактних граней $\{F_1, \ldots, F_d\}$, при цьому кажемо, що грань F_i $\forall i\in J_d$ та вершина v інцидентні між собою; 2) для будь-якої *підмножини з $d-1$ абстрактних граней або існує рівно дві вер-*

шини, яким всі вони інцидентні, або таких вершин зовсім немає.

Означення 2.8 [65]. Два напівматроїди $P_1=(\{F_1\},\{V_1\})$ та $P_2=(\{F_2\},\{V_2\})$ називаються ізоморфними, якщо існує взаємно однозначне відображення між $\{F_1\}$ та $\{F_2\}$, $\{V_1\}$ та $\{V_2\}$, яке зберігає інцидентність.

Пара $(\{F\}, \{V\})$, де $\{F\}$ – множина гіперграней простого многогранника M, а $\{V\}$ – множина його вершин, є, як неважко бачити, напівматроїдом. Його називають напівматроїдом многогранника M і позначають $P(M)$.

Теорема 2.50. Напівматроїди $P(\bar{Q}^k_{n_1}(G_1))$ та $P(\bar{Q}^k_{n_2}(G_2))$ ізоморфні.

Доведення. Згідно з наслідком 2.46 многогранники $\bar{Q}^k_{n_1}(G_1)$ та $\bar{Q}^k_{n_2}(G_2)$ – прості, а з теореми 2.49 випливає, що ці многогранники комбінаторно еквівалентні. Скориставшись теоремою 1.7 з [65] яка стверджує комбінаторну еквівалентність простих многогранників M_1, M_2 тоді і тільки тоді, коли їх напівматроїди ізоморфні, маємо ізоморфність напівматроїдів $P(\bar{Q}^k_{n_1}(G_1))$ та $P(\bar{Q}^k_{n_2}(G_2))$. Що і треба було довести.

Перед тим як перейти до дослідження цілочислових аспектів многогранника $\bar{Q}^k_n(G)$, нагадаємо деякі означення (дивись, наприклад, [65]).

Означення 2.9. Цілочисловим називається многогранник, у якого всі вершини мають цілі координати.

Означення 2.10. Матриця називається абсолютно унімодулярною, якщо всі її ненульові мінори дорівнюють або 1, або –1.

Означення 2.11. Матриця називається ейлеровою, якщо сума елементів в кожному її рядку і кожному її стовпці парна.

Теорема 2.51. Многогранник $\bar{Q}^k_n(G)$ є цілочисловим тоді і тіль ки тоді, коли e_1 та e_n – цілі числа.

Доведення. Многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ описується системою (2.58) (теорема 2.40). Вершини многогранника, що описується системою (2.58), мають координати рівні тільки e_1 або e_n (теорема 2.38). Це і дає, на основі означення 2.9 справедливість твердження.

Теорема 2.52. Матриця A системи (2.58), що описує многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$, є абсолютно унімодулярною.

Доведення. Скористуємося теоремою 2.3 із [65, с. 177], згідно з якою матриця A системи (2.58) є абсолютною унімодулярною тоді і тільки тоді, коли многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ є цілочисловим при будь-яких цілочислових e_1, e_n. З теореми 2.51 маємо цілочисловість $\bar{Q}_n^k(G)$ при цілих e_1, e_n, тому A є абсолютно унімодулярною матрицею, що і треба було довести.

Наслідок 2.53. Наступні твердження для матриці A системи (2.58), яка описує многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$, еквівалентні:

1) будь-яка квадратна ейлерова підматриця матриці A є виродженою;

2) для кожного вектора x з компонентами 0, ±1, існує вектор y з компонентами 0, ±1, такий, що $y \equiv x \pmod 2$; та або $A_i y=0$, якщо $A_i x \equiv 0 \pmod 2$, або $A_i y=\pm1$, якщо $A_i x \equiv 1 \pmod 2$, для всіх рядків A_i матриці A;

3) для довільної невиродженої підматриці A_I^J матриці A виконується умова: найбільший спільний дільник величини $\{\sum_{j\in J} \lambda_j a_{ij} : i\in I\}$ дорівнює одиниці для усіх $\lambda_j \in \{0, \pm1\}$, не рівних одночасно нулю. (A_I^J – підматриця матриці A, яка утворена рядками з номерами з I і стовпцями з номерами з J).

Доведення. Справедливість наслідку випливає з теореми 3.2 [65, с. 120], яка установлює еквівалентність аналогічних тверджень для абсолютно унімодулярних матриць, і теореми 2.52 з якої випливає абсолютна унімодулярність матриці A системи (2.58).

9*

Зауваження 2.5. Твердження 1), 2), 3) наслідку 2.53 можна розглядати як висновки для матриці A системи (2.58), що описує $\bar{Q}_n^k(G)$, критеріїв абсолютної унімодулярної відповідно Падберга [83], Камьо [84], Чандрасекарана [85].

Теорема 2.54. Будь-яка квадратна ейлерова підматриця матриці A системи (2.58) – нульова.

Доведення. Справедливість твердження теореми випливає із структури матриці A системи (2.58) і означення 2.11 при безпосередній перевірці.

Розглянемо властивості многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$, пов'язані з суміжністю граней. Нагадаємо, що згідно з означенням 2.1 суміжними називаються дві i-грані S_1^i, S_2^i многогранника M, якщо вони перерізаються по $(i-1)$-грані S^{i-1}, тобто $S^{i-1} = S_1^i \cap S_2^i$, $i \in J_{k-1}$, де $k = \dim M$.

Занумеруємо гіперграні многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ (і, отже, рівняння набору (2.64)) так: гіперграні припишемо номер i тієї вершини $y_i \in \bar{Q}_n^k(G)$, яка не лежить на цій гіперграні, $i \in J_{k+1}$. Згідно з наслідком 2.43 кожний набір з $(i+1)$-ї вершини многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ визначає його i-грань, $i \in J_{k-1}^0$. Тобто i-грань S^i взаємно однозначно визначається множиною $\omega^i = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i+1}\}$, де α_j – номер вершини, яка належить i-грані S^i, $(y_{\alpha_i} \in S^i)$, або, що одне й те, – номер гіперграні, яка не містить i-грань S^i, $\alpha_j \in J_{k+1}$; $\alpha_m \neq \alpha_j$ при $m \neq j$, $m, j \in J_i^0$, $i \in J_{k+1}^0$. З іншого боку, згідно з критерієм i-грані $S^i \subset \bar{Q}_n^k(G)$ (теорема 2.45), S^i є розв'язком системи з $k-i$ рівнянь набору (2.64) з номерами з множини $\Omega^i = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-i}\}$, $\beta_j \in J_{k+1}$, $\beta_m \neq \beta_j$ при $m \neq j$; $m, j \in J_{k-1}^0$. Причому S^i взаємно однозначно визначається множиною Ω^i. Очевидно, що $\Omega^i \cap \omega^i = \emptyset$, $\Omega^i \cup \omega^i = J_{k+1}$.

Теорема 2.55. Дві i-грані S_1^i, $S_2^i \subset \bar{Q}_n^k(G)$ суміжні тоді і тільки тоді, коли існує $(i-1)$-грань $S^{i-1} \subset \bar{Q}_n^k(G)$ така, що

$$\Omega_1^i \cup \Omega_2^i = \Omega^{i-1} . \tag{2.65}$$

Доведення. *Те, що із суміжності граней s_1^i, $s_2^i \subset \bar{Q}_n^k(G)$ випливає* існування $(i-1)$-грані $s^{i-1} \subset \bar{Q}_n^k(G)$, для якої виконується умова (2.65), очевидно. Покажемо, що якщо існує грань $s^{i-1} \subset \bar{Q}_n^k(G)$, для якої виконується умова (2.65), то грані, відповідні множинам Ω_1^i, Ω_2^i, суміжні. Так як (2.65) *виконано, то існує множина* Ω^{i-1}, *якій* відповідає $(i-1)$-грань $s^{i-1} \subset \bar{Q}_n^k(G)$. Але за побудовою множин Ω^i, $i \in J_{k-1}^o$, ця s^{i-1} грань міститься і в грані s_1^i, і в грані s_2^i. Це за *означенню* 2.1 і дає суміжність s_1^i та s_2^i. Таким чином, теорема доведена.

Зауважимо, що теорему 2.55 легко сформулювати в термінах множин ω^i, $i \in J_{k-1}^o$.

Наслідок 2.56. Якщо s - гіпергрань многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$, то *всі інші гіперграні суміжні з нею.*

Доведення. Справедливість наслідку беспосередньо випливає з теореми 2.55 і критерію i-грані (теорема 2.45) у випадку $i=k-1$.

Як видно, означення 2.1 і теорема 2.55 не описують суміжні вершини многогранника, під якими, як відомо [65], розуміють дві вершини, що лежать на одному ребрі многогранника. Розглянемо це питання окремо.

Теорема 2.57. *Будь-які дві вершини* $y_i, y_j \in \bar{Q}_n^k(G)$, $i,j \in J_{k+1}$ *суміжні*.

Доведення. Покажемо, що довільні вершини $y_i, y_j \in \bar{Q}_n^k(G)$, $i,j \in J_{k+1}$, сполучає ребро $s^1 \subset \bar{Q}_n^k(G)$. Згідно з теоремами 2.38, 2.40 $y_t = (e_1, \ldots, e_1, e_n, \ldots, e_n)$, $t \in \{i,j\}$, *де* e_1 *повторюється* $k-t+1$ разів, а e_n - $t-1$ разів. Кожна з цих двох вершин може бути описана згідно з теоремою 2.45 системою з k рівнянь, що входять в набір з $(k+1)$-го рівняння набору (2.64). Очевидно, що ці системи будуть відрізнятися тільки одним рівнянням. *Спільні* $k-1$ *рівнянь* (згідно з тією ж теоремою 2.45) описують ребро многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$. Що і треба було довести.

Теорема 2.58. Точки множини $\mathrm{vert}\bar{Q}_n^k(G)$ лежать на гіперсфері:

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - T)^2 = r^2 , \qquad (2.66)$$

де $r^2=0{,}25k(e_n-e_1)^2$, $T=0{,}5(e_1+e_n)$.

Доведення. Згідно з теоремами 2.38, 2.40, якщо $x\in\mathrm{vert}\bar{Q}_n^k(G)$, то $x=y_j=(e_1,\ldots,e_1,e_n,\ldots,e_n)$, причому компонента e_1 повторюється $k-j+1$ разів, а e_n – $j-1$ разів, $j\in J_{k+1}$. Підставимо значення координати точки x в (2.66). З врахуванням виразів для T та r^2, що наведені у формулюванні теореми, отримуємо тотожність. А так як вершина y_j, $j\in J_{k+1}$, вибрана довільно, то усі точки множини $\mathrm{vert}\bar{Q}_n^k(G)$ лежать на гіперсфері (2.66), що і треба було довести.

Теорема 2.59. Точки множини $\mathrm{vert}\bar{Q}_n^k(G)$ і тільки вони задовольняють наступній системі обмежень: $x_1\geq e_1$, $x_i\leq x_{i+1}$ $\forall i\in J_{k-1}$, $x_k\leq e_n$, $\sum_{i=1}^{k}(x_i-0{,}5(e_1+e_n))^2=0{,}25k(e_n-e_1)^2$.

Доведення. Справедливість теореми безпосередньо випливає з теорем 2.38, 2.40, 2.58 та леми 2.26.

Теорема 2.60. Якщо $y_i,y_j\in\mathrm{vert}\bar{Q}_n^k(G)$ $i,j\in J_{k+1}$, то

$$\rho(y_i,y_j) = (e_n - e_1)(|i - j|)^{1/2}. \qquad (2.67)$$

Доведення. Формула (2.67) перевіряється безпосередніми обчисленнями.

Зауважимо, що з (2.67) випливає: якщо пари вершин многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ знаходяться на однаковій відстані $|j-i|$ в послідовності $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$, то вони знаходяться на однаковій відстані і в метриці простору R^k.

Розглянемо властивості множини $\bar{S}_n^k(G)$, пов'язані з розкладенням ЇЇ по площинах і суміжні з цим питання.

Теорема 2.61. Множина $\bar{Q}_n^k(G)$ лежить сім'ї $\{H(i,j)\}_{j=1}^{j=\nu}$, ($i\in J_{k+1}$, $\nu=n$ при $i=1$, $i=k+1$; $\nu=0{,}5(n^2+n)$ при $i\in J_k\setminus\{1\}$) паралельних гіперплощин вигляду

$$\{H(1,j)\}_{j=1}^{j=n} = \{x\in R^k \mid x_k=e_j,\ j\in J_n\}; \qquad (2.68)$$

$$\{H(k+1-\tau,j)\}_{j=1}^{j=0,5(n^2+n)} = \{x\in R^k \mid x_\tau - x_{\tau+1} = e_m - e_q, \tag{2.69}$$
$$m\leq q,\ m,q\in J_n\},\ \tau\in J_{k-1};$$

$$\{H(k+1,j)\}_{j=1}^{j=n} = \{x\in R^k \mid x_1 = g^j,\ j\in J_n\}. \tag{2.70}$$

Доведення. Розглянемо сім'ю гіперплощин (2.68). На гіперплощині $H(i,j)$ цієї сім'ї лежать всі точки множини $\bar{S}_n^k(G)$, у яких $x_k=e_j$, $j\in J_n$, а так як інших можливостей для x_k немає, і усі n можливостей e_j, $j\in J_n$, вичерпані, то вся множина $\bar{S}_n^k(G)$ лежить на гіперплощинах сім'ї (2.68), які, очевидно, паралельні.

Аналогічні міркування можна провести для сім'ї гіперплощин (2.70).

Розглянемо сім'ю гіперплощин (2.69). Усі ці гіперплощини, очевидно, паралельні. Гіперплощині $H(k+1-\tau,j)$, де j – номер гіперплощини в сім'ї при деякій фіксованій нумерації, належать ті точки множини $\bar{S}_n^k(G)$, у яких $x_\tau=e_m$, $x_{\tau+1}=e_q$, $\tau\in J_{k-1}$, $m\leq q$; $m,q\in J_n$. Усі можливості для $x\in\bar{S}_n^k(G)$ при цьому вичерпані. Як легко бачити, при $m\leq q$, $q\in J_n$ кількість гіперплощин вигляду $H(k+1-\tau,j)$ дорівнює $0,5(n-1)n+n$, або що те саме, – числу сполучень з повтореннями з n елементів по 2, тобто $j\in J_\nu$, де $\nu=0,5(n^2+n)$. Таким чином, теорема доведена.

Зауваження 2.6. Якщо $e_m-e_q=e_i-e_j$, $m\leq q$, $i\leq j$, $m\neq i$, $m,e,i,j\in J_n$, то дві відповідні гіперплощини вигляду (2.69) пристають.

Означення 2.12. Назвемо гіперплощину $H(i,j)=\{x\in R^k \mid x_\tau - x_{\tau+1} = e_m-e_q;\ m\leq q,\ m,e\in J_n\}$, $i=k+1-\tau$, будь-якої сім'ї $\{H(k+1-\tau,j)\}_{j=1}^{j=\nu}$, $\tau\in J_{k-1}$, вигляду (2.69) гіперплощиною кратності $\varkappa$, якщо набір основа $[G]=\{e_1, \ldots, e_n\}$ мультимножини G така, що існує рівно $\varkappa$ рівних різниць e_m-e_q, $m\leq q$, $m,q\in J_n$.

Зауваження 2.7. Будемо розглядати гіперплощину $H(i,j)$ вигляду (2.69) кратності $\varkappa$ також як ν гіперплощин кратності 1, кожна з яких відповідає своїй парі чисел e_m, e_q.

Нехай $H(i,j)$ – гіперплощина з сімей (2.68), (2.69) або (2.70). Нагадаємо, що при $i=\text{const}$ множина $\{H(i,j)\}$ дає паралельні гіперплощини. Якщо позначити $\{x\in(\bar{S}_n^k(G)\cap H(i,j))\}=\bar{S}_n^k(G,H(i,j))$, то теорему 2.61 можна виразити рівностями:

$$\bar{S}_n^k(G) = \bigcup_{j=1}^{V} \bar{S}_n^k(G,H(i,j)) \quad \forall i\in J_{k+1} \tag{2.71}$$

$$V = \begin{cases} n & \text{при } i=1,\ i=k+1; \\ 0{,}5(n^2+n) & \text{при } i\in J_k\setminus\{1\}. \end{cases}$$

Позначимо, як і раніше, $\binom{\alpha}{\beta}$ число сполучень з повтореннями з α елементів по β. Як відомо [86],

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\beta!} . \tag{2.72}$$

<u>Теорема 2.62</u>. Якщо $H(i,j)$ – гіперплощина сім'ї (2.69) кратності 1, то

$$|\bar{S}_n^k(G,H(i,j))| = \binom{m}{\tau-1}\binom{n-q+1}{k-\tau-1} , \tag{2.73}$$

де $k+1-\tau=i$.

<u>Доведення.</u> На гіперплощині $H(i,j)=\{x\in R^k\,|\,x_\tau-x_{\tau+1}=e_m-e_q,\ m\le q,\ m,e\in J_n\}$, $i=k+1-\tau$, $\tau\in J_{k-1}$ лежать точки множини $\bar{S}_n^k(G)$, у яких $x_\tau=e_m$, $x_{\tau+1}=e_q$. Розглянемо, скільки є способів задати інші координати $x\in\bar{S}_n^k(G,H(i,j))$. В силу умови (1.9) координатами $x_1, \ldots, x_{\tau-1}$ можуть бути числа $e_1, \ldots, e_m$. Число комбінацій координат $x_1, \ldots, x_{\tau-1}$, *очевидно, обчислюється як число сполучень з повтореннями з* m *елементів по* $\tau-1$: $\binom{m}{\tau-1}$. Аналогічно, $x_{\tau+2}, \ldots, x_k$ можуть приймати значення з набору $e_q, e_{q+1}, \ldots, e_n$. Не важко бачити, що число комбінацій компонент $x_{\tau+2}, \ldots, x_k$ – це число сполучень з повтореннями з $n-q+1$ елементів по $k-\tau-1$: $\binom{n-q+1}{k-\tau-1}$. Число ж усіх комбінацій набору координат, якщо $x_\tau=e_m$, $x_{\tau+1}=e_q$, $m\le q$, $m,q\in J_n$, дорівнює $\binom{m}{\tau-1}\binom{n-q+1}{k-\tau-1}$, тобто справедлива формула (2.73), що і треба було довести.

<u>Теорема 2.63</u>. Якщо гіперплощина $H(i,j)=\{x\in R^k\,|\,x_\tau-x_{\tau+1}=e_\mu-e_\lambda,\ \mu\le\lambda,\ \mu,\lambda\in J_n\}$, $(i=k+1-\tau)$ сім'ї (2.69) має кратність $\varkappa$, то

$$|\bar{S}_n^k(G,H(i,j))| = \sum \frac{(m+\tau-2)!\,(n-q+k-\tau-1)!}{(\tau-1)!\,(m-1)!\,(k-\tau-1)!\,(n-q)!}\,, \quad (2.74)$$

де підсумовування ведеться по тих x доданках, для яких $e_m-e_q=e_\mu-e_\lambda$, $m\leq q$; $m,q\in J_n$.

Доведення. Справедливість формули (2.74) випливає з теореми 2.62, означення 2.12 з урахуванням формули (2.72).

Теорема 2.63. Справедливі формули

$$|\bar{S}_n^k(G,H(1,j))| = \binom{j}{k-1} \quad \forall j\in J_n; \quad (2.75)$$

$$|\bar{S}_n^k(G,H(k+1,j))| = \binom{n-j+1}{k-1} \quad \forall j\in J_n. \quad (2.76)$$

Доведення. Справедливість формули (2.75), (2.76) установлюється проведенням міркувань, що аналогічні доведенню формули (2.73).

Наслідок 2.65.

$$|\bar{S}_n^k(G,H(1,j))| = |\bar{S}_n^k(G,H(k+1,j))| \quad \forall j\in J_n. \quad (2.77)$$

Доведення. Формула (2.77) перевіряється безпосередніми обчисленнями виходячи з рівностей (2.75), (2.76).

Теорема 2.66. Точки множини $\bar{S}_n^k(G)$ належать кожній сім'ї паралельних гіперплощин $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ вигляду

$$\sum_{i\in\omega} x_i = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\beta_i}\,, \quad (2.78)$$

де $(x_1, \ldots, x_k)\in R^k$, $(g_{\beta_1}, \ldots, g_{\beta_{|\omega|}})\in\bar{S}_n^k(G)$, $\omega=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|}\}\subset J_k$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, $i,j\in J_{|\omega|}$; причому

$$|D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})| \leq |\bar{S}_n^{|\omega|}(G)|. \quad (2.79)$$

Доведення. Так як дві різні гіперплощини, що належать одній сім'ї $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$, відрізняються тільки правою частиною рівняння (2.78), то їх паралельність очевидна.

Кількість гіперплощин вигляду (2.78) з лівою частиною $\sum_{i\in\omega} x_i$ визначається кількістю сполучень з повтореннями з n елементів основи $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ мультимножини G по $|\omega|$. Але так як суми

10-1091

цих різних наборів з $|\omega|$ елементів можуть бути однакові, то в формулі (2.79) стоїть не знак рівності, а знак нестрогої нерівності.

Покажемо, нарешті, що точки множини $\bar{S}_n^k(G)$ належать кожній сім'ї гіперплощин $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ вигляду (2.78). На гіперплощині вигляду (2.78) лежать такі точки множини $\bar{S}_n^k(G)$, що координати, номери яких входять в множину ω, в сумі дають $\sigma = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\beta_i}$. Число σ за побудовою сім'ї (2.78) приймає всі можливі значення суми з $|\omega|$ доданків, які є координатами точок з множини $\bar{S}_n^k(G)$, тобто будь-яка точка з $\bar{S}_n^k(G)$ лежить на деякій гіперплощині вигляду (2.78). Таким чином, теорема доведена.

Справедливий очевидний наслідок.

Наслідок 2.67. Справедливі співвідношення

$$D_1(1)=\{x_1=g_{\beta_1}\}=\{H(1,j)\}_{j=1}^{j=n};\ D_1(k)=\{x_k=g_{\beta_1}\}=\{H(k+1,j)\}_{j=1}^{j=n},$$

де множини $\{H(1,j)\}$, $\{H(k+1,j)\}$, $j\in J_n$, означаються співвідношеннями (2.68) та (2.70) відповідно, а $g_{\beta_1}\in\bar{S}_n^1(G)$.

Позначимо гіперплощину сім'ї $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ через $D(\omega,\sigma)$, де $\sigma=(g_{\beta_1}, \ldots, g_{\beta_{|\omega|}})\in\bar{S}_n^k(G)$, а $\omega=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|}\}\subset J_k$. Для стислості сім'ю $D_{|\omega|}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\omega|})$ будемо також позначати $D(\omega)$. Очевидно, що

$$D(\omega) = \bigcup_{\sigma\in\bar{S}_n^{|\omega|}(G)} D(\omega,\sigma).$$

Нехай $\bar{S}_n^k(G,D(\omega,\sigma))=\bar{S}_n^k(G)\cap D(\omega,\sigma)$. Тоді теорему 2.66 можна виразити формулою

$$\bar{S}_n^k(G) = \bigcup_{\sigma\in\bar{S}_n^{|\omega|}(G)} \bar{S}_n^k(G,D(\omega,\sigma)),\ \forall\omega\subset J_k.$$

Означення 2.13. Назвемо гіперплощину $D(\omega,\sigma)$ з будь-якої сім $D(\omega)$ вигляду (2.78) гіперплощиною кратності $\varkappa$, якщо є рівно $\varkappa$ *$|\omega|$-вибірок з мультимножини G, що породжує $\bar{S}_n^k(G)$ таких, що суми* елементів цих вибірок рівні між собою і рівні $\sum\limits_{j=1}^{|\omega|} g_{\beta_j}$.

Теорема 2.68. Якщо $\omega_1 \approx \omega_2$, $|\omega_1| = |\omega_2|$ і гіперплощина $D(\omega_1, \sigma)$ має кратність $\varkappa$, то таку ж кратність має гіперплощина $D(\omega_2, \sigma)$, а число гіперплощин однакової кратності в $D(\omega_1)$ і $D(\omega_2)$ збігається.

Доведення. Справедливість твердження теореми безпосередньо випливає з означення 2.13 і структури сімей $D(\omega)$.

Зауваження 2.8. Якщо кожну гіперплощину $D(\omega, \sigma)$ кратності $\varkappa$ розглядати як $\varkappa$ гіперплощин кратності 1, які пристають, вважаючи, що $\varkappa$ різним $|\omega|$-вибіркам з мультимножини σ, елементи яких утворюють однакові суми у правій частині рівняння (2.78), відповідають $\varkappa$ різних гіперплощин кратності 1, то зрозуміло, що при фіксованому ω є точно $\binom{n}{|\omega|}$ гіперплощин кратності 1. Загальне число $|D^*|$ гіперплощин вигляду (2.78) визначається так:

$$|D^*| = \sum_{|\omega|=1}^{k} \binom{n}{|\omega|} \binom{k}{|\omega|}, \tag{2.80}$$

де D^* - множина усяких можливих гіперплощин вигляду (2.78), розглядуваних як гіперплощини кратності 1. Таким чином, справедливо наступне твердження.

Теорема 2.69. Сума кратностей гіперплощин $D(\omega, \sigma)$ вигляду (2.78) дорівнює а) при фіксованому ω - $\binom{n}{|\omega|}$; б) при фіксованому $|\omega|$ - $\binom{n}{|\omega|}\binom{k}{|\omega|}$; в) усіх - числу $|D^*|$, знайденому за формулою (2.80).

Зауваження 2.9. Цікаве питання про кількість точок $\bar{S}_n^k(\sigma)$, що належать кожній гіперплощині $D(\omega, \sigma)$ вигляду (2.78). Проте його доцільно, очевидно, вирішувати для кожної конкретної множини $\bar{S}_n^k(\sigma)$ і гіперплощини $D(\omega, \sigma)$, бо число таких точок суттєво залежить від складу множин ω та σ.

Можливі й інші підходи до розкладення множини $\bar{S}_n^k(\sigma)$.

Теорема 2.70. Точки множини $\bar{S}_n^k(\sigma)$ належать гіперграням набору вкладених і дотичних по $k-1$ гіперграням многогранників

10^x

$$\bar{Q}^k_{n^*_i}(G^*_i),\ i\in J^o_\tau,$$

$$n^*_i=n-2i,\ i\in J^o_\tau, \tag{2.81}$$

$$G^*_o=G_o;\ G^*_i=\{g_{\eta_1+\ldots+\eta_i+1},\ldots,g_{\eta-(\eta_n+\ldots+\eta_{n-i+1})}\},\ i\in J_\tau, \tag{2.82}$$

$$\tau=[0,5(n-1)], \tag{2.83}$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа; тобто справедливе співвідношення

$$\bar{S}^k_n(G)\subset bd\ \bar{Q}^k_{n^*_i}(G^*_i). \tag{2.84}$$

Доведення. Розглянемо ті точки $x\in\bar{S}^k_n(G)$, для яких $x_1=g_1$, $x_k=g_\eta$. Згідно з критерієм i-грані многогранника $\bar{Q}^k_n(G)$ (теорема 2.45) всі ці точки належать гіперграням многогранника $\bar{Q}^k_n(G)$. Вилучивши з розгляду ці точки, розглянемо ті із залишених, для яких $x_1=e_2$, $x_k=e_{n-1}$. Існування таких точок випливає з способу побудови множини $\bar{S}^k_n(G)$. Згідно з теоремою 2.45 ці точки належать гіперграням многогранника $\bar{Q}^k_{n-2}(G^*_1)$, де $G^*_1=\{g_{\eta_1+1},\ldots,g_{\eta-\eta_n}\}$. З опису многогранників сполучень з повтореннями (система (2.58)) і в силу нерівностей (2.56) випливає, що многогранник $\bar{Q}^k_{n-2}(G^*_1)$ вкладений в многогранник $\bar{Q}^k_n(G)$, і вони дотикаються загальними для обох многогранників нерівностями відповідних систем вигляду (2.58): $x_i\le x_{i+1}$, $\forall i\in J_{k-1}$. Продовжуючи аналогічно виключення з розгляду точок $\bar{S}^k_n(G)$ за $\tau=[0,5(n-1)]$ кроків ($[\cdot]$ – ціла частина числа) ми, очевидно, розподілимо всі елементи множини $\bar{S}^k_n(G)$ за гіпергранями многогранників $\bar{Q}^k_{n^*_i}(G^*_i)$, де n^*_i обчислюється за формулою (2.81), G^*_i визначається співвідношеннями (2.82), $i\in J^o_\tau$. Таким чином, справедлива формула (2.84). Теорема доведена.

Наслідок 2.71. Справедливе співвідношення

$$\bar{S}^k_n(G)=\bigcup_{i=0}^{\tau}\left[\bar{S}^k_{n^*_i}(G^*_i)\setminus\tilde{S}^k_{n^*_i}(G^*_i)\right], \tag{2.85}$$

де n^*_i, G^*_i, τ означаються формулами (2.81), (2.82), (2.83) відповідно, а $\tilde{\bar{S}}^k_{n_i^*}(G_i^*)$ – множина елементів з $\tilde{\bar{S}}^k_{n_i^*}(G_i^*)$, кожний з яких не містить чисел, рівних e_{i+1}, e_{n-i}.

Доведення. Справедливість твердження випливає беспосередньо з теореми 2.70 і структури множин $\tilde{\bar{S}}^k_{n_i^*}(G_i^*)$, $\tilde{\bar{S}}^k_{n_i^*}(G_i^*)$.

Зауваження 2.10. Якщо $n=2q-1$, то $\bar{Q}^k_\tau(G_\tau^*)=\{(e_q, e_q, \dots, e_q)\}$, де τ визначається формулою (2.83), G_τ^* – співвідношеннями (2.82), тобто в цьому випадку многогранник являє собою точку.

Якщо $g_i\in\{e_1, e_2\}$, $\forall i\in J_n$, $n=2$, то, очевидно, що $\tau=0$, тобто всі точки $x\in\bar{S}^k_2(G)\subset bd\ \bar{Q}^k_2(G)$. Більш того, $\bar{S}^k_2(G)=\mathrm{vert}\,\bar{Q}^k_2(G)$, що випливає з теорем 2.38, 2.40. Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 2.72. Якщо $g_i\in\{e_1,e_2\}$, $\forall i\in J_n$, $n=2$, то $\bar{S}^k_2(G)=\mathrm{vert}\,\bar{Q}^k_2(G)$.

Теорема 2.73. Справедливе співвідношення

$$\bar{S}^k_n(G)\subset\bigcup_{i=0}^{\tau}\left[\bar{S}^k_{n_i^*}(G_i^*,H(1,\tau+1))\cup\bar{S}^k_{n_i^*}(G_i^*,H(k+1,n-\tau))\right], \quad (2.86)$$

де n_i^*, G_i^*, τ означаються співвідношеннями (2.81), (2.82) та (2.83) відповідно.

Доведення. Справедливість формули (2.86) випливає із співвідношення (2.85) з урахуванням позначень, що прийняті в формулах (2.68), (2.70), (2.71).

Зазначимо, що ряд результатів, які відносяться до властивостей множини сполучень без повторення досліджено в праці [87].

Зауважимо, що ряд результатів, які відносяться до властивостей множини сполучень з повтореннями у більш стислому вигляді уперше розглянуто в працях [62, 88].

У наступному розділі розглянемо застосування властивостей евклідових комбінаторний множин при побудові методів і алгоритмів розв"язання оптимізаційних задач на цих множинах.

3. ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ, МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1. Задачі з лінійною функцією цілі без додаткових обмежень

Розглянемо лінійну задачу (1.12), (1.13), обмежившись для визначеності випадком мінімізації, тобто розглянемо задачу безумовної мінімізації лінійної цільової функції: знайти

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in E_f} \Phi(x); \qquad (3.1)$$

$$x^* = \arg\min_{x \in E_f} \Phi(x), \qquad (3.2)$$

де E_f – е-множина простору R^k, а $\Phi(x)$ – лінійна функція:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \qquad (3.3)$$

де $c_i \in R^1$ $\forall i \in J_k$. Задача (3.1)-(3.3) – це лінійна е-задача без додаткових обмежень. Цей факт дозволяє для її розв'язання скористатися наступною задачею лінійного программування: знайти

$$\Phi(y^*) = \min_{y \in \mathrm{vertconv}E_f} \sum_{i=1}^{k} c_i y_i, \qquad (3.4)$$

$$y^* = \arg\min_{y \in \mathrm{vertconv}E_f} \sum_{i=1}^{k} c_i y_i. \qquad (3.5)$$

Тут $\mathrm{vertconv}E_f$ – множина вершин опуклої оболонки $\mathrm{conv}E_f$ е-множини E_f. Очевидно, що розв'язування задач (3.4), (3.5) та (3.1)-(3.3) еквівалентно, тобто $\Phi(x^*)=F(y^*)$, а якщо x^*, y^* – єдині, то $x^*=y^*$. На цьому грунтується підхід до розв"язання задачі (3.1)-(3.3) для е-множин, що розглядається далі.

Розглянемо задачу на загальній множині розміщень $E^k_{\eta n}(G)$: знайти

$$\arg\min_{x=(x_1,\dots,x_k) \in E^k_{\eta n}(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad c_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k. \qquad (3.6)$$

Не порушуючи спільності подальших міркувань, можемо вважати, що виконуються нерівності

$$c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_s \geqslant 0 > c_{s+1} \geqslant \ldots \geqslant c_k; \quad s \in J_k^o. \qquad (3.7)$$

Теорема 3.1. Якщо

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*) = \arg\min_{x \in E_{\eta n}^k(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \ c_j \in R^1 \ \forall j \in J_k$$

та виконуються умови (3.7) та (2.46), то

$$x_i^* = g_i \quad \forall i \in J_s; \quad x_{s+i}^* = g_{\eta-r+i} \quad \forall i \in J_r, \qquad (3.8)$$

де

$$r + s = k; \quad r, s \in J_k^o. \qquad (3.9)$$

Доведення. Проведемо його від супротивного. Нехай точка x^*, що обчислюється за формулами (3.8), при виконанні умов (3.7) та (2.46) не задовольняє співвідношенню (3.6). Згідно з критерієм вершини загального многогранника розміщень $\Pi_{\eta n}^k(G)$ (теорема 2.33) видно, що x^* – вершина цього многогранника. За припущенням точка x^* не є точкою мінімума, тому існує суміжна з x^* вершина $x \in \Pi_{\eta n}^k(G)$, в якій виконується умова

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j < \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^*. \qquad (3.10)$$

Згідно з критерієм суміжності вершин загального многогранника розміщень (теорема 2.35) вершина x суміжна з x^*, якщо вона одержана з вершини x^* переставленням не рівних елементів g_i, g_{i+1}, $i \in J_{s-1}$ або $i \in J_{\eta-1} \setminus J_{\eta-r}$, чи заміною g_s ($g_{\eta-r+1}$) на $g_{\eta-r}$ (g_{s+1}), при умові $g_s \neq g_{\eta-r}$ ($g_{\eta-r+1} \neq g_{s+1}$), де s, r задовольняють рівності (3.9).

Перепишемо нерівність (3.10) у вигляді

$$0 < \sum_{j=1}^{k} c_j (x_j^* - x_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i; j \neq q}}^{k} c_j (x_j^* - x_j) + c_i (x_i^* - x_i) + c_q (x_q^* - x_q),$$

де i та q відповідають різним компонентам у вершинах x^* – x. Так як $x_j^* = x_j$ $\forall j \neq i$ $\forall j \neq q$, $\forall j \in J_k$, то останнє співвідношення набуває вигляду:

$$c_i(x_i^* - x_i) + c_q(x_q^* - x_q) > 0. \qquad (3.11)$$

Розглянемо усі можливі значення i та q:

а) $q=i+1$, $i \in J_{s-1}$, s задовольняє умові (3.9). Тобто $x_i^*=g_i$, $x_q=g_i$ і $x_q^*=g_{i+1}$, $x_i=g_{i+1}$. Підставляючи ці значення в нерівність (3.11), одержуємо $c_i(g_i-g_{i+1})+c_{i+1}(g_{i+1}-g_i)>0$ або $(g_{i+1}-g_i)(c_{i+1}-c_i)>0$. В силу умови (2.46) $g_{i+1}-g_i \geq 0$, тоді $c_{i+1}-c_i>0$, що суперечить умові (3.7).

б) $i=s+j$, $j \in J_{r-1}$, $r>1$, $q=i+1$; r та s задовольняють умові (3.9). Тоді $x_{s+j}^*=g_{n-r+j}$, $x_{s+j+1}^*=g_{n-r+j+1}$, $x_{s+j+1}=g_{n-r+j}$, $x_{s+j}=g_{n-r+j+1}$. При цьому з нерівності (3.11) одержуємо $c_{s+j}(g_{n-r+j}-g_{n-r+j+1}) + c_{s+j+1}(g_{n-r+j+1} - g_{n-r+j})>0$, $(c_{s+j} - c_{s+j+1})(g_{n-r+j}-g_{n-r+j+1})>0$. В силу (2.46) $g_{n-r+j}-g_{n-r+j+1} \geq 0$, тобто $c_{s+j}-c_{s+j+1}<0$, що суперечить умові (3.7).

в) $q \in \varnothing$, $i=s$, $x_i^*=g_s$, $x_i=g_{n-r}$, r та s задовольняють умові (3.9). З нерівності (3.11) при цьому випливає, що $c_s(g_s-g_{n-r})>0$. В силу умови (3.7) $c_s>0$, тому одержуємо, що $g_s-g_{n-r}>0$ або $s>n-r$, тобто $s+r=k>n$, що суперечить нерівності $k \leq n$ з означення е-множини.

г) $q \in \varnothing$, $i=s+1$, $x_i^*=g_{n-r+1}$, $x_i=g_{s+1}$, r та s задовольняють умові (3.9). При цьому нерівність (3.11) набуває вигляду $c_{s+1}(g_{n-r+1}-g_{s+1})>0$. В силу умови (2.46), а також так як $n-r+1 \geq s+1$ (це випливає з умови (3.9): $n \geq k=r+s$) одержуємо, що $g_{n-r+1}-g_{s+1} \geq 0$. Тобто $c_{s+1}>0$, що протирічить умові (3.7).

Таким чином, при будь-яких значеннях i та q в припущенні, що x^* не задовольняє співвідношення (3.6), отримали протиріччя, що і доводить теорему.

Зауваження 3.1. Можна розглядати $g_1, \ldots, g_n$ як значення деякої функції $v(\bar{g}_{\alpha_i})=g_i$, $\alpha_i, i \in J_n$, де $\bar{g}_{\alpha_i}$ належать деякій мультимножині $\bar{G}=\{\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{\bar{n}}\}$, $\bar{g}_1 \le \ldots \le \bar{g}_{\bar{n}}$, при цьому $v: E^k_{\eta\bar{n}}(\bar{G}) \to E^k_{\eta n}(G)$. Тут $\bar{n}$ – кількість елементів основи $S(\bar{G})$ мультимножини $\bar{G}$. Зрозуміло, що для однозначності функції v необхідно, щоб $\bar{n} \ge n$. З співвідношення (2.46) випливає

$$v(\bar{g}_{\alpha_1}) \le \ldots \le v(\bar{g}_{\alpha_\eta}). \qquad (3.12)$$

З урахуванням зауваження 3.1 з теореми 3.1 випливає такий наслідок:

<u>Наслідок 3.2.</u> Якщо

$$\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \ldots, \bar{x}_k^*) = \arg \min_{x \in E^k_{\eta\bar{n}}(\bar{G})} \sum_{j=1}^{k} c_j v(x_j)$$

і виконуються умови (3.7), (3.12), то

$$\bar{x}_i^* = \bar{g}_{\alpha_i} \ \ \forall i \in J_s; \ \bar{x}_{s+i}^* = \bar{g}_{\alpha_{\eta-r+i}} \ \ \forall i \in J_r, \qquad (3.13)$$

де r та s задовольняють умові (3.9).

<u>Зауваження 3.2.</u> Якщо немає можливості забезпечити виконання умови (3.7), то теорему 3.1 та наслідок 3.2, очевидно, можна переформулювати наступним чином. Нехай $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ – переставлення елементів множини J_k, тобто $\beta \in E_k(J_k)$ таке, що

$$c_{\beta_1} \ge \ldots \ge c_{\beta_s} \ge 0 > c_{\beta_{s+1}} \ge \ldots \ge c_{\beta_k}, \ s \in J_k^0. \qquad (3.14)$$

Тоді мінімум функції (3.3) на множині $E^k_{\eta n}(G)$ досягається в точці $x^*=(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in E^k_{\eta n}(G)$, яка задовольняє умовам

$$x^*_{\beta_i} = g_i \ \ \forall i \in J_s; \ x^*_{\beta_{s+i}} = g_{\eta-r+i} \ \ \forall i \in J_r, \qquad (3.15)$$

де переставлення $\beta \in E_k(J_k)$ та константа $s \in J_k^0$ задовольняють умові (3.14), елементи мультимножини G – умові (2.46), сталі r та s – умові (3.9). Мінімум же функції

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j v(x_j) \qquad (3.16)$$

на множині $E^k_{\eta\bar{n}}(\bar{G})$ дає точка $\bar{x}^*=(\bar{x}_1^*, \ldots, \bar{x}_k^*) \in E^k_{\eta\bar{n}}(\bar{G})$, де

$$\bar{x}^*_{\beta_i} = \bar{g}_{\alpha_i} \quad \forall i \in J_s; \quad \bar{x}^*_{\beta_{i+s}} = g_{\alpha_{\eta-r+i}} \quad \forall i \in J_r, \qquad (3.17)$$

а переставлення $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_\eta)$, $\alpha \in E_\eta(J_\eta)$, задовольняє умові (3.12), переставлення $\beta \in E_k(J_k)$ та стала $s \in J^o_k$ – співвідношенням (3.14), константи r та s – умовам (3.9).

<u>Зауваження 3.3.</u> Очевидно, якщо $\eta_1=\ldots=\eta_n=1$ (тобто $\eta=n$), то $E^k_{\eta n}(G)=E^k_n(G)$, де $E^k_n(G)$ – множина k-розміщень без повторення. Якщо $\eta_i=k$ $\forall i \in J_n$, то $E^k_{\eta n}(G)=\bar{E}^k_n(G)$ – множина k-розміщень з повтореннями. Якщо $n=k$ $E^k_{\eta n}(G)=E_{\eta n}(G)$ – множина переставлень з повтореннями, а якщо $\eta=n=k$, то $E^k_{\eta n}(G)=E_n(G)$ – множина переставлень без повторення. Тому все, що розглянуто для множини $E^k_{\eta n}(G)$, справедливо і в цих часткових випадках.

Розглянемо розв'язок лінійної е-задачі без додаткових обмежень на множині сполучень з повтореннями $\bar{S}^k_n(G)$.

<u>Теорема 3.3.</u> Якщо

$$x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_k) = \arg\min_{x \in \bar{S}^k_n(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad c_j \in R^1 \ \forall j \in J_k, \qquad (3.18)$$

стала $s \in J^o_k$ визначається системою нерівностей

$$\sum_{1}^{t} c_{s+1-j} \geq 0 \quad \forall t \in J_s; \quad \sum_{j=1}^{t} c_{s+j} \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s}, \qquad (3.19)$$

то

$$x^*_i = e_1 \quad \forall i \in J_s; \quad x^*_i = e_n \quad \forall i \in J_k \setminus J_s, \qquad (3.20)$$

де e_1 – найменший елемент основи $S(G)$ мультимножини G, а e_n – найбільший елемент $S(G)$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо многогранник $\bar{Q}^k_n(G)=\operatorname{conv}\bar{S}^k_n(G)$. Очевидно, що

$$x^* = \arg\min_{x \in \bar{S}^k_n(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \arg\min_{x \in \bar{Q}^k_n(G)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j. \qquad (3.21)$$

Як добре відомо, лінійна функція досягає мінімуму у вершині допустимого многогранника. З теорем випливає, що вершинами многогранника $\bar{Q}^k_n(G)$ можуть бути тільки точки вигляду $y_j=(e_1, \ldots, e_1, e_n,$

$\dots,e_n)$, де координата e_1 повторюється $k-j+1$ разів, а e_n – $j-1$ разів, $j\in J_{k+1}$, а e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елемент основи $S(G)$ мультимножини G. Припустимо, що $x^*=y_{k-i+1}$, тобто x^* містить i ($i\in J_k^o$) перших координат e_1, $k-i$ координат e_n. Згідно з теоремою 2.57 решта k вершин многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ суміжні з x^*. Як відомо, значення $(c,x^*)=(c,y_{k-i+1})=c_1x_1^*+\dots+c_kx_k^*=e_1(c_1+\dots+c_i)+$ $+e_n(c_{i+1}+\dots+c_k)$, якщо x^* задовольняє співвідношенню (3.18), не більше значення цієї функції у всіх суміжних з x^* k вершинах многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$. Запишемо ці k нерівностей та перетворимо їх, позначивши $\delta=e_n/e_1$ і розглянувши при цьому три випадки, а саме: 1) $e_1>0$; 2) $e_1<0$; 3) $e_1=0$. Маємо

$$\begin{cases} (c,x^*) \le e_1(c_1+\dots+c_k); \\ (c,x^*) \le e_1(c_1+\dots+c_{k-1})+e_nc_k; \\ \dots \\ (c,x^*) \le e_1(c_1+\dots+c_{i+1})+e_n(c_{i+2}+\dots+c_k); \\ (c,x^*) \le e_1(c_1+\dots+c_{i-1})+e_n(c_i+\dots+c_k); \\ \dots \\ (c,x^*) \le e_1c_1+e_n(c_2+\dots+c_k); \\ (c,x^*) \le e_n(c_1+\dots+c_k). \end{cases} \tag{3.22}$$

Розглянемо перший випадок ($e_1>0$), поділивши обидві частини усіх нерівностей на e_1. З урахуванням того, що $(c,x^*)=e_1(c_1+\dots+c_i)+$ $+e_n(c_{i+1}+\dots+c_k)$, перетворимо систему (3.22) до вигляду

$$\begin{cases} (\delta-1)(c_{i+1}+\dots+c_k) \le 0; \\ (\delta-1)(c_{i+1}+\dots+c_{k-1}) \le 0; \\ \dots \\ (\delta-1)c_{i+1} \le 0; \\ (1-\delta)c_i \le 0; \\ \dots \\ (1-\delta)(c_1+\dots+c_i) \le 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

II^x

З урахуванням $\delta>1$ з (3.23) маємо:

$$\begin{cases} c_{i+1}+\ldots+c_k \leqslant 0; \\ c_{i+1}+\ldots+c_{k-1} \leqslant 0; \\ \ldots \\ c_{i+1} \leqslant 0; \\ c_i \geqslant 0; \\ c_{i-1}+c_i \geqslant 0; \\ \ldots \\ c_1+\ldots+c_i \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3.24)$$

Система нерівностей (3.24) збігається з (3.19), якщо $i=s$.

Аналогічно діємо у другому випадку ($e_1<0$). Так як $\delta=e_n/e_1<1$, то одержуємо знову систему (3.24). У третьому випадку ($e_1=0$, а отже, $e_n=0$) система (3.24) випливає відразу з системи (3.22). Таким чином, стала $s=i$ повинна задовольняти умовам (3.24), або, що те саме - (3.19), що і треба було довести.

<u>Зауваження 3.4.</u> Звернемо увагу на таку обставину. Позначимо $c'=c_0+c_1+\ldots+c_i$, $c_0=0$, $c''=c_{i+1}+\ldots+c_k$, $c'+c''=C$. Знайдемо мінімум по змінній i ($i\in J_k^o$) функції $c'e_1+c''e_n=c_1'e_1+(C-c')e_n=c'(e_1-e_n)+Ce_n$. *В силу того, що* $C=const$, $e_n=const$, $e_1<e_n$, маємо, що мінімум $c'e_1+c''e_n=c'(e_1-e_n)+Ce_n$ досягається при c' максимальному, тобто при $i=s$, яке знаходиться зі співвідношення (при $c_0=0$)

$$c_0+c_1+\ldots+c_s = \max_{i\in J_k^o}(c_0+c_1+\ldots+c_i). \qquad (3.25)$$

Тобто умови (3.19) та (3.25) - еквівалентні. Якщо стала s, що визначається співвідношеннями (3.19) або (3.25), не є єдиною, то це означає, що мінімум досягається не в одній, а в кількох вершинах многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ одночасно.

<u>Наслідок 3.4.</u> Якщо $x^*=(x_1^*,\ldots,x_k^*) = \arg\max_{x\in\bar{S}_n^k(G)} \sum_{j=1}^k c_jx_j$, $c_j\in R^1$ $\forall j\in J_k$, стала $s\in J_k^o$ визначається системою нерівностей -

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{t} c_{s+1-j} \leq 0 \quad \forall t \in J_s; \\ \sum\limits_{j=1}^{t} c_{s+j} \geq 0 \quad \forall t \in J_{k-s}, \end{cases} \tag{3.26}$$

e_1 – найменший, а e_n – найбільший елементи основи $S(G)$ мультимножини G, то координати точки x^* обчислюються за формулами (3.20).

Зазначимо, що умова (3.25) еквівалентна при $c_0=0$ наступній:

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_s = \min_{i \in J_k^0} (c_0 + c_1 + \ldots + c_i). \tag{3.27}$$

Зауваження 3.5. Розглянемо задачу: знайти

$$x^* = \arg \min_{x \in \bar{S}_{\bar{n}}^k(\bar{G})} \sum_{j=1}^{k} c_j v(x_j), \; c_j \in R^1 \; \forall j \in J_k,$$

де v – деяка функція, $v: R^1 \to R^1$, $\bar{G} = \{\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_\eta\}$ – деяка мультимножина з основою з $\bar{n}$ елементів. Можна розглядати $g_1, \ldots, g_\eta$ як значення функції $v(\bar{g}_{\alpha_i}) = g_i$; $\alpha_i, i \in J_\eta$, тобто $v: \bar{S}_{\bar{n}}^k(\bar{G}) \to \bar{S}_n^k(G)$. Зрозуміло, що для взаємної однозначності функції необхідно, щоб $\bar{n}=n$. Позначимо

$$\bar{g}_{\alpha_1} = \arg \min_{j \in J_\eta} v(\bar{g}_{\alpha_i}), \; \bar{g}_{\alpha_\eta} = \arg \max_{j \in J_\eta} v(\bar{g}_{\alpha_i}). \tag{3.28}$$

З урахуванням цього зауваження з теореми 3.3 випливає:

Наслідок 3.5. Якщо $\bar{x}^* = (\bar{x}_1^*, \ldots, \bar{x}_k^*) = \arg \min\limits_{x \in \bar{S}_{\bar{n}}^k(\bar{G})} \sum\limits_{j=1}^{k} c_j v(x_j)$, стала $s \in J_k^0$ визначається співвідношенням (3.19) або умовою (3.25), то $\bar{x}_i^* = \bar{g}_{\alpha_1}$ $\forall i \in J_s$; $\bar{x}_i^* = \bar{g}_{\alpha_\eta}$ $\forall i \in J_k \setminus J_s$, де α_1, α_η обчислюються за формулами (3.28).

Одержимо розв'язок лінійної e-задачі без додаткових обмежень на загальній поліпереставній множині $E(G,H)$.

Нехай, як і раніше $G^{K_i} \subset G$ – k_i-елементна мультимножина, що утворена елементами мультимножини G $g_{k_1^i}, \ldots, g_{k_{k_i}^i}$ з номерами з множини K_i, $k_1 + \ldots + k_s = k$, $k_i = |K|_i$ $\forall i \in J_s$.

Теорема 3.6. Якщо

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*) = \arg\min_{x \in E(G,H)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad c_j \in R^1 \ \forall j \in J_k, \tag{3.29}$$

$$c_{\alpha_1^q} \geq c_{\alpha_2^q} \geq \dots \geq c_{\alpha_{k_q}^q}, \quad \forall q \in J_s, \tag{3.30}$$

переставлення $(\alpha_1^q, \dots, \alpha_{k_q}^q) \in E_{k_q}(N_q')$, $k_1 + \dots + k_s = k$, елементи мультимножини G^{K_q} упорядковані згідно з нерівностями

$$g_1^{K_q} \leq g_2^{K_q} \leq \dots \leq g_{k_q}^{K_q} \quad \forall q \in J_s, \tag{3.31}$$

N_q' обчислюється за формулою

$$N_i' = \{(\sum_{j=1}^{i-1} k_j) + 1, \dots, \sum_{j=1}^{i} k_j\} \quad \forall i \in J_s, \tag{3.32}$$

тоді

$$x_{\alpha_j^q}^* = g_j^{K_q}, \ \forall j \in J_{k_q}, \ \forall q \in J_s. \tag{3.33}$$

Доведення. Проведемо його від супротивного. Нехай для точки $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ виконується умова (3.33), і також припустимо, що ця точка не задовольняє співвідношенню (3.29). Тобто існує суміжна з x^* вершина $y \in \mathrm{vert}\,\Pi(G,H)$ така, що

$$c_1 x_1^* + \dots + c_k x_k^* > c_1 y_1 + \dots + c_k y_k. \tag{3.34}$$

Згідно з теоремою 2.23 вершини x^* та y відрізняються тільки в двох компонентах, які дорівнюють $g_j^{K_q}$ та $g_{j+1}^{K_q}$ і стоять в точках x^* та y на різних місцях, тобто $\Delta = c_1 x_1^* + \dots + c_k x_k^* - (c_1 y_1 + \dots + c_k y_k) = c_{\alpha_j^q} g_j^{K_q} + c_{\alpha_{j+1}^q} g_{j+1}^{K_q} - c_{\alpha_j^q} g_{j+1}^{K_q} - c_{\alpha_{j+1}^q} g_j^{K_q} = (g_{j+1}^{K_q} - g_j^{K_q})(c_{\alpha_{j+1}^q} - c_{\alpha_j^q})$.

В силу співвідношень (3.30) та (3.31) $\Delta \leq 0$, що суперечить нерівності (3.34). Тобто наше припущення, що умова (3.29) для точки x^* не виконується, не вірне. Таким чином, x^* - точка, яка дає лінійній функції мінімум на множині $E(G,H)$, що і треба було довести.

Наслідок 3.7. Якщо

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*) = \arg\max_{x \in E(G,H)} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j, \quad c_j \in R^1 \ \forall j \in J_k, \tag{3.35}$$

виконуються співвідношення (3.30)-(3.32), $k_1+\ldots+k_s=k$, $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{kq}(N'_q)$, тоді

$$x^*_{\alpha_j^q} = g^{K_q}_{k_q-j+1}, \quad \forall j\in J_{k_q}, \quad \forall q\in J_s . \tag{3.36}$$

Розглянуто е-задачі з лінійними цільовими функціями без додаткових обмежень. Першоджерелами є праці [62, 88, 89] та інші. Випадок лінійних додаткових обмежень, які суттєво ускладнюють розв'язання задач, розглядається далі.

3.2. Задачі з лінійною функцією цілі і додатковими лінійними обмеженнями

Питання розв'язування лінійних е-задач з додатковими лінійними обмеженнями розглянемо спочатку на прикладі множини $E_{kn}(G)$. Нехай необхідно визначити

$$y^* = \arg\min_{y\in R^m} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{3.37}$$

при обмеженнях

$$x = (x_1, \ldots, x_k)\in E_{kn}(G)\subset R^k \tag{3.38}$$

та при додаткових обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le b_i \quad \forall j\in J_r ; \tag{3.39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i(r+t)} y_i = b_{r+t} , \quad \forall t\in J_s, \tag{3.40}$$

де $y=(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m)\in R^m$, $x_i=y_i$ $\forall i\in J_k$. Тут m, r, s – задані натуральні числа, а a_{ij}, b_j, c_i – задані дійсні числа $\forall i\in J_m$, $\forall j\in J_{r+s}$, $m\ge k$. Не обмежуючи спільності подальших міркувань, очевидно, можна замість задачі (3.37)-(3.40) розглядати задачу (3.37)-(3.39).

Розглянемо метод наближеного розв'язування е-задачі

(3.37)-(3.39), що складається з трьох етапів.

Перший етап полягає в розв'язуванні наступної задачі лінійного програмування (ЛП): знайти розв'язок $\tilde{y}$ задачі (3.37) при додаткових обмеженнях (3.39) та умові

$$x \in \Pi_{kn}(G). \qquad (3.41)$$

Тут $\Pi_{kn}(G)$ - загальний переставний многогранник, що визначається системою обмежень (2.5).

В силу наявності додаткових обмежень перші k координат точки $\tilde{y}$ можуть не бути переставленням елементів $g_1, \ldots, g_k$ мультимножини G, навіть якщо $\tilde{y}$ - вершина допустимої області задачі (3.37), (3.39), (3.41). Через це є необхідним другий етап в розв'язуванні задачі (3.37)-(3.39). Він полягає в побудові по точці $\tilde{y}$ точки $\tilde{y}^o \in R^m$, яка має ту ознаку, що перші k координат її є переставленнями чисел $g_1, \ldots, g_k$. Цей процес назвемо округленням до переставлення (переставним округленням).

У точці $\tilde{y}^o$ додаткові обмеження можуть не виконуватися, тому необхідний третій етап розв'язування задачі (3.37)-(3.39) - етап формування точки $\tilde{y}^* \in R^m$, яка має ознаку точки $\tilde{y}^o$ та задовольняє при цьому додатковим обмеженням (3.39). Таким чином, одержуємо наближений розв'язок задачі (3.37)-(3.39), який позначено $\tilde{y}^*$.

Перш ніж перейти до докладного розгляду етапів розв'язування задачі (3.37)-(3.39), зазначимо таке. Теореми 2.14-2.18 обгрунтовують властивості загальної множини переставлень $E_{kn}(G)$, пов'язані з розкладенням її по паралельних $(k-2)$-площинах. Ці властивості дають можливість сформулювати деякі достатні умови, при яких викладений метод розв'язування задачі (3.37)-(3.39) є точним. Зокрема, справедливе наступне твердження.

Теорема 3.8 [90, 91]. Якщо $k=n=m$, а розв'язування задачі

(3.37)-(3.39) провадиться викладеним методом, та на першому етапі допоміжна задача ЛП (3.37), (3.39), (3.41) розв'язується способом, що дає вершину $\tilde{y}$ допустимої області, то якщо вершина $\tilde{y}$ існує, вона дає точний розв'язок задачі (3.37)-(3.39), якщо обмеження (3.39) мають вигляд (2.33), або одержується з рівностей (2.33) заміною знаків рівностей на знаки $\geq$, або $\leq$.

<u>Доведення.</u> З теорем 2.14-2.18, очевидно, випливає, що гіперплощини виду (2.33) перетинають ребра загального переставного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ тільки у вершинах. В силу паралельності цих гіперплощин додаткових вершин допоміжної задачі ЛП, крім тих, що має многогранник $\Pi_{kn}(G)$, не виникає. Тобто, якщо допоміжна задача має розв'язок $\tilde{y}$, то $\tilde{y} \in vert \Pi_{kn}(G)$. За теоремою 2.4 $vert \Pi_{kn}(G) = E_{kn}(G)$, тобто $\tilde{y} \in E_{kn}(G)$, що і треба було довести.

<u>Зауваження 3.6.</u> Аналогічне твердження справедливе і для множин гіперплощин $\langle T_s^t \rangle$, розглянутих в [4], а також для інших e-множин, які допускають розкладання на підмножини, розташовані на паралельних площинах, якщо ці площини перетинаються з ребрами опуклих оболонок e-множин по вершинах. Зокрема, для загальної поліпереставної множини маємо наступне твердження.

<u>Теорема 3.9</u> [92]. Якщо викладеним триетапним методом провадити розв'язування задачі (3.37) при обмеженнях

$$x \in E(G,H) \subset R^k , \tag{3.42}$$

та додаткових обмеженнях (3.39), які мають вигляд

$$\sum_{j \in \omega^i} x_j = \sum_{j \in \beta_t^i} g_j^{K_i}, \tag{3.43}$$

де $|\omega^i| = |\beta_t^i|$, $\beta_t^i \subset J_{k_i}$, $\omega^i \subset N_i'$, множина N_i' задається формулою (3.32), $i \in J_s$, $\forall t \in J_r$; або які одержуються з рівностей (3.43) заміною $\forall t \in J \subset J_r$ знаків рівностей на знаки $\geq$, або $\leq$, а також якщо на першому етапі допоміжну задачу ЛП, яка одержується заміною обмеження (3.42) на умову $x \in \Pi(G,H)$, розв'язувати способом, що дає вершину $\tilde{y}$ допустимої області, і якщо точка $\tilde{y}$ існує, то вона дає точний розв'зок задачі (3.37), (3.39), (3.42).

Доведення. Обгрунтування теореми провадиться аналогічно доведенню теореми 3.8 з використанням теореми 2.22.

Розглянемо тепер докладно перший етап розв'язування задачі (3.37)-(3.39), який полягає в розв'язуванні задачі (3.37), (3.39), (3.41).

Як випливає з зауваження 2.1, система обмежень (2.5), що описує загальний переставний многогранник $\Pi_{kn}(G)$, має 2^k обмежень. Отже задача ЛП (3.37), (3.39), (3.41) - це задача ЛП великого розміру, причому кількість обмежень значно перевищує кількість невідомих. Далі викладається метод послідовного приєднання обмежень (МПІО) для розв'язання таких задач ЛП [93, 94, 95].

Отже, нехай необхідно знайти

$$y^{\tau} = \arg \min_{y \in D_{\tau}} \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{3.44}$$

при $\tau=0$, де $y=(y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, $c_i \in R^1$ $\forall i \in J_m$ область $D_0 \subset R^m$ визначається системою S, яка складається з q обмежень

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le b_j \quad \forall j \in J_q, \tag{3.45}$$

де a_{ij}, b_j - деякі дійсні числа $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_q$. Припускається, що $q \gg m$ і мінімізуєма функція на D_0 обмежена знизу.

Розглянемо МПІО розв'язування задачі (3.44), (3.45). Структурно він може бути представлений так. На першому кроці ($\tau=1$) формується система S_1 лінійних обмежень, що визначає деяку область D_1:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{it} y_i \le b_t, \quad t \in J \subset J_q. \tag{3.46}$$

При цьому система S_1 повинна задовольняти наступним трьом умовам: 1) $S_1 \subset S$; 2) $|J| \ll q$; 3) мінімізуєма функція, що входить в (3.44), на області D_1 обмежена знизу. Зазначимо, що довільність, яка є при виборі системи S_1, дозволяє формувати її у кожному конкретному випадку таким чином, щоб розв'язок y^1 задачі (3.44), (3.46) був якомога ближче до розв'язку y^0 задачі (3.44), (3.45) (чи у метриці простору R^m, чи по значенню мінімізуємої функції).

На другому кроці МПЮ знаходиться розв'язок задачі (3.44) на області D_τ (при поточному значенні індекса τ ($\tau \geq 1$)).

Третій крок складається з перевірки виконання умови

$$y^\tau \in D_0 . \tag{3.47}$$

<u>Теорема 3.10.</u> Якщо виконується умова (3.47), то y^τ є розв'язком задачі (3.44), (3.45).

<u>Доведення.</u> За побудовою $D_\tau \supset D_0$, отже $\min\limits_{y \in D_0} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i \geq \min\limits_{y \in D_\tau} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i$,

але $y^\tau = \arg\min\limits_{y \in D_\tau} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i \in D_0$, тому $\min\limits_{y \in D_0} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i = \min\limits_{y \in D_\tau} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i$,

звідкіля і випливає справедливість твердження.

Таким чином, якщо виконується умова (3.47), то це означає, що розв'язок задачі (3.44), (3.45) отримано, тобто процес розв'язання закінчений. В супротивному випадку необхідний четвертий крок МПЮ, який полягає в формуванні $S_{\tau+1}$. При цьому до системи обмежень S_τ залучається частина (або всі) нерівності системи $S \setminus S_\tau$, які у точці y^τ не виконуються, тобто область D_τ заміняється на $D_{\tau+1}$, $D_\tau \supset D_{\tau+1}$. Збільшуємо τ на одиницю і переходимо до другого кроку МПЮ.

<u>Теорема 3.11.</u> МПЮ закінчує роботу після скінченної кількості своїх кроків.

<u>Доведення.</u> Достатньо помітити, що S – скінченна множина обмежень. Отже, множина, що складається з непустих підмножин S, які не перетинаються, також скінченна. Тому на третьому кроці МПЮ повернення на другий крок проходить лише скінченну кількість разів,

12^x

що і доводить твердження теореми.

Зазначимо, що МППО ідейно близький до методу відсікаючих гіперплощин [98, с.101] в опуклому програмуванні.

Розглянемо тепер застосування МППО до розв'язування задачі (3.37), (3.39), (3.41). Сформуємо систему обмежень S_1 так. Включимо до неї всі обмеження (3.39), а з системи (2.5) - обмеження спілок з номерами 0 та k (тобто гіперплощину (2.1)). Оскільки система (2.5) містить 2^k обмежень, то суттєвим є організація обчислень на третьому кроці МППО. Скористуємося наступним фактом.

Теорема 3.12. Нехай $z=(z_1, \ldots, z_m)\in R^m$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $x_q=z_q$ $\forall q\in J_k$,

$$x_j \leq x_{j+1} \quad \forall j\in J_{k-1}. \tag{3.48}$$

Тоді з виконання обмеження

$$x_1+\ldots+x_i \geq g_1+\ldots+g_i , \tag{3.49}$$

що належить спілці нерівностей за номером i системи (2.5), випливає виконання в тій же точці x і всіх інших обмежень i-ї спілки цієї системи, $i\in J_{k-1}$.

Доведення. Справедливість теореми випливає з того, що при виконанні нерівностей (3.48) для всіх нерівностей

$$x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_i} \geq g_1+\ldots+g_i , \tag{3.50}$$

$\alpha_j\in J_k$, $\forall j\in J_i$, що утворюють спілку під довільним номером i системи (2.5), $i\in J_{k-1}$, виконуються нерівності $x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_i}\geq x_1+\ldots+x_i$.

Це з урахуванням умови (3.49) дає виконання усіх співвідношень (3.50). Що і треба було довести.

Таким чином, з теореми 3.12 випливає, що для проведення перевірки (3.47) достатньо перевірити справедливість $k-1$ обмежень.

Кількість ітерацій МППО суттєво залежить від стратегії формування системи $S_{\tau+1}$. Розглянемо раціональні в цьому розумінні

стратегії. З наслідку 2.7 випливає, що раціональною стратегією формування системи обмежень $S_{\tau+1}$ є така, при якій по черзі для усіх різних $i\in J_{k-1}$ з системи (2.5) беруться з i-ї спілки та залучаються до S_τ нерівності, які не виконуються в точці y^τ. При цьому можливі дві ситуації: 1) до системи $S_{\tau+1}$ включається, крім S_τ, по одній нерівності з системи (2.5), які не виконуються в точці y^τ для усіх (можливих) $i\in J_{k-1}$; 2) в систему $S_{\tau+1}$ включається, крім S_τ, одна нерівність з системи (2.5), що не виконується в точці y^τ, для сталої $i=i_{\tau+1}$, яка визначається : так.
Для $\tau=1$: $i_{\tau+1}=1$; для $\tau>1$ $i_{\tau+1}=i_\tau+1$ (по $\mathrm{mod}(k-1)$). Якщо для спілки з номером $i_{\tau+1}$ системи (2.5) усі обмеження в точці y^τ виконуються, то $i_{\tau+1}$ збільшуємо на одиницю (по $\mathrm{mod}\ (k-1)$) доти, поки знайдеться відповідне обмеження, що не виконується в y^τ.

Таким чином, розглянуто МППЮ, який стосовно до задачі (3.37), (3.39), (3.41) реалізує перший етап розв'язування задачі (3.37)-(3.40). Розглянемо другий етап розв'язування цієї задачі - способи побудови точки $\tilde{y}^o$, тобто переставне округлення.

Нехай $\tilde{y}$ - точка з R^m, що одержана на першому етапі розв'язування е-задачі оптимізації на загальній множині переставлень при наявності додаткових лінійних обмежень і лінійній цільовій функції. Другий етап розв'язування задачі (3.37)-(3.39) може бути реалізований, наприклад, одним з наступних способів.

Викреслимо з набору k перших координат точки $\tilde{y}$ і з мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$ пару рівних чисел $\tilde{y}_i=g_j$, $i,j\in J_k$. Будемо так діяти доти, поки це можливо, формуючи при цьому координати точки $\tilde{y}^o$ наступним чином: $\tilde{y}^o_i=\tilde{y}_i$, $i\in J_k$. Позначимо не викреслені координати точки $\tilde{y}$ так: $\tilde{y}_{i_1}\leq\ldots\leq\tilde{y}_{i_t}$, а елементи мультимножини G, що залишилися, так: $g_{j_1}\leq \ldots \leq g_{j_t}$. Покладемо $\tilde{y}^o_{i_q}=g_{j_q}$, $i_q,j_q\in J_k$ $\forall q\in J_t$. Решту координат точки $\tilde{y}^o$ залишимо (в порівнянні з точкою

$\tilde{y}$) без змін.

Другий спосіб формування точки $\tilde{y}^o$ полягає в наступному. Нехай переставлення $(i_1, \ldots, i_k) \in E_k(J_k)$ відповідає упорядкуванню $\tilde{y}_{i_1} \leq \ldots \leq \tilde{y}_{i_k}$ перших k координат точки $\tilde{y}$. Тоді покладемо $\tilde{y}_{i_j} = g_j$ $\forall i_j, j \in J_k$. Решта координат точки $\tilde{y}^o$ формується таким же чином, як і в першому способі.

Третій етап розв'язування задачі (3.37)-(3.39) - формування точки $\tilde{y}^*$ - є досить важкою задачею для розв"язання її в загальному вигляді. Розглянемо формування точки $\tilde{y}^*$ для однієї задачі вигляду (3.37)-(3.39) [61, 95], яка полягає в наступному. Визначити

$$y^* = \arg\min_{y \in R^m} y_m , \tag{3.51}$$

$$x \in E_{kn}(G) \tag{3.52}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} y_{\gamma_{im_i}+t} - y_m \leq - d_{im_i} \quad \forall i \in J_q; \tag{3.53}$$

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} y_{\gamma_{ij}+t} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij}, \quad \forall j \in J_{m_i-1}, \quad \forall i \in J_q, \tag{3.54}$$

де $y=(y_1, \ldots, y_m)$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $x_i=y_i$ $\forall i \in J_k$, $m=k+1$,

$$\gamma_{ij} = \sum_{t=1}^{i-1} \sum_{\lambda=1}^{m_t} K_{t\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{j} K_{i\lambda} + 1 \quad \forall j \in J_{m_i}, \forall i \in J_q \setminus \{1\}, \tag{3.55}$$

$$\gamma_{1j} = \sum_{\lambda=1}^{j} K_{1\lambda} + 1 \quad \forall j \in J_{m_1}. \tag{3.56}$$

Тут K_{ij}, m_i, q, k, n - задані натуральні, а c_{ij}, d_{ij}, g_λ - дійсні сталі, причому $\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij}=k$, $c_{ij} \leq d_{ij}$, $c_{i1}=0$ $\forall j \in J_{m_i}$, $\forall i \in J_q$, $\forall \lambda \in J_k$.

Нехай одержано розв'язок $\tilde{y} \in R^m$ задачі ЛП - релаксованої задачі (3.51)-(3.56), в якій обмеження (3.52) замінено більш слабким - (3.41) (або, що те саме, (2.5)). Нехай точка $\tilde{y}^o$ побудована з точки $\tilde{y}$, як описано раніше.

Розглянемо спосіб формування по точці $\tilde{y}^o$ точки $\tilde{y}^*$. Покладемо

$$\tilde{y}^o_m = \max_{i\in J_q}\Big(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1}\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i}\Big),$$

де γ_{im_i} обчислюється за формулою(3.55),(3.56) $\forall i\in J_q$.

Нехай координати точки $\tilde{y}^o$ $\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t-1}$ $(t\in J_{K_{ij}})$ для фіксованої сталої γ_{ij}, яка обчислюється за формулою (3.55) або (3.56), $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$, такі, що при підставленні $\tilde{y}^o$ у відповідну нерівність з системи (3.53) або (3.54) ця нерівність не виконується. Тоді знайдемо $\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t^*} = \min_{t\in J^o_{K_{ij}-1}}\{\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t}\}$ при умові $\sum_{\substack{\lambda=0\\ \lambda\neq t}}^{K_{ij}-1}\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+\lambda}\leqslant c_{i(j+1)}-$ $-d_{ij}$, та $\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t^{**}} = \max_{t\in J^o_{K_{im_i}-1}}\{\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t}\}$ при умові $\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t} + \sum_{\substack{\lambda=0\\ \lambda\neq t}}^{K_{ij}-1}\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+\lambda}\leqslant$ $\leqslant c_{i(j+1)}-d_{ij}$, де γ_{ij}, $(j\in J_{m_i},\ i\in J_q)$ обчислюються за формулами (3.55), (3.56).

Далі покладемо $\tilde{y}^*_{\gamma_{ij}+t}=\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t}$ $\forall t\in J^o_{K_{ij}-1}\setminus\{t^*\}$; $\tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+\lambda}=\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+\lambda}$ $\forall\lambda\in J^o_{K_{im_i}-1}\setminus\{t^{**}\}$; $\tilde{y}^*_{\gamma_{ij}+t^*}=\tilde{y}^o_{\gamma_{im_i}+t^{**}}$; $\tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+t^{**}}=\tilde{y}^o_{\gamma_{ij}+t^*}$;

$\tilde{y}^*_m=\max_{i\in J_q}\Big(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1}\tilde{y}^*_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i}\Big)$. Решта координат точки $\tilde{y}^*$ задаються рівними координатам точки $\tilde{y}^o$ з тими ж номерами. Потім перепозначимо $\tilde{y}^o_i=\tilde{y}^*_i$ $\forall i\in J_m$. Описаний процес триватиме доти, поки не будуть розглянуті усі нерівності з систем (3.53), (3.54), що не виконуються в точці $\tilde{y}^o$. Таким чином, побудована точка $\tilde{y}^*$. Видається важливим оцінити відносну точність розв'язку задачі, що буде зроблено далі.

Розглянемо приклад розв'язування лінійної е-задачі з додатковими лінійними обмеженнями на загальній поліпереставній множині: знайти (3.37) при обмеженнях (3.42) і додаткових обмеженнях (3.39). А саме, нехай необхідно визначити точку $x=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\in R^{k+1}$, на якій досягається

$$x^*_{k+1} = \arg\min_{x\in R^{k+1}} x_{k+1} \qquad (3.57)$$

при обмеженнях (3.42) та при додаткових обмеженнях

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} x_{\gamma_{im_i\lambda}+t} + d_{im_i} \leqslant x_{k+1} \quad \forall i\in J_q, \qquad (3.58)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=0}^{K_{ij\lambda}} x_{\gamma_{ij\lambda}+t} \leqslant c_{i(j+1)} - d_{ij}, \ \forall j\in J_{m_i-1}, \ \forall i\in J_q, \qquad (3.59)$$

де $\gamma_{ij\lambda}$ обчислюється за формулами

$$\gamma_{ij\lambda}=\sum_{t=1}^{i-1} \sum_{\kappa=1}^{m_t} K_{t\kappa\lambda}+ \sum_{\kappa=1}^{j-1} K_{i\kappa\lambda}+1, \ \forall j\in J_{m_i}, \ \forall i\in J_q\setminus\{1\}, \ \forall\lambda\in J_s, \qquad (3.60)$$

$$\gamma_{1j\lambda} = \sum_{\kappa=1}^{j-1} K_{1\kappa\lambda} + 1, \ \forall j\in J_{m_1}\setminus\{1\}, \ \forall\lambda\in J_s, \qquad (3.61)$$

$$\gamma_{11\lambda} = 1, \ \forall\lambda\in J_s. \qquad (3.62)$$

Тут $K_{ij\lambda}\geqslant 1$, m_i, q, s, k - задані натуральні, а c_{ij}, d_{ij} - дійсні сталі, причому $\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda}=k_\lambda$, $\forall\lambda\in J_s$; $\sum_{\lambda=1}^{s} k_\lambda=k$; $c_{ij}\leqslant d_{ij}$, $c_{i1}=0$, $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$.

Згідно з викладеним раніше триетапним методом розв'язування е-задач з лінійною цільовою функцією і лінійними додатковими обмеженнями на першому етапі перейдемо до релаксації на опуклу оболонку е-множини вихідної е-задачі. Тобто обмеження (3.42) заміняються на умову

$$x\in\Pi(G,H), \qquad (3.63)$$

і на першому етапі методу розв'жемо задачу ЛП (3.57)-(3.59), (3.63).

Зауважимо, що обмеження (3.63) - це система лінійних нерівностей і рівності. Якщо, як і раніше, позначити $G^{K_{i}}{}_{CG}$ -

k_i-елементну мультимножину ($k_i=|K_i|$ $\forall i\in J_s$), що утворена елементами G $g_1^{K_i}, \dots, g_{k_i}^{K_i}$ з номером з множини K_i, $k_1+\dots+k_s=k$, та упорядкувати, не порушуючи спільності подальших міркувань, компоненти мультимножини

$$g_1^{K_i} \leqslant g_2^{K_i} \leqslant \dots \leqslant g_{k_i}^{K_i}, \tag{3.64}$$

то загальний поліпереставний многогранник $\Pi(G,H)$ згідно з теоремою 2.19 описується системою

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in N_i'} x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} g_j^{K_i} \quad \forall i\in J_s, & (3.65) \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{|\omega^i|} g_j^{K_i} \quad \forall\omega^i\subset N_i', \ \forall i\in J_s, & (3.66) \end{cases}$$

і нехай $N_i'=K_i$ $\forall i\in J_s$.

Зауважимо, що заміна обчислення N_i' за формулою (3.32) на $N_i'=K_i$, означає в описі $\Pi(G,H)$ тільки відповідну перенумерацію осей координат.

Зазначимо, що задача (3.57)-(3.58), (3.65), (3.66) має $k+1$ невідомих та $R=\sum\limits_{i=1}^{q} m_i+\sum\limits_{\lambda=1}^{s} 2^{k_\lambda}-s$ обмежень. Для розв'язування цієї задачі ЛП застосуємо МППО. При цьому на першій ітерації розв'язування задачі ЛП до системи обмежень включаються $R_1=\sum\limits_{i=1}^{q} m_i+s+\mu$ обмежень (системи (3.58), (3.59), рівність (3.65), μ ($\mu\geqslant 0$) нерівностей системи (3.66)). Якщо розв'язок $\tilde{x}_{k+1}^1\in R^{k+1}$ задачі з цими R_1 обмеженнями не є розв'язком початкової задачі ЛП, то переходимо до наступного кроку. Опишемо, як здійснюється перевірка того, що точка задовольняє нерівностям з системи (3.66). Як і раніше, будемо називати $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілкою нерівностей системи (3.66) сукупність нерівностей цієї системи з фіксованими значеннями пари чисел λ, $|\omega^\lambda|$ $\forall\omega^\lambda\subset N_\lambda'$, $\forall\lambda\in J_s$. Має місце наступна властивість системи (3.66).

13-1091

Теорема 3.13. Нехай $z=(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_m)=(z_1^1, \ldots, z_{k_1}^1, \ldots, z_{k_1}^s, \ldots, z_{k_s}^s, z_{k+1}, \ldots, z_m)\in R^m$, $m\geq k$, та

$$z_1^\lambda \leq z_2^\lambda \leq \ldots \leq z_{k_\lambda}^\lambda, \ \forall\lambda\in J_s. \tag{3.67}$$

Тоді з виконання в точці z обмеження

$$\sum_{j=1}^{|\omega^\lambda|} z_j^\lambda \geq \sum_{j=1}^{|\omega^\lambda|} g_j^{K_j}, \ \omega^\lambda\subset N'_\lambda, \ \lambda\in J_s, \tag{3.68}$$

яке належить $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілці системи (3.66), випливає виконання в тій же точці z і решти обмежень з цієї ж $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілки.

Доведення. Справедливість теореми випливає з того, що усі праві частини нерівностей системи (3.66) в одній і тій же $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілці мають однакове значення. Тому при виконанні умов (3.67) і (3.68) всі нерівності цієї спілки також виконуються. Що і треба було довести.

Тому для виконання описаної перевірки для точки $\tilde{x}^1\in R^{k+1}$ вибирається з кожної $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілки системи (3.66) одна нерівність, на якій точка $\tilde{x}^1$ має властивість (3.67) точки z. Тобто перевірка задоволення точкою $\tilde{x}^1$ усіх нерівностей системи (3.66) зводиться до перевірки однієї певної нерівності кожної можливої спілки. Усього таких перевірок нерівностей з системи (3.66), як легко бачити, є $\sum_{\lambda=1}^{s}(k_\lambda-1)=k-s$.

Опишемо ітерацію за номером $i+1$, $(i\geq1)$. На кожній наступній, $(i+1)$-й, ітерації до тієї системи, що є (з R_i обмежень), приєднуються (одночасно або послідовно) по одній нерівності з різних $(\lambda,|\omega^\lambda|)$-спілок системи (3.66), які не виконуються в точці $\tilde{x}^i$, де $\tilde{x}^i$ – розв'язок задачі на попередній ітерації.

Після скінченної кількості ітерацій одержуємо точку $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k+1})\in R^{k+1}$, яка є розв'язком задачі (3.57)-(3.59), (3.65), (3.66). В силу наявності додаткових обмежень (3.58), (3.59) точка $\tilde{x}=(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k)$, яка складається з перших k координат точки $\tilde{x}$, взагалі кажучи, може не належати множині $E(G,H)$. Тому розв'язування задач (3.57) при обмеженнях (3.42), (3.58), (3.59) з використанням на першому етапі задачі ЛП (3.42), (3.58), (3.59), (3.65), (3.66) потребує згідно з описаним раніше триетапним методом ще такі етапи: другий – за рахунок деякого збільшення значення функції цілі формування по точці $\tilde{x}$ точки $\tilde{x}^0=(\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_{k+1}^0)$, такої, що $\hat{x}^0=(\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_k^0)\in E(G,H)$; третій етап: за рахунок подальшого збільшення значення цільової функції формування точки $\tilde{x}^*$, яка має властивість точки $\tilde{x}^0$ та задовольняє обмеженням (3.59).

Другий етап, який назвемо поліпереставним округленням, може бути реалізований, наприклад, одним з наступних способів. Перший спосіб поліпереставного округлення полягає в наступному. Зафіксуємо λ, $\lambda\in J_s$. Викреслимо з набору $\tilde{x}^{\lambda}=(\tilde{x}_{\gamma_{11\lambda}}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{11\lambda}+K_{11\lambda}-1}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{qm_q\lambda}}, \ldots, \tilde{x}_{\gamma_{qm_q\lambda}+K_{qm_q\lambda}-1})=(\tilde{x}_1^{\lambda}, \ldots, \tilde{x}_{k_\lambda}^{\lambda})$ частини координат $\hat{x}$ і з набору (3.64) пару рівних чисел $\tilde{x}_i^{\lambda}=g_j^{K_\lambda}$. Будемо так діяти до тих пір, поки це можливо, формуючи при цьому координати $(\tilde{x}^0_{\gamma_{11\lambda}}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{11\lambda}+K_{11\lambda}-1}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{qm_q\lambda}}, \ldots, \tilde{x}^0_{\gamma_{qm_q\lambda}+K_{qm_q\lambda}-1})=(\tilde{x}_1^{\lambda,0}, \ldots, \tilde{x}_{k_\lambda}^{\lambda,0})$ точки $\tilde{x}^0$ наступним чином: $\tilde{x}_i^{\lambda,0}=\tilde{x}_i^{\lambda}$. Позначимо невикреслені числа набору $\tilde{x}^{\lambda}$ так $\tilde{x}_{\alpha_1}^{\lambda}\leq \ldots \leq\tilde{x}_{\alpha_\kappa}^{\lambda}$, а числа, що залишилися, з набору (3.64) так: $g_{\beta_1}^{K_\lambda}\leq \ldots \leq g_{\beta_\kappa}^{K_\lambda}$. Покладемо $\tilde{x}_{\alpha_i}^{\lambda,0}=g_{\beta_\kappa}^{K_\lambda}$; $\alpha_i,\beta_i\in J_{k_\lambda}$, $\alpha_i\neq\alpha_j$, $\beta_i\neq\beta_j$, $\forall i\neq j$, $i,j\in J_\kappa$. Так вчинимо для всіх $\lambda\in J_s$. Потім покладемо:

$$\tilde{x}_{k+1}^0 = \max_{i\in J_q} \Big(\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} \tilde{x}^0_{\gamma_{im_i\lambda}+t} + d_{im_i} \Big),$$

де $\gamma_{ij\lambda}$ обчислюються за формулами (3.60)-(3.62) $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q\setminus\{1\}$, $\forall\lambda\in J_s$.

Другий спосіб поліпереставного округлення полягає в наступному. *Нехай для фіксованого* λ, $(\lambda\in J_s)$, $\tilde{x}^{\lambda}_{\alpha_1} \le \dots \le \tilde{x}^{\lambda}_{\alpha_{k_\lambda}}$, $\alpha_i \in J_{k_\lambda}$, $\alpha_i \ne \alpha_j$, $\forall i\ne j$, $i,j\in J_{k_\lambda}$. Покладемо $\tilde{x}^{\lambda,o}_{\alpha_i} = g_i^{k_\lambda}$ $\forall i\in J_{k_\lambda}$. Вчинивши так для всіх $\lambda\in J_s$, обчислимо $\tilde{x}^o_{k+1}$ за формулою, що наведена вище. Як третій *спосіб поліпереставного округлення* можна запропонувати знаходження найближчої з множини $E(G,H)$ точки $\hat{x}^o$, до точки $\hat{x}$, (це буде розглянуто пізніше). Значення $\tilde{x}^o_{k+1}$ обчислюється, як і раніше.

Третій етап реалізуємо наступним чином. Нехай числа $\tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t}$, $t\in J^o_{K_{ij\lambda}-1}$, такі, що при підстановці точки $\tilde{x}^o$ у відповідну нерівність з системи (3.59) воно не виконується. Тоді знайдемо t^* із співвідношення $\tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t^*} = \min_{t\in J^o_{K_{ij\lambda}-1}} \{\tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t}\}$ *при умові* $\tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t} \ge \sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{ij\lambda}-1} \tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t} - c_{i(j+1)} + d_{ij}$, а t^{**} – із співвідношення $\tilde{x}^o_{\gamma_{im_i\lambda}+t^{**}} = \max_{t\in J_{K_{im_i\lambda}-1}} \{\tilde{x}^o_{\gamma_{im_i\lambda}+t}\}$ при умові $\tilde{x}^o_{\gamma_{im_i\lambda}+t} + \sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\ne t^*}}^{K_{ij\lambda}-1} \tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+\kappa} \le c_{i,(j+1)} - d_{ij}$, де $\gamma_{ij\lambda}$ обчислюється за формулами (3.60)-(3.62) $\forall\lambda\in J_s$, $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$. Покладемо координати точки $\tilde{x}^* = (x_1^*, \dots, x^*_{k+1})$, що мають індекси від $\gamma_{ij\lambda}$ до $\gamma_{ij\lambda}+K_{ij\lambda}-1$, рівними координатам точки $\tilde{x}^o$ з тими ж номерами за виключенням індексів $\gamma_{ij\lambda}+t^*$ та $\gamma_{im_i\lambda}+t^{**}$, для яких $\tilde{x}^*_{\gamma_{ij\lambda}+t^*} = \tilde{x}^o_{\gamma_{im_i\lambda}+t^{**}}$, $\tilde{x}^*_{\gamma_{im_i\lambda}+t^{**}} = \tilde{x}^o_{\gamma_{ij\lambda}+t^*}$. Визначимо $\tilde{x}^*_{k+1} = \max_{i\in J_q} \left(\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} \tilde{x}^*_{\gamma_{im_i\lambda}+t} + d_{im_i} \right)$. Потім перепозначимо $\tilde{x}^o_i = \tilde{x}^*_i$ $\forall i\in J_{k+1}$. Цей процес при фіксованих i, j $(j\in J_{m_i},\ i\in J_q)$ продовжимо для всіх $\lambda\in J_s$. Так переглядаємо усі нерівності з (3.59), які не виконуються в поточній точці $\tilde{x}^{o}$, перетворюючи змінні $\tilde{x}^{o}_{\gamma_{ij\lambda}+t}$, $t\in J^{o}_{K_{ij\lambda}-1}$, що до них входять. Оскільки при описаній процедурі більші значення координат точки, що входять тільки в нерівності (3.59) замінюються меншими значеннями координат, які входять тільки в нерівності (3.58), і навпаки, то за рахунок збільшення значення функції цілі за скінченну кількість кроків процес побудови точки $\tilde{x}^{*}$ завершується.

Видається доцільним теоретично дати апріорну оцінку відносної точності розв'язку розглянутої задачі (3.57) при обмеженнях (3.42), (3.58), (3.59). Нагадаємо, що x^{*}_{k+1} та $\tilde{x}^{*}_{k+1}$ – відповідно точний та наближений розв'язки цієї задачі. Оцінимо величину

$$\varepsilon_o = (\tilde{x}^{*}_{k+1} - x^{*}_{k+1}) / x^{*}_{k+1}. \qquad (3.69)$$

<u>Лема 3.14.</u> Додаткові *обмеження* (3.58) (3.59) *лінійно незалежні*.

<u>Доведення.</u> Позначимо

$$M = m_1 + \ldots + m_q \qquad (3.70)$$

та, як і раніше,

$$k = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda}. \qquad (3.71)$$

Так як $K_{ij\lambda} \geq 1$ $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$, $\forall \lambda\in J_s$ і мають місце співвідношення (3.70), (3.71), то $M \leq k$. Складемо матрицю A з коефіцієнтів при змінних з додаткових обмежень, вважаючи x_{k+1} в (3.58) перенесеним в ліву частину нерівності. Очевидно, що матриця A містить в собі M рядків та $k+1$ стовпців. Формування матриці A здійснено так. Спочатку виберемо обмеження, у якого коефіцієнт при x_1 відрізняється від нуля. Коефіцієнти цього обмеження складуть перший рядок матриці. *Нехай уже виписаний m-й рядок матриці* A, *тоді як* $(m+1)$*-й* рядок візьмемо коефіцієнти обмеження, у якого коефіцієнт при змінній $\gamma_{ij\lambda}$ відрізняється від нуля, де i, j, λ визначаються з співвідношення $\gamma_{ij\lambda}=m+1$ при підстановці замість $k_{ij\lambda}$ одиниць у формули (3.60), (3.61), $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$, $\lambda\in J_s$, $m\in J_{M-1}$. Викреслимо в матриці A усі стовпці крім тих, які мають номери $\gamma_{ij\lambda}\geqslant 1$ $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$, $\forall\lambda\in J_s$. Одержуємо одиничну матрицю. Отже, ранг матриці A додаткових обмежень дорівнює M, тобто вони є лінійно незалежними, що і треба було довести.

Лема 3.15. Якщо $\tilde{x}_{k+1}$ - розв'язок задачі (3.57)-(3.59), (3.65), (3.66), мультимножина G складається з елементів $g_1, \ldots, g_k$, то

$$\tilde{x}_{k+1} \geqslant \frac{1}{q}\left[\sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i}(d_{ij}-c_{ij})\right]. \quad (3.72)$$

Доведення. Додавши усі нерівності (3.58), (3.59), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - qx_{k+1} \leqslant \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i-1}(c_{i(j+1)}-d_{ij}) - \sum_{i=1}^{q} d_{im_i},$$

що з урахуванням $c_{i1}=0$ $\forall i\in J_q$ дає

$$qx_{k+1} \geqslant \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i}(d_{ij}-c_{ij}).$$

З рівностей (3.65), додавши їх, одержуємо $x_1+\ldots+x_k=g_1+\ldots+g_k$, що при підстановці в останню нерівність і визначає справедливість співвідношення (3.72), яке і необхідно довести.

Лема 3.16. Якщо формування точки $\tilde{x}^o\in R^{k+1}$ здійснюється першим способом поліпереставного округлення, а $\tilde{x}\in R^{k+1}$ - точка, яка доставляє розв'язок задачі (3.57)-(3.59), (3.65), (3.66) і лежить у вершині допустимої області, то при формуванні точки $\tilde{x}^o$ не менше, ніж для $\max(0,k-2M)$ координат мають місце рівності $\tilde{x}^o_i=\tilde{x}_i$, $i\in J_k$.

Доведення. За лемою3.14 обмеження (3.58), (3.59) лінійно незалежні. Так як в точці $\tilde{x}$ не менше k нерівностей з системи (3.58), (3.59), (3.65), (3.66) виконуються як рівності, тому в системі (3.65), (3.66) рівностей буде не менше ніж $k-M$. Зрозуміло, що $\tilde{x}^o_i=\tilde{x}_i$ для тих $|\omega^\lambda|$, для яких існують співвідношення системи

(3.65), (3.66), які виконуються у вигляді наступних рівностей у точці $x=\tilde{x}$, $\sum_{j\in\omega^\lambda} x_j = \sum_{j=1}^{|\omega^\lambda|} g_j^{K_\lambda}$, $\omega^\lambda \subset N'_\lambda$; $\sum_{j\in\Omega^\lambda} x_j = \sum_{j=1}^{|\Omega^\lambda|} g_j^{K_\lambda}$, $\Omega^\lambda \subset N'_\lambda$, $\lambda\in J_s$, $\Omega^\lambda \subset \omega^\lambda$, $|\Omega^\lambda|+1=|\omega^\lambda|$. Легко бачити, що таких пар співвідношень у системі (3.65), (3.66) не менше ніж $k-2m$, що остаточно і дає нам оцінку кількості рівностей $\tilde{x}_i^o=\tilde{x}_i$, $i\in J_p$, при описаному округленні, яка дорівнює $\max(0,k-2m)$, що і треба було довести.

<u>Наслідок 3.17.</u> Якщо виконуються умови леми 3.16, то кількість τ (з перших k) координат точки $\tilde{x}$, які для формування точки $\tilde{x}^o$ зазнають зміни при поліпереставному округленні, задовольняє співвідношенню $\tau\leqslant\min(k,2m)$.

<u>Доведення.</u> Згідно з лемою 3.16 $k-\tau\geqslant\max(0,k-2m)=m^{**}$. Якщо $m^{**}=0$, то $\tau\leqslant k$, якщо $m^{**}=k-2m$, то $k-\tau\geqslant k-2m$ або $\tau\leqslant 2m$. Отже, $\tau\leqslant k$, або $\tau\leqslant 2m$, но якщо $2m\leqslant k$, то $\tau\leqslant 2m$, а якщо $2m>k$, то $\tau\leqslant k$. Таким чином, або $\tau\leqslant 2m<k$, або $\tau\leqslant k<2m$. Іншими словами, $\tau\leqslant\min(k,2m)$, що і треба було довести.

<u>Теорема 3.18.</u> Якщо задача знаходження (3.57) при обмеженнях (3.42), (3.58), (3.59) розв'язується описаним наближеним триетапним методом, на першому етапі використовується метод розв'язування задачі ЛП (3.57)-(3.59), (3.65), (3.66), який дає вершину допустимої області, на другому етапі використовується перший спосіб поліпереставного округлення для формування точки $\tilde{x}^o$, то відносна точність ε_o розв'язку, що визначається за формулою (3.69), задовольняє умові

$$\varepsilon_o \leqslant \frac{2\sum\limits_{i=1}^{\gamma}(g_{k-i+1}-g_i) + \sum\limits_{i=\gamma+1}^{\Lambda}(g_{k-i+1}-g_i) - \sum\limits_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}}{\frac{1}{q}\left[\sum\limits_{i=1}^{k} g_i + \sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m_i}(d_{ij}-c_{ij})\right]},$$

де $\gamma=\min(\tau,\delta^*)$, $\Lambda=\max(\tau,\delta^*)-\gamma$;

$$\tau = \begin{cases} m^*-s, \text{ ЯКЩО } m^*-\kappa<s; \\ \kappa \quad, \text{ ЯКЩО } m^*-\kappa\geq s, \end{cases}$$

$m^*=\min(k,2M)$; $\kappa=\sum_{\lambda=1}^{s}\max_{i\in J_q} K_{im_i\lambda}$; $M=\sum_{i=1}^{q} m_i$, $\delta^*=\min\{m^*, s\max_{i\in J_q}(m_i-1)\}$;

$$\theta = \begin{cases} s \;, \text{ ЯКЩО } m^*\leq\kappa; \\ s-\sigma, \text{ ЯКЩО } m^*-\sigma=\kappa \quad \forall\sigma\in J_{s-1}; \\ 0 \;, \text{ ЯКЩО } m^*-\kappa\geq s, \end{cases}$$

$\Delta_\lambda = \min_{i,j\in J_{k_\lambda}} |e_i^\lambda - e_j^\lambda|\ \forall\lambda\in J_s$; $\Delta_{\alpha_1}\leq\ldots\leq\Delta_{\alpha_s}$; $\alpha_i, i\in J_s$; $\{e_1^\lambda, \ldots, e_{k_\lambda}^\lambda\}$ – основа мультимножини G^{K_λ} $\forall\lambda\in J_s$, $k_1+\ldots+k_s=k$, елементи мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$ задовольняють умові $g_1\leq\ldots\leq g_k$.

<u>Доведення.</u> Оцінимо $\varepsilon_o=\dfrac{\tilde{x}^*_{k+1}-x^*_{k+1}}{x^*_{k+1}}$. Так як $x^*_{k+1}\geq\tilde{x}_{k+1}$, то, очевидно, $\varepsilon_o\leq\dfrac{\tilde{x}^*_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}}{\tilde{x}_{k+1}}$. Знаменник цього дроба оцінюється формулою (3.72) з леми 3.15. Оцінимо чисельник $\tilde{x}^*_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}\leq$ $\leq\max_{i\in J_q}\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1}\tilde{x}^*_{\gamma_{im_i\lambda}+t}+d_{im_i}\right)-\max_{i\in J_q}\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1}\tilde{x}_{\gamma_{im_i\lambda}+t}+d_{im_i}\right)$. Нехай тут перший максимум досягається при $i=\alpha$. Тоді з очевидної нерівності $\max_{i\in J_q}v_i-\max_{i\in J_q}w_i\leq v_\alpha-w_\alpha$, якщо позначити v_i та w_i відповідно вирази в першому та другому максимумах, випливає: $\tilde{x}^*_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}\leq$ $\leq\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{\alpha m_\alpha\lambda}-1}\left(\tilde{x}^*_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}-\tilde{x}_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}\right)=A+B$, де $A=\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{\alpha m_\alpha\lambda}-1}\left(\tilde{x}^*_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}-\tilde{x}^o_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}\right)$; $B=\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{\alpha m_\alpha\lambda}-1}\left(\tilde{x}^o_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}-\tilde{x}_{\gamma_{\alpha m_\alpha\lambda}+t}\right)$. Оцінимо спочатку величину B. Кількість τ округлених при формуванні точки $\tilde{x}^o$ координат точки $\tilde{x}$ згідно з наслідком 3.17 не перевищує $m^*=\min(k,2M)$. З іншого боку (при фіксованому λ) найбільша можлива кількість τ

координат $\tilde{x}_{\gamma_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda+\nu}$, $\nu\in J^o_{K_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda-1}$, округлених при формуванні точки $\tilde{x}^o$ таких, що вони менше координат точки $\tilde{x}^o$ з тими ж індексами, не перевищує величини κ_λ: $\kappa_\lambda=\max_{i\in J_q} K_{im_i\lambda}$, бо (при $\lambda=\mathrm{const}$) доданків у виразі в рівно $K_{\alpha_{m_\alpha}\lambda}$ штук.

Якщо λ не фіксувати, то $\tau\leqslant\kappa$, де $\kappa=\sum_{\lambda=1}^{s}\max_{i\in J_q} K_{im_i\lambda}$. Позначимо θ найменшу можливу кількість координат $\tilde{x}_{\gamma_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda+\nu}$, $\nu\in J^o_{K_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda-1}$, округлених при формуванні точки $\tilde{x}^o$ таких, що вони більше координат точки $\tilde{x}^o$ з тими ж індексами.

Якщо $m^*\leqslant\kappa$, тобто всі округлені координати можуть бути серед κ координат, то це означає, що $\tau=m^*-s$, бо найменше s різниць будуть від'ємними в силу того, що сума округлених координат (при кожному λ, $\lambda\in J_s$) дорівнює сумі одержаних координат після округлення. (Тобто $\theta=s$). Якщо $m^*-\sigma=\kappa$; $\sigma\in J_s$, то $\theta=s-\sigma$. Дійсно, нехай $m^*=\kappa+\sigma$. Тоді σ округлень можуть бути не серед κ координат (які можуть входити в в). І через те що ці округлення можуть дати від'ємні різниці в в, то $\theta=s-\sigma$. Якщо ж $m^*>\kappa+s$, то $\theta=0$, а $\tau=\kappa$. Таким чином, об'єднуючи усі випадки, можемо записати: якщо $m^*<\kappa$, то $\tau=m^*-s$; $\theta=s$, якщо $m^*=\kappa+\sigma$, $\sigma\in J^o_s$, то $\tau=m^*-s$; $\theta=s-\sigma$, якщо $m^*>\kappa$, то $\tau=\kappa$; $\theta=0$.

Позначимо

$$\Delta_\lambda=\min_{i,j\in J_{k_\lambda}}|e_i^\lambda-e_j^\lambda|\quad\forall\lambda\in J_s.$$

Упорядкуємо величини Δ_λ $\forall\lambda\in J_s$ так: $\Delta_{\alpha_1}\leqslant\ldots\leqslant\Delta_{\alpha_s}$; $\alpha_i\neq\alpha_j$, $i,j\in J_s$; $\alpha_i\in J_s$. Тоді $в=в^++в^-$, де $в^+$ – сума додатних, а $в^-$ – сума від'ємних доданків у в: $в^+=\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{\substack{t=0\\ \Delta x>0}}^{K_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda-1}\Delta x(\lambda,t)$; $в^-=\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{\substack{t=0\\ \Delta x<0}}^{K_{\alpha_{m_\alpha}}\lambda-1}\Delta x(\lambda,t)$, тут

14-1091

$\Delta x=\Delta x(\lambda,t)=\tilde{x}^{o}_{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t}-\tilde{x}_{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t}$.

З системи (3.65), (3.66) для точок $\tilde{x}^o$, $\tilde{x}$ випливає справедливість співвідношень $\forall\tau\in J_k$ $\sum_{i=1}^{\tau}\tilde{x}^{o}_{\alpha_i}\leqslant g_k+\ldots+g_{k-\tau+1}$; $\sum_{i=1}^{\tau}\tilde{x}_{\alpha_i}\geqslant g_1+\ldots+g_\tau$; $\alpha_i\in J_k$; $\alpha_j\neq\alpha_j$ $\forall i\neq j$, $i,j\in J_\tau$, то $B^+\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}(g_{k-i+1}-g_i)$. З урахуванням виразу для Δ_λ, $\lambda\in J_s$, маємо $B^-\leqslant-\sum_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}$, $\alpha_i\in J_s$. Об'єднуючи оцінки для B^+ та B^-, маємо $B\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}(g_{k-i+1}-g_i)-\sum_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}$.

Оцінимо величину A. Згідно зі способом побудови точки $\tilde{x}^*$ по точці $\tilde{x}^o$ кількість δ_λ ненульових змін координат точки $\tilde{x}^o$ при цьому (серед координат $\tilde{x}^{o}_{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t}$, $t\in J^{o}_{K_{\alpha m_\alpha}\lambda-1}$) не більше (для кожного λ, $\lambda\in J_s$) числа $m_\alpha-1$ для будь-якого можливого α. Отже, загальна їх кількість δ $(\forall\lambda\in J_s)$ така: $\delta=\sum_{\lambda=1}^{s}\delta_\lambda\leqslant s(m_\alpha-1)\leqslant s\max_{i\in J_q}(m_i-1)$. З іншого боку число δ не може перевищувати числа округлених координат, тобто $\delta\leqslant m^*$, таким чином $\delta\leqslant\min\{m^*; s\max_{i\in J_q}(m_i-1)\}=\delta^*$. Нехай $j_i\in\{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t,\ t\in J^{o}_{K_{\alpha m_\alpha}\lambda-1},\ \lambda\in J_s\}$, $i\in J_{\delta^*}$. Врахуємо, що $\forall t\in J^{o}_{K_{\alpha m_\alpha}\lambda-1}$ $\tilde{x}^{*}_{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t}-\tilde{x}^{o}_{\gamma_{\alpha m_\alpha}\lambda+t}\geqslant 0$. Тоді $A\leqslant\sum_{i=1}^{\delta^*}(\tilde{x}^{*}_{j_i}-\tilde{x}^{o}_{j_i})$, а з урахуванням того, що $\sum_{i=1}^{\delta^*}\tilde{x}^{*}_{j_i}\leqslant g_k+\ldots+g_{k-\delta^*+1}$; $\sum_{i=1}^{\delta^*}\tilde{x}^{o}_{j_i}\geqslant g_1+\ldots+g_{\delta^*}$, маємо $A\leqslant\sum_{i=1}^{\delta^*}(g_{k-i+1}-g_i)$. Об'єднуючи оцінки для A та B, маємо $\tilde{x}^{*}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}(g_{k-i+1}-g_i)-\sum_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}+\sum_{i=1}^{\delta^*}(g_{k-i+1}-g_i)$. Позначивши $\gamma=\min(\tau,\delta^*)$, $\Lambda=\max(\tau,\delta^*)-\gamma$, можемо записати $\tilde{x}^{*}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1}\leqslant 2\sum_{i=1}^{\gamma}(g_{k-i+1}-g_i)+\sum_{i=\gamma+1}^{\Lambda}(g_{k-i+1}-g_i)-\sum_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}$. Остаточно з урахуванням леми 3.15 маємо

$$\varepsilon_o \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^{\gamma}(g_{k-i+1}-g_i)+\sum_{i=\gamma+1}^{\Lambda}(g_{k-i+1}-g_i)-\sum_{i=1}^{\theta}\Delta_{\alpha_i}}{\frac{1}{q}\left[\sum_{i=1}^{k} g_i+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_i}(d_{ij}-c_{ij})\right]},$$

де $\gamma=\min(\tau,\delta^*)$, $\Lambda=\max(\tau,\delta^*)-\gamma$;

$$\tau=\begin{cases} m^*-s, & \text{якщо } m^*-\kappa<s;\\ \kappa, & \text{якщо } m^*-\kappa\geqslant s,\end{cases}$$

$m^*=\min\{k,2M\}$; $\kappa=\sum_{\lambda=1}^{s}\max_{i\in J_q} K_{im_i\lambda}$; $M=\sum_{i=1}^{q} m_i$, $\delta^*=\min\{m^*, s\max_{i\in J_q}(m_i-1)\}$;

$$\theta=\begin{cases} s, & \text{якщо } m^*\leqslant\kappa;\\ s-\sigma, & \text{якщо } m^*-\sigma=\kappa,\ \forall\sigma\in J_{s-1};\\ 0, & \text{якщо } m^*-\kappa\geqslant s;\end{cases}$$

$\Delta_\lambda=\min_{i,j\in J_{k_\lambda}}|e_i^\lambda-e_j^\lambda|$ $\forall\lambda\in J_s$; $\Delta_{\alpha_1}\leqslant\ldots\leqslant\Delta_{\alpha_s}$; $\alpha_i, i\in J_s$; $\{e_1^\lambda,\ldots,e_{K_\lambda}^\lambda\}$ – основа мультимножини G^{K_λ} $\forall\lambda\in J_s$, $k_1+\ldots+k_s=k$, а елементи мультимножини $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ задовольняють умові $g_1\leqslant\ldots\leqslant g_k$.

Що і треба було довести.

Для розглянутого триетапного наближеного методу розв'язування е-задачі оптимізації з лінійною цільовою функцією та лінійними додатковими обмеженнями значною трудністю є реалізація третього етапу. В зв'язку з цим розглянемо спосіб розв"язування цієї задачі, який характерний тим, що після округлення (переставного, поліпереставного тощо) додаткові обмеження не порушуються [97, 98, 99]. Для простоти викладу обмежимось випадком повністю комбінаторної е-задачі на загальній множині переставлень. Тобто при $m=k$ розглянемо задачу визначення (3.37) при обмеженнях (3.38) та додаткових обмеженнях (3.39).

На першому етапі розв'язується задача (3.37) при обмеженнях (2.5) і наступних:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i \leqslant b_j-\sigma, \quad \forall j\in J_r, \tag{3.73}$$

які дістають з додаткових обмежень (3.39). Тут σ_j $\forall j\in J_r$ вибирається таким чином, щоб при переставному округленні з розв'язку задачі (3.37), (2.5), (3.73) – точки $\tilde{x}$ – формувалась точка $\tilde{x}^o$, яка задовольняє і додатковим обмеженням (3.39). Тобто $\tilde{x}^o$ є наближеним (допустимим) розв'язком $\tilde{x}^*$ задачі (3.37)-(3.39). Зрозуміло, що вибір σ_j, $\forall j\in J_r$, в загальному випадку залежить від способу переставного округлення. Наступна теорема дає приклад вибору σ_j $\forall j\in J_r$.

<u>Теорема 3.19.</u> Якщо $\sigma_j \geq \sigma_j^{(\lambda)}$, $\lambda\in J_2$, $\forall j\in J_r$, $\sigma_j^{(1)}=(g_k-g_1)\sum_{i=1}^{m^*}|a'_{ij}|$; $\sigma_j^{(2)}=m^*|a'_{1j}|(g_k-g_1)$, де a'_{ij} – коефіцієнти j-го обмеження, упорядковані по спаданню їх абсолютних величин $|a'_{1j}|\geq \ldots \geq |a'_{kj}|$, $m^*=\min(k,2m_1)$, m_1 – кількість лінійно незалежних обмежень в системі (3.39); розв'язок $\tilde{x}$ задачі (3.19) при обмеженнях (2.5), (3.73) одержано методом ЛП, який дає вершину допустимої області; переставне округлення точки $\tilde{x}$ першим способом дає точку $\tilde{x}^o$, то $\tilde{x}^o$ задовольняє обмеженням (3.39).

Для доведення теореми 3.19 нам будуть потрібні такі леми.

<u>Лема 3.20.</u> Якщо розв'язок $\tilde{x}$ задачі (3.19) при обмеженнях (2.5), (3.73) одержано методом ЛП, що дає вершину допустимої області, а формування точки $\tilde{x}^o$ по $\tilde{x}$ отримано переставним округленням першим способом, то не менше, ніж для $\max(0,k-2m_1)$ координат має місце рівність $\tilde{x}^o_i=\tilde{x}_i$, $i\in J_k$, де m_1 – кількість лінійно незалежних обмежень в системі (3.39).

<u>Доведення.</u> Нехай виконуються умови леми. За означенням вершини многогранника в точці $\tilde{x}$ не менше k обмежень системи (2.5), (3.73) виконуються як рівності, то з (2.5) таких обмежень буде не менше, ніж $k-m_1$, де m_1 – кількість лінійно незалежних обмежень в (3.39) (або, що те саме, в (3.73)). Зрозуміло, що

рівності $\tilde{x}^o_i=\tilde{x}_i=g_j$, які використовуються при першому способі переставного округлення, виконуються для тих $j\in J_k$, $g_j\in G$, для яких наступні нерівності з системи (2.5) обертаються в точці $\tilde{x}$ на рівності: $\sum\limits_{\tau=1}^{j-1} x_{\alpha_\tau} \geq \sum\limits_{\tau=1}^{j-1} g_\tau$; $\sum\limits_{\tau=1}^{j} x_{\alpha_\tau} \geq \sum\limits_{\tau=1}^{j} g_\tau$. Очевидно, що таких пар нерівностей не менше, ніж $k-2m_1$, якщо $k-2m_1\geq 0$.

Таким чином, при вказаному переставному закругленні в точці $\tilde{x}^o$ зберігається не менше $\max(0,k-2m_1)$ координат точки $\tilde{x}$, що і треба було довести.

<u>Наслідок 3.21.</u> Якщо виконуються умови леми 3.20, то кількість T координат точки $\tilde{x}$, які для формування точки $\tilde{x}^o$ зазнають зміни при поліпереставному округленні, задовольняє умові $T\leq m^*=\min\{k,2m_1\}$.

<u>Доведення.</u> Згідно з лемою 3.20 $k-T\geq\max(0,k-2m_1)=m^*$. Далі доведення цього наслідку збігається з доведенням наслідку 3.17, якщо покласти $M=m_1$, $m^{**}=m^*$.

<u>Доведення теореми 3.19.</u> Нехай виконуються умови теореми. Виберемо довільне $j\in J_r$. Позначимо через $I\subset J_k$, $m^*=|I|$, множину індексів, для яких координати точки $\tilde{x}$ зазнають змін при переставному округленні. Розглянемо і перетворимо вираз: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij}\tilde{x}^o_i=$

$=\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij}(\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i)+\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij}\tilde{x}_j = \sum\limits_{i\in I} a_{ij}(\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i)+\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij}\tilde{x}_j \leq \sum\limits_{i\in I} a_{ij}(\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i)+$

$+b_j-\sigma_j^{(\theta)}=\beta_j^{(\lambda)}$. Щоб точка $\tilde{x}^o$ задовольняла обмеження (3.39), необхідно, щоб $\beta_j^{(\lambda)}\leq b_j$, тобто $b_j-\sigma_j^{(\lambda)}+\sum\limits_{i\in I} a_{ij}(\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i)\leq b_j$. З одного боку $(\lambda=1)$, $\beta_j^{(1)}=b_j-\sigma_j^{(1)}+\sum\limits_{i\in I}|a_{ij}||\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i|\leq b_j-\sigma_j^{(1)}+\max\limits_{i\in I}|\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i|\sum\limits_{i\in I}|a_{ij}|\leq$

$\leq b_j-\sigma_j^{(1)}+(g_k-g_1)\sum\limits_{i\in I}|a_{ij}|\leq b_j-\sigma_j^{(1)}+(g_k-g_1)\sum\limits_{i=1}^{m^*}|a'_{ij}|\leq b_j$, тобто

$\sigma_j\geq\sigma_j^{(1)}=(g_k-g_1)\sum\limits_{i=1}^{m^*}|a'_{ij}|$, що і треба було довести в першому випадку. З другого боку, $(\lambda=2)$, $\beta_j^{(2)}=b_j-\sigma_j^{(2)}+\sum\limits_{i\in I}|a_{ij}||\tilde{x}^o_i-\tilde{x}_i|\leq b_j-$

$-\sigma_j^{(2)}+|a'_{1j}|\sum_{i\in I}|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|\leq b_j-\sigma_j^{(2)}+|a'_{1j}|m^*\max_{i\in I}|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|=b_j-\sigma_j^{(2)}+$ $+|a'_{1j}|m^*(g_k-g_1)\leq b_j$. Тобто $\sigma_j\geq\sigma_j^{(2)}=|a'_{1j}|m^*(g_k-g_1)$, що і треба було довести у другому випадку.

В обох випадках при доведенні використовується наслідок 3.21, згідно з яким $m^*=|I|\geq r$, та нерівність $\max_{i\in I}|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|\leq g_k-g_1$, яка випливає з того, що і точка $\tilde{x}$, і точка $\tilde{x}^o$, як такі, що задовольняють системі (2.5), задовольняють наступним нерівностям цієї системи: $g_1\leq\tilde{x}_i\leq g_k$, $g_1\leq\tilde{x}_i^o\leq g_k$, $\forall i\in J_k$. Це означає, що $\forall i\in J_k$ виконується нерівність $\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i\leq g_k-g_1$, або $\tilde{x}_i-\tilde{x}_i^o\leq g_k-g_1$. Тобто $\forall i\in J_k$ $|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|\leq g_k-g_1$, в тому числі і для того індекса i для якого ліва частина нерівності максимальна. Таким чином, $\max_{i\in I\subset J_k}|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|\leq\max_{i\in J_k}|\tilde{x}_i^o-\tilde{x}_i|\leq g_k-g_1$.

Теорема доведена в обох випадках.

<u>Зауваження 3.7.</u> Питання вибору того чи іншого $\sigma_j^{(\lambda)}$ потребує дослідження для кожної конкретної задачі, бо немає гарантії, взагалі кажучи, що менш жорсткі обмеження приведуть після округлення до кращого з точки зору функції цілі розв'язку. Тим більше, це зауваження вірно для різних комбінацій величин λ та j при виборі $\sigma_j^{(\lambda)}$.

<u>Зауваження 3.8.</u> Розглянутий підхід до наближеного розв'язку з лінійною цільовою функцією та лінійними додатковими обмеженнями шляхом заміни останніх на більш жорсткі можна поширити на е-задачі вигляду (3.37)-(3.39) при $m>k$ та на лінійні (як частково так і повністю комбінаторні) е-задачі при обмеженні (3.38) у вигляді $x\in E$, $E\in\{E_{n\eta}^k(G), E(G,H), \bar{S}_n^k(G), \ldots\}$, де множина E – це е-множина простору R^k, для якої відома опукла оболонка у вигляді системи лінійних обмежень, та для якої введене означення відповідного округлення. Дещо з цього розглянуто в [100, 101].

Зазначимо також, що цей підхід ідейно близький до наближеного способу розв"язання задач цілочислового ЛП, розглянутого в працях [102, 103, 104]. Його також можна розглядати як розвиток третього правила переставного округлення, запропонованого в праці [61].

3.3. Задачі з опуклими цільовими функціями

Розглянемо спершу розв'язування однієї спеціальної задачі, що дасть можливість проілюструвати деякі особливості задач з опуклими цільовими функціями. Виклад базується в першу чергу на праці [95].

Нехай, як і раніше, $E_k(J_k)\subset R^k$ - е-множина переставлень перших k натуральних чисел. Нехай треба знайти

$$\Psi^* = \min_{z\in E_k(J_k)} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=j+1}^{k} c_{jq}|z_j-z_q|; \qquad (3.74)$$

$$z^* = \arg\min_{z\in E_k(J_k)} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=j+1}^{k} c_{jq}|z_j-z_q|, \qquad (3.75)$$

де $c_{jq}\geq 0$ - задані дійсні сталі.

Розглянемо деякі властивості задачі (3.74), (3.75). Позначимо

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=j+1}^{k} c_{jq}|x_i-x_j|. \qquad (3.76)$$

Легко бачити, функція $\Phi(x):R^k\to R^1$, що означається виразом (3.76), кусково-лінійна.

<u>Теорема 3.22.</u> Функція $\Phi(x):R^k\to R^1$, що задана формулою (3.76), опукла в R^k.

<u>Доведення.</u> Дійсно, для функції $\Phi(x)$ виконуються такі співвідношення $\forall x^1,x^2\in R^k$

$$\Phi(x^1+x^2) \leq \Phi(x^1) + \Phi(x^2), \qquad (3.77)$$

$$\Phi(\lambda x^1) = \lambda\Phi(x^1) \ \forall\lambda\geq 0. \qquad (3.78)$$

Рівність (3.78) очевидна. Доведемо нерівність (3.77). Перетворимо з урахуванням $c_{ij}\geq 0$ вираз $\Phi(x^1+x^2)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=i+1}^{k} c_{ij}|x_i^1+x_i^2-x_j^1-x_j^2|\leq \sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=i+1}^{k} c_{ij}(|x_i^1-x_j^1|+|x_i^2-x_j^2|)=\Phi(x^1)+\Phi(x^2)$. Що і треба було довести. Таким чином, опуклість функції $\Phi(x)$ в R^k доведена.

Як випливає з теореми 2.1, множина $E_k(J_k)$ лежить в гіперплощині, яка описується рівнянням

$$x_1+\ldots+x_k=k(k+1)/2. \tag{3.79}$$

Розглянемо підмножини надграфіка функції $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$, точки яких задовольняють співвідношенням

$$\frac{x_{\alpha_j^i}-x^o_{\alpha_j^i}}{a_{\alpha_j^i}}=t,\quad t\geq 0,\quad \forall j\in J_{k+1},\quad t\in R^1, \tag{3.80}$$

$$(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_k^i)\in E_k(J_k),\ i\in J_{k-1}, \tag{3.81}$$

$$x^o_{\alpha_j^i}=\frac{k+1}{2}\quad \forall j\in J_k;\ i\in J_{k-1}, \tag{3.82}$$

$$a_{\alpha_j^i}=-1\ \forall j\in J_i;\ a_{\alpha_j^i}=\frac{i}{k-i}\ \forall j\in J_k\setminus J_i,\ i\in J_{k-1}, \tag{3.83}$$

$$\alpha^i_{k+1}=k+1;\ x^o_{k+1}=0;\ a_{k+1}=\frac{k}{k-i}\,\Phi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k), \tag{3.84}$$

$$\bar{x}_{\alpha_j^i}=0\ \forall j\in J_i;\ \bar{x}_{\alpha_j^i}=1\ \forall j\in J_k\setminus J_i,\ i\in J_{k-1}. \tag{3.85}$$

Назвемо підмножину точок простору R^{k+1}, що задовольняють при фіксованому наборі $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i$ умовам (3.80)-(3.85), ребром графіка функції $\Phi(x)$ і позначимо $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$. Як легко бачити, зі *співвідношень (3.80)-(3.85) для точок ребра* $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ $\forall t\geq 0$ виконуються умови

$$x_{\alpha_1^i}=\ldots=x_{\alpha_i^i}=\frac{k+1}{2}-t; \tag{3.86}$$

$$x_{\alpha_{i+1}^i}=\ldots=x_{\alpha_k^i}=\frac{k+1}{2}+\frac{it}{k-i}; \tag{3.87}$$

$$x_{k+1} = \Phi(x) = t_{\frac{k}{k-i}}\, \Phi(\bar{x}); \qquad (3.88)$$

$\bar{x}=(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$, і навпаки. А підстановка значень x_i, $i \in J_k$ з умов (3.86), (3.87) в рівняння (3.79) дає тотожність.

Назвемо проекцією ребра $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ на гіперплощину $x_{k+1}=0$ множину точок $P(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i) \subset R^k$, що задовольняють обмеженням (3.80)-(3.83), або, що те саме, (3.86), (3.87). Проекції $P(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$, ребру $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ можна поставити у взаємно однозначну відповідність $(k-2)$-грань многогранника $\Pi_k(J_k)$, яка означається системою з двох рівнянь: (3.79) та

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j^i} = i(i+1)/2. \qquad (3.89)$$

<u>Теорема 3.23.</u> Кількість ребер графіка функції $\Phi(x)$ дорівнює 2^k-2.

<u>Доведення.</u> Справедливість твердження випливає з взаємно однозначної відповідності множини ребер графіку функції $\Phi(x)$ та множини $(k-2)$-граней многогранника $\Pi_k(J_k)$. З урахуванням зауваження 2.1 кількість нерівностей, що входять в систему (2.5), яка описує при $n=k$, $G=J_k$ переставний многогранник $\Pi_{nk}(G)=\Pi_k(J_k)$, дорівнює 2^k, але нерівності сімок з номерами 0 та k дають рівняння гіперплощини (3.79). Система (3.79), (3.89), яка за наслідком 2.6 визначає $(k-2)$-грань многогранника $\Pi_k(J_k)$, складається з рівняння гіперплощини (3.79) і рівняння, одержаного з довільної нерівності системи (2.5), крім двох нерівностей, що дають гіперплощину (3.79). Таким чином, кількість $(k-2)$-граней, а відповідно і ребер графіка функції $\Phi(x)$ дорівнює 2^k-2. Що і треба було довести.

Позначимо L_t, $t \in |\langle L_t \rangle|$, та назвемо областю лінійності функції $\Phi(x)$ множину точок з R^k, в яких вираз (3.76) набуває вигляду

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} (-1)^{\alpha(i,j)} c_{ij}(x_i - x_j), \qquad (3.90)$$

15-1091

де $\alpha(i,j)\in\{1,2\}$ - сталі для L_t величини, $\alpha(i,j)=1$, якщо $x_i<x_j$ та $\alpha(i,j)=2$, якщо $x_i>x_j$.

Теорема 3.24. Кожній області лінійності функції $\Phi(x)$ належить одна точка множини $E_k(J_k)$, і навпаки.

Доведення. Зафіксуємо $t\in|\{L_t\}|$. Нехай точка $x=(x_1, \ldots, x_k)\in L_t\subset R^k$ - довільна, тоді з означення L_t існує переставлення $i=(i_1, \ldots, i_k)\in E_k(J_k)$ таке, що виконуються умови

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_k}. \tag{3.91}$$

Покажемо, що існує переставлення $j\in E_k(J_k)$ таке, що $j\in L_t$. Легко бачити, що переставлення $j\in E_k(J_k)$, яке задовольняє умові

$$j_{i_1} < j_{i_2} < \ldots < j_{i_k}, \tag{3.92}$$

належить області L_t. Таким чином, перша частина теореми доведена.

Нехай тепер $j=(j_1, \ldots, j_k)\in E_k(J_k)$ - довільне переставлення. Покажемо, що існує область лінійності L_t функції $\Phi(x)$ така, що $j\in L_t$. Якщо $i=(i_1, \ldots, i_k)\in E_k(J_k)$ переставлення, яке упорядковує переставлення j згідно з умовою (3.92), то область L_t, якій j належить, очевидно, буде множиною точок точками $x=(x_1, \ldots, x_k)\in R^k$, які задовольняють умові (3.91). Що і треба було довести. Таким чином, доведена взаємно однозначна відповідність між множиною областей лінійності функції $\Phi(x)$ та множиною переставлень $E_k(J_k)$.

Наслідок 3.25. Кількість областей лінійності функції $\Phi(x)$ дорівнює $k!$.

Доведення. Справедливість цього факту випливає з взаємно однозначної відповідності між множиною $E_k(J_k)$ та множиною областей лінійності функції $\Phi(x)$. А, як відомо, $|E_k(J_k)|=k!$. Що і треба було довести.

Теорема 3.26. Проекція $P(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ ребра графика функції $\Phi(x)$, що задається співвідношенням (3.76), збігається з характеристичним променем $(k-2)$-грані многогранника $\Pi_k(J_k)$, яка визначається системою рівнянь (3.79), (3.89).

Доведення. Як випливає з означення характеристичного променя $(k-2)$-грані переставного многогранника він починається в точці $o_1(t^*, \ldots, t^*)\in R^k$ і проходить через характеристичну точку $o_2\in R^k$ цієї $(k-2)$-грані, де у випадку многогранника $\Pi_k(J_k)$ має місце рівність $t^*=\frac{k+1}{2}$. А з формул (2.23), (2.24) у випадку $G=J_k$ одержуємо координати характеристичної точки:

$$\alpha^* = x_{\alpha^i_j} = \frac{1+i}{2} \quad \forall j\in J_i, \tag{3.93}$$

$$\beta^* = x_{\alpha^i_j} = \frac{1+i+k}{2} \quad \forall j\in J_k/J_i. \tag{3.94}$$

Очевидно, що при $t=0$ формули (3.86), (3.87), які визначають проекцію $P(\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_i)$, дають координати точки o_1. А якщо прийняти $t=\frac{k-i}{2}$, то із співвідношень (3.86), (3.87) одержуємо координати α^*, β^* характеристичної точки $(k-2)$-грані (3.79), (3.89), які визначені відповідно умовами (3.93), (3.94). Що і треба було довести.

При фіксованому i, $i\in J_{k-1}$, ребро $R(\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_i)$ назвемо ребром типу i, а проекцію $P(\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_i)$ - проекцією типу i.

Обчислимо кут φ між ребром $R(\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_i)$ типу i та гіперплощиною x_{k+1}. Очевидно, що $\varphi=90^\circ-\psi$, де ψ - кут між напрямним вектором a ребра $R(\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_i)$, координати a_i, $i\in J_{k+1}$, якого задаються умовами (3.83)-(3.85), та нормальним вектором гіперплощини $x_{k+1}=0$, всі координати якого, крім одиничної $(k+1)$-ї, дорівнюють нулю. Скориставшись співвідношенням між кутами ψ та φ і відомим виразом для $\cos\psi$ через скалярний добуток векторів та їх норми, маємо

$$\sin\varphi = \frac{\left(\frac{k}{i(k-i)}\right)^{1/2}\Phi(\bar{x})}{\left(1+\frac{k}{i(k-i)}\Phi^2(\bar{x})\right)^{1/2}}. \tag{3.95}$$

Очевидно, що з геометричної точки зору кут φ можна розгляда-

15[x]

ти як величину, що означається тільки числом $\Phi(x')$. Тут точка x' - це проекція на площину $x_{k+1}=0$ точки перетину ребра $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ з циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна координатній осі Ox_{k+1}, а напрямна - це $(k-1)$-сфера w, що визначається теоремою 2.2 і описується рівнянням

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - t^*)^2 = r^2, \tag{3.96}$$

де

$$r = 0{,}5\sqrt{(k-1)k(k+1)/3}, \tag{3.97}$$

$$t^* = (k+1)/2. \tag{3.98}$$

Дійсно це так, тому що $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Phi(x')}{r}$.

<u>Теорема 3.27.</u> Справедливе співвідношення

$$\Phi(x') = r\omega(i)\sigma(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i), \tag{3.99}$$

де r обчислюється за формулою (3.97),

$$\omega(i) = \sqrt{\frac{k}{i(k-i)}}, \tag{3.100}$$

а $\sigma(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)=\Phi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$, якщо $\bar{x}_j$, $j\in J_k$, задовольняє умові (3.85).

<u>Доведення.</u> Позначимо $x'_{\alpha_j^i}=\alpha_1^* \ \forall j\in J_i$, $x'_{\alpha_j^i}=\beta_1^* \ \forall j\in J_k\setminus J_i$. Так як x' - проекція на площину x_{k+1} точки перетину ребра $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ з описаною циліндричною поверхнею, то очевидно, що x' - точка перетину проекції $P(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ зі сферою (3.96), тобто згідно з теоремою 3.26 точка перетину характеристичного променя відповідної $(k-2)$-грані многогранника $\Pi_k(J_k)$ зі сферою (3.96). Тому координати α_1^*, β_1^* точки x' обчислюються відповідно за формулами (2.29), (2.30). Звідси випливає, що $|\alpha_1^*-\beta_1^*|=|-\frac{r}{k\gamma}+r\gamma|$, де γ визначається формулою (2.31), або після деяких перетворень

$$|\alpha_1^* - \beta_1^*| = r\omega(i), \tag{3.101}$$

якщо використати позначення (3.100). Для обчислення $\Phi(x')$ підставимо α_1^*, β_1^* у формулу (3.76) з використанням співвідношення (3.101). З урахуванням позначень (3.85) одержуємо, що $\Phi(x')$ обчислюється за формулою (3.99), що і треба було довести.

Таким чином, з теореми 3.27 маємо наслідок.

Наслідок 3.28. Якщо координати $\bar{x}_j$, $j \in J_k$, точки $\bar{x}$ задовольняють умовам (3.85), то

$$tg\ \varphi = \sqrt{\frac{k}{i(k-i)}}\ \Phi(\bar{x}). \qquad (3.102)$$

Зауважимо, що формулу (3.102) можна одержати з виразу (3.95), скориставшись відомими співвідношеннями між тригонометричними функціями, або з виразу (3.88), якщо покласти $t=r\gamma$, як це випливає з порівняння координат точки x', які задовольняють умови (2.29), (2.30) та (3.86), (3.87) одночасно, при умові урахування співвідношень (2.31), (3.97), (3.98) для γ, r та t^* відповідно.

Очевидно, що в алгоритмі розв"язання задачі (3.74), (3.75), до викладу якого ми переходимо, доцільніше використовувати для обчислення кута φ формулу (3.102), а не (3.95).

Спосіб розв"язання задачі (3.74),(3.75) описаний у вигляді алгоритму А1, який використовує у своїй роботі алгоритм А2.

Для викладу алгоритмів нам будуть потрібні такі допоміжні означення. Суміжними ребрами (проекціями) назвемо ребра (проекції) графіка функції $\Phi(x)$, якщо відповідні їм $(k-2)$-грані многогранника $\Pi_k(J_k)$ вигляду (3.79),(3.89) суміжні. Ребро графіка функції $\Phi(x)$ назвемо найменш похилим, якщо всі суміжні з ним ребра мають більший нахил. Перейдемо до викладу алгоритмів.

Алгоритм А1.

Крок 1. Відбувається формування кожного з $(k-1)$-го ребер $R(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i)$ графіка функції $\Phi(x)$, по одному кожного типу, тобто формуються $(k-1)$-на множина вигляду $\{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_i^i\}$.

Крок 2. За допомогою формули (3.102) визначається найменш нахилене з ребер, сформованих на кроці 1. Позначимо його $R(\alpha_1^{\gamma^*}, \ldots, \alpha_{\gamma^*}^{\gamma^*})$.

Крок 3. Покладемо $j=1$.

Крок 4. Якщо $\gamma^*=j$, то переходимо на крок 6. У противному разі - на крок 5.

Крок 5. Вибираємо суміжне (за допомогою крітерію суміжності граней (теорема 2.12)) ребро типу j, обчислюємо його нахил. Якщо всі суміжні з ребром $R(\alpha_1^{\gamma^*}, \ldots, \alpha_{\gamma^*}^{\gamma^*})$ ребра типу j розглянуті, вибираємо ребро з найменшим нахилом з них, позначимо його $R(\alpha_1^{j^*}, \ldots, \alpha_j^{j^*})$.

Крок 6. Збільшуємо j на одиницю.

Крок 7. Якщо $j=k$, переходимо на крок 8. У противному разі - на крок 4.

Крок 8. З одержаних $(k-2)$-х ребер $R(\alpha_1^{j^*}, \ldots, \alpha_{\gamma^*}^{j^*})$, $j^*\in J_{k-1}\setminus\{\gamma^*\}$, вибираємо ребро з найменшим нахилом. Нехай його тип є δ.

Крок 9. Якщо нахил ребра $R(\alpha_1^{\delta},\ldots,\alpha_{\delta}^{\delta})$ менше нахилу ребра $R(\alpha_1^{j^*},\ldots,\alpha_{\gamma^*}^{j^*})$, то покладемо $\gamma^*=\delta$ і перейдемо на крок 3. У противному разі - перехід на крок 10.

Крок 10. Перевіряємо сумісність системи

$$\begin{cases} x_{\alpha_1^i} + \ldots + x_{\alpha_i^i} = i(i+1)/2 & \forall i\in J_{k-1}; \\ x_1 + \ldots + x_k = k(k+1)/2, \end{cases} \tag{3.103}$$

де $(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_i^i)\in\{(\alpha_1^{j^*}, \ldots, \alpha_j^{j^*})\ \forall j^*\in J_{k-1}\setminus\{\gamma^*\},\ (\alpha_1^{\gamma^*}, \ldots, \alpha_{\gamma^*}^{\gamma^*})\}$.

Зазначимо, що рівняння з системи (3.103) визначають відповідні знайденим ребрам $(k-2)$-грані многогранника $\Pi_k(J_k)$. Назвемо номером рівняння в системі (3.103) верхній індекс i, $i\in J_{k-1}$, у величини α_j^i, а номером останнього рівняння вважаємо k. Якщо система (3.103) сумісна, то її розв'язок - це розв'язок задачі (3.75) в силу опуклості функції $\Phi(x)$ і так як розв'язок системи вигляду (3.46) – це одна з вершин $\Pi_k(J_k)$ (наслідок 2.7). У цьому випадку алгоритм закінчує роботу. У противному разі переходимо на крок 11.

Крок 11. Визначається сумісна підсистема максимального рангу r системи (3.103).

Крок 12. Покладемо $r_1=r-1$.

Крок 13. Визначається множина $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ суміжних підсистем рангу r_1.

Крок 14. Покладемо $\xi=1$.

Крок 15. Звернення до алгоритму А2. На вході в алгоритм А2 потрібна система A_ξ, на виході маємо систему $\bar{A}_\xi$.

Крок 16. Перевіряємо суміжність системи $\bar{A}_\xi$.

Крок 17. Якщо система $\bar{A}_\xi$ сумісна, розв'язуємо її, розв'язок запам'ятовуємо. У противному разі з нею поведемося як з A_ξ (доповнюємо її згідно з алгоритмом А2 і так далі).

Крок 18. Збільшуємо ξ на одиницю.

Крок 19. Перевіряємо: $\xi>k$. Якщо ця умова виконується, переходимо на крок 20, у противному разі – на крок 15.

Крок 20. Як розв'язок задачі вибираємо кращий з розв'язків, що одержані на кроці 17. Алгоритм закінчує роботу.

<u>Алгоритм А2.</u> На вході до нього потрібна система A, на виході маємо систему $\bar{A}$. Позначимо рівняння системи u_j, $u_q \in A$, де j,q $(j<q-1)$ – номера рівнянь; $j,q \in J_k$; $u_\lambda \notin A$ $\forall \lambda \in J_{q-1} \setminus J_j$ (якщо $j=0$, вважаємо, що $J_j=\emptyset$).

Крок 1. Визначається кількість T і склад (j_τ, q_τ), $\tau \in J_T$ пар номерів j_τ, q_τ таких рівнянь u_{λ_τ} з системи вигляду (3.103), які не входять в A.

Крок 2. Покладемо $\tau=1$

Крок 3. На цьому кроці індекс τ у величин j, q, λ для простоти пропущено. Система Λ доповнюється рівнянням $\bar{u}_\lambda$ $\forall\lambda\in J_{q-1}\setminus J_j$, сумісним з u_j та u_q, причому ребро, яке відповідає грані многогранника $\Pi_k(J_k)$, що лежить на гіперплощині $\bar{u}_\theta$, має найменший нахил з ребер, які мають названу вище властивість серед типу λ. Доповнену систему позначимо $\bar{\Lambda}$.

Крок 4. Збільшуємо τ на одиницю.

Крок 5. Якщо $\tau>T$, то робота алгоритму завершується, у противному разі переходимо до кроку 3.

Розв'язування розглянутої задачі грунтувалось на досліджених властивостях цільової функції (3.76) в процедурі, що використовує деякий перебір. Видається доцільним розглянути ряд загальних властивостей опуклих цільових функцій, які можуть бути використані при розв'язуванні е-задач в комбінаторних методах, в тому числі суттєво переборного типу.

Нехай E – евклідова комбінаторна множина простору R^k, $x=(x_1, \ldots, x_k)\in R^k$, а $\operatorname{int} M$ означає множину внутрішніх точок множини M.

<u>Лема 3.29</u> [108]. Якщо $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то: 1) $\forall y\in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (p(y),y) + \min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i, \qquad (3.104)$$

2) щоб точка $y\in E\subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині E функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$\min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i = (p(y),y), \qquad (3.105)$$

де $p(y)=(p_1(y), \ldots, p_k(y))$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y.

<u>Доведення.</u> Для доведення першої частини леми скористаємося фактом існування непустої опуклої замкненої і обмеженої множини субградієнтів $p(y)$ (дивись, наприклад, [108]) в будь-якій внутрішній точці y опуклої множини X – області означення скінченної опуклої функції $\varphi(x)$. Причому, якщо множина субградієнтів склада-

ється з єдиної точки, то ця точка є градієнтом $\nabla\varphi(x)$ функції в точці y, у противному разі функція $\varphi(x)$ в точці y недиференційовна. Таким чином, за означенням субградієнта $\forall x, y \in \operatorname{int} X$ справедлива нерівність $\varphi(x)-\varphi(y) \geq (p(y), x-y)$. Переходячи до знаходження мінімуму функції $\varphi(x)$ на множині E, після очевидних перетворень одержуємо

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - \sum_{i=j}^{k} p_i(y)y_i + \min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i,$$

що і треба було довести в першій частині леми.

Для доведення другої частини припустимо, що виконується рівність (3.105). Тоді із справедливої нерівності (3.104) одержуємо $\min_{x\in E}\varphi(x) \geq \varphi(y)$. Але $y \in E$, тому за означенням мінімуму $\min_{x\in E}\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Тобто $\min_{x\in E}\varphi(x) = \varphi(y)$, $y = \arg\min_{x\in E}\varphi(x)$, що і треба було довести у другій половині леми. Таким чином, лема доведена.

Наслідок 3.30. Якщо при виконанні умов леми 3.29 функція $\varphi(x)$ диференційовна на множині X, то 1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (\nabla\varphi(y), y) + \min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial y_i} x_i, \quad (3.106)$$

2) щоб точка $y \in E \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині E функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$\min_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial y_i} x_i = (\nabla\varphi(y), y). \quad (3.107)$$

Зауваження 3.9. Наслідок 3.30 збігається з результатами лем 1 та 2 з [107], в яких $E \in \langle E_{kn}(G), E_n^k(G), \bar{E}_n^k(G), E_k(G) \rangle$.

Розглянемо тепер екстремальні властивості опуклих функцій на конкретних реалізаціях е-множини E, почавши з множини $\bar{S}_n^k(G)$.

Теорема 3.31. Якщо $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $\bar{S}_n^k(G) \subset X$, то: 1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \varphi(x) \geq \varphi(y) - (p(y), y) + e_1 \sum_{i=1}^{s} p_i(y) + e_n \sum_{i=s+1}^{k} p_i(y), \quad (3.108)$$

2) щоб точка $y \in \bar{S}_n^k(G) \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $\bar{S}_n^k(G)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

16-1091

$$(p(y),y) = \theta_1 \sum_{i=1}^{s} p_i(y)+\theta_n \sum_{i=s+1}^{k} p_i(y), \qquad (3.109)$$

де $p(y)=(p_1(y), \ldots, p_k(y))$ – субградієнт функції $\psi(x)$ в точці y, θ_1 – найменший, а θ_n – найбільший елементи основи $S(G)$, мультимножини G, а стала $s\in J_k^o$ знаходиться із співвідношень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{t} p_{s-j+1}(y) \geq 0 \quad \forall t\in J_s; \\ \sum_{j=1}^{t} p_{s+j}(y) \leq 0 \quad \forall t\in J_{k-s}. \end{cases} \qquad (3.110)$$

Доведення. Скористаємось лемою 3.29, де як множина E фігурує множина $\bar{S}_n^k(G)$. Тоді із співвідношення (3.104) маємо

$$\min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \psi(x) \geq \psi(y) - (p(y),y) + \min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \sum_{i=1}^{s} p_i(y)x_i . \quad (3.111)$$

Мінімум у правій частині співвідношення (3.111) знаходимо згідно з теоремою 3.3, звідкіля при $c_i=p_i(y)$ $\forall i\in J_k$ з системи (3.19) для визначення сталої s випливає умова (3.110), а з рівностей (3.20) – співвідношення

$$\min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \sum_{i=1}^{s} p_i(y)x_i = \theta_1 \sum_{i=1}^{s} p_i(y) + \theta_n \sum_{i=s+1}^{k} p_i(y), \quad (3.112)$$

яке при підстановці в формулу (3.111) і дає справедливість оцінки (3.108) з першої частини теореми. А в порівнянні з формулою (3.105) рівність (3.112) дає справедливість умови (3.109). Таким чином, теорема доведена.

Зауваження 3.10. Зазначимо, що умови (3.110) для визначення сталої $s\in J_k^o$ еквівалентні співвідношенню (при $p_o(y)\equiv 0$)

$$p_o(y)+p_1(y)+\ldots+p_s(y) = \max_{i\in J_k^o}(p_o(y)+p_1(y)+\ldots+p_i(y)). \quad (3.113)$$

Це випливає з еквівалентності умов (3.19) та (3.25).

Наслідок 3.32 [62, 88, 89]. Якщо при виконанні умов теореми 3.31 функція $\psi(x)$ диференційовна на множині $X\supset \bar{S}_n^k(G)$, то

1) $\forall y\in \mathrm{int} X$

$$\min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \psi(x) \geq \psi(y) - (\nabla\psi(y),y) + e_1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} + e_n \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i},$$

2) щоб точка $y\in\bar{S}_n^k(G)\subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $\bar{S}_n^k(G)$ функції $\psi(x)$, достатньо виконання умови

$$(\nabla\psi(y),y) = e_1 \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} + e_n \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i},$$

де стала $s\in J_k^o$ знаходиться із співвідношень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{t} \dfrac{\partial\psi(y)}{\partial y_{s+1-j}} \geq 0 \;\; \forall t\in J_s; \\ \sum\limits_{j=1}^{t} \dfrac{\partial\psi(y)}{\partial y_{s+j}} \leq 0 \;\; \forall t\in J_{k-s}. \end{cases} \tag{3.114}$$

Зазначимо, що з еквівалентності умов (3.110) і (3.113) для визначення сталої s випливає рівносильність співвідношення (3.114) і наступного (при $\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_0}=0$)

$$\sum_{j=0}^{s} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_j} = \max_{i\in J_k^o} \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_j}. \tag{3.115}$$

Розглянемо тепер деякі екстремальні властивості опуклих функцій на множині $E(G,H)$.

<u>Теорема 3.33.</u> *Якщо $\psi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E(G,H)\subset X$, то* 1) $\forall y\in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E(G,H)} \psi(x) \geq \psi(y) - (p(y),y) + \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_\lambda} p_{\alpha_j^\lambda}(y) g_j^{K_\lambda}, \tag{3.116}$$

2) щоб точка $y\in E(G,H)\subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E(G,H)$ функції $\psi(x)$, достатньо виконання умови

$$(p(y),y) = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_\lambda} p_{\alpha_j^\lambda}(y) g_j^{K_\lambda}, \tag{3.117}$$

де $p(y)=(p_1(y), \ldots, p_k(y))$ – субградієнт функції $\psi(x)$ в точці y, $k_1+\ldots+k_s=k$, переставлення $(\alpha_1^\lambda, \ldots, \alpha_{k_\lambda}^\lambda)\in E_{k_\lambda}(N'_\lambda)$ при N'_λ $\forall\lambda\in J_s$ у вигляді (3.32) задовольняють умові

$$p_{\alpha_1^\lambda}(y) \geq p_{\alpha_2^\lambda}(y) \geq \ldots \geq p_{\alpha_{k_\lambda}^\lambda}(y), \tag{3.118}$$

а елементи мультимножини G^{K_i} $\forall i\in J_s$ упорядковані згідно з нерівностями (3.31).

Доведення. Скористаємося лемою 3.29, підставивши у формулу (3.104) замість множини E загальну поліпереставну множину $E(G,H)$

$$\min_{x\in E(G,H)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (p(y),y) + \min_{x\in E(G,H)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i . \quad (3.119)$$

Мінімум у правій частині співвідношення (3.119) знаходимо за теоремою 3.6, якщо $c_i = p_i(y)$ $\forall i\in J_k$. З урахуванням формули (3.33) одержуємо, що

$$\min_{x\in E(G,H)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_\lambda} p_{\alpha_j^\lambda}(y) g_j^{K_\lambda}, \quad (3.120)$$

яке при підстановці у співвідношення (3.119) і дає оцінку (3.116) з першої частини теореми. А в порівнянні з формулою (3.105) рівність (3.120) дає справедливість умови (3.117). Таким чином, теорема доведена.

Наслідок 3.34. Якщо при виконанні умов теореми 3.33 функція $\varphi(x)$ диференційовна на множині $X\supset E(G,H)$, то 1) $\forall y\in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E(G,H)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (\nabla\varphi(y),y) + \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_\lambda} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_j^\lambda}} g_j^{K_\lambda},$$

2) *щоб точка $y\in E(G,H)\subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E(G,H)$ функції* $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(\nabla\varphi(y),y) = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_\lambda} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_j^\lambda}} g_j^{K_\lambda},$$

де $k_1+\ldots+k_s=k$, переставлення $(\alpha_1^\lambda, \ldots, \alpha_{k_\lambda}^\lambda)\in E_{k_\lambda}(N_\lambda')$ при N_λ' $\forall\lambda\in J_s$ у вигляді (3.32) задовольняє умові

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_1^\lambda}} \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_2^\lambda}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_{k_\lambda}^\lambda}}, \quad (3.121)$$

а елементи мультимножини G^{K_i} $\forall i\in J_s$ упорядковані згідно з нерівностями (3.31).

Зауваження 3.11. Якщо положити $s=1$, то, як показано раніше

$E(G,H) \equiv E_{kn}(G)$, тобто ми маємо діло з загальною множиною переставлень, для якої очевидно з теореми 3.33 та наслідку 3.34 випливають такі висновки. (Диференційовний випадок дивись також в [75].)

<u>Наслідок 3.35.</u> Якщо $\varphi(x)$ - скінченна, опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{kn}(G) \subset X$, то 1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x \in E_{kn}(G)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (p(y),y) + \sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(y) g_j , \qquad (3.122)$$

2) щоб точка $y \in E_{kn}(G) \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E_{kn}(G)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(p(y),y) = \sum_{j=1}^{k} p_{\alpha_j}(y) g_j , \qquad (3.123)$$

де $p(y)=(p_1(y), \dots, p_k(y))$ - субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y, переставлення $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in E_k(J_k)$ задовольняє умові

$$p_{\alpha_1}(y) \geqslant p_{\alpha_2}(y) \geqslant \dots \geqslant p_{\alpha_k}(y), \qquad (3.124)$$

а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.2).

<u>Наслідок 3.36.</u> Якщо при виконанні умов наслідку 3.35 функція $\varphi(x)$ диференційовна на множині $X \supset E_{kn}(G)$, то 1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x \in E_{kn}(G)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (\nabla\varphi(y),y) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_j}} g_j ,$$

2) щоб точка $y \in E_{kn}(G) \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E_{kn}(G)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(\nabla\varphi(y),y) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_j}} g_j ,$$

де переставлення $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in E_k(J_k)$ задовольняє умові

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_1}} \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_2}} \geqslant \dots \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\alpha_k}} ,$$

а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.2).

Як вже зазначено, аналог наслідку 3.36 розглянуто у [75].

Розглянемо деякі екстремальні властивості опуклих функцій на множині $E^k_{\eta n}(G)$.

<u>Теорема 3.37</u> [108]. Якщо $\varphi(x)$ - скінченна, опукла функція, яка задана на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E^n_{\eta n}(G)\subset X$, то

1) $\forall y\in \operatorname{int} X$

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \varphi(x)\geqslant\varphi(y)-(p(y),y)+\sum_{i=1}^{s} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum_{i=s+1}^{k} p_{\beta_i}(y)g_{\eta-k+i}, \quad (3.125)$$

2) щоб точка $y\in E^k_{\eta n}(G)\subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E^k_{\eta n}(G,H)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(p(y),y)=\sum_{i=1}^{s} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum_{i=s+1}^{k} p_{\beta_i}(y)g_{\eta-k+i}, \quad (3.126)$$

де $p(y)=(p_1(y), \ldots, p_k(y))$ - субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y, переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ задовольняє умові

$$p_{\beta_1}(y)\geqslant p_{\beta_2}(y)\geqslant\ldots\geqslant p_{\beta_s}(y)\geqslant 0 > p_{\beta_{s+1}}(y)\geqslant\ldots\geqslant p_{\beta_k}(y), \quad (3.127)$$

а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.46).

<u>Доведення.</u> Скористаємося лемою 3.29 при $E=E^k_{\eta n}(G)$:

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \varphi(x)\geqslant\varphi(y)-(p(y),y)+\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)}\sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i . \quad (3.128)$$

Мінімум в правій частині співвідношення (3.128) знаходимо за теоремою 3.1 з урахуванням зауваження 3.2 при $c_i=p_i(y)$ $\forall i\in J_k$. Маємо

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)}\sum_{i=1}^{k} p_i(y)x_i=\sum_{i=1}^{s} p_{\beta_i}(y)g_i+\sum_{i=s+1}^{k} p_{\beta_i}(y)g_{\eta-k+i}, \quad (3.129)$$

де переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ та стала $s\in J^o_k$ означаються співвідношенням

$$p_{\beta_1}(y)\geqslant p_{\beta_2}(y)\geqslant\ldots\geqslant p_{\beta_s}(y)\geqslant 0 > p_{\beta_{s+1}}(y)\geqslant\ldots\geqslant p_{\beta_k}(y),$$

а елементи мультимножини G задовольняють умові (2.46).

Підставивши значення знайденого мінімуму з формули (3.129) в нерівність (3.128), одержуємо справедливість нерівності (3.125).

що доводиться. А в порівнянні з формулою (3.105) рівність (3.129) дає справедливість умови (3.126). Таким чином, обидві частини теореми доведені.

<u>Наслідок 3.38</u> [62, 89]. Якщо при виконанні умов теореми 3.37, функція $\varphi(x)$ диференційовна на множині $X \supset E^k_{\eta n}(G)$, то

1) $\forall y \in \operatorname{int} X$

$$\min_{x \in E^k_{\eta n}(G)} \varphi(x) \geqslant \varphi(y) - (\nabla\varphi(y), y) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_i}} g_i + \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_i}} g_{\eta-k+i},$$

2) щоб точка $y \in E^k_{\eta n}(G) \subset \operatorname{int} X$ була мінімаллю на множині $E^k_{\eta n}(G)$ функції $\varphi(x)$, достатньо виконання умови

$$(\nabla\varphi(y), y) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_i}} g_i + \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_i}} g_{\eta-k+i},$$

де переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in E_k(J_k)$ та стала $s \in J^0_k$ означаються умовою

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_1}} \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_2}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_s}} \geqslant 0 > \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_{s+1}}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{\beta_k}},$$

а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.46).

Розглянемо деякі екстремальні властивості сильно опуклих функцій у зв'язку з їх оптимізацією на евклідових комбінаторних множинах.

Як відомо [109], функцію $\psi(x)$, яка задана на деякій множині X, називають сильно опуклою, якщо існує стала $\rho>0$ така, що $\forall x,y \in X$ таких, що $[x,y] \subset X$, і $\forall \alpha \in [0,1]$ буде виконуватися нерівність $\psi(\alpha x+(1-\alpha)y) \leqslant \alpha\psi(x)+(1-\alpha)\psi(y)-\alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2$. Величину ρ називають параметром сильної опуклості. Нам буде далі потрібна наступна лема.

<u>Лема 3.40.</u> Якщо E – евклідова комбінаторна множина простору R^k, яка утворюється з мультимножини $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$, точка $c=(c_1, \ldots, c_k) \in R^k$, та $x=(x_1, \ldots, x_k) \in R^k$, то

$$\min_{x\in E}\|x-c\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \tag{3.130}$$

де переставлення $(\delta_1, \dots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняють умові

$$|g_{\delta_1}| \leqslant |g_{\delta_2}| \leqslant \dots \leqslant |g_{\delta_\eta}|. \tag{3.131}$$

Доведення. Перетворимо $\|x-c\|^2=\sum_{i=1}^{k} x_i^2+\sum_{i=1}^{k} c_i^2-2\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$. Обчислимо мінімум за $x\in E$: $\min_{x\in E}\|x-c\|^2 \geqslant \min_{x\in E}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\right) \geqslant$
$\geqslant \min_{x\in E}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2+\sum_{i=1}^{k} c_i^2\right) - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\max_{x\in E}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$,
де через g_{δ_i} позначені упорядковані по зростанню (з ростом i) абсолютної величини елементи мультимножини G, тобто упорядковані згідно з умовою (3.131). Що і треба було довести.

Наслідок 3.41 [82, 88, 89]. Якщо $c=(c_1, \dots, c_k)$ – довільна точка простору R^k,

$$\tilde g = \min_{i\in J_\eta} |g_i|, \tag{3.132}$$

стала $s\in J_k^0$ означається співвідношенням (3.26), а e_1 – найменший, e_n – найбільший елементи основи $S(G)$ мультимножини G, то

$$\min_{x\in \bar S_n^k(G)} \|x-c\|^2 \geqslant k\tilde g^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2e_1\sum_{i=1}^{s} c_i - 2e_n\sum_{i=s+1}^{k} c_i. \tag{3.133}$$

Доведення. З леми 3.40 одержуємо $\min_{x\in \bar S_n^k(G)}\|x-c\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 -$ $-2\max_{x\in \bar S_n^k(G)}\sum_{i=1}^{k} c_i x_i$. Врахуємо, що для множини $\bar S_n^k(G)$ виконується співвідношення $g_{\delta_1}=g_{\delta_2}=\dots=g_{\delta_k}$, позначимо $\tilde g=g_{\delta_1}=\min_{i\in J_\eta}|g_i|$. Максималь лінійної функції на $\bar S_n^k(G)$ знайдемо по наслідку 3.4. З урахуванням значення координат максималі (формула (3.20)) одержуємо нерівність

$$\min_{x\in \bar S_n^k(G)} \|x-c\|^2 \geqslant k\tilde g^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\left(e_1\sum_{i=1}^{s} c_i + e_n\sum_{i=s+1}^{k} c_i\right),$$

де $s\in J_k^0$ означається системою нерівностей (3.26). Що і треба було довести.

<u>Наслідок 3.42.</u> Якщо $c=(c_1, \ldots, c_k)$ – довільна точка простору R^k, $\forall q\in J_s$ переставлення $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N'_q)$ задовольняє нерівностям (3.30), елементи мультимножини G^{K_q} – умові (3.31), k_1+ $+\ldots+k_s=k$, а N'_i $\forall i\in J_s$ задається співвідношенням (3.32), то

$$\min_{x\in E(G,H)} \|x-c\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{q=1}^{s} \sum_{i=1}^{k_q} c_{\alpha_i^q}\, g^{K_q}_{k_q-j+1}, \qquad (3.134)$$

де переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131).

<u>Доведення.</u> Якщо в лемі 3.40 як множину E розглянути загальну поліпереставну множину $E(G,H)$ і знайти $\max\limits_{x\in E(G,H)} \sum\limits_{i=1}^{k} c_i x_i$ згідно з наслідком 3.7, то і одержимо справедливість нерівності (3.134), що і треба було довести.

<u>Наслідок 3.43</u> [62, 69]. Якщо $c=(c_1, \ldots, c_k)$ – довільна точка простору R^k, переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131), переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ і стала $s\in J_k^0$ – умові $c_{\beta_1}\leqslant \ldots \leqslant c_{\beta_s}\leqslant 0< c_{\beta_{s+1}}\leqslant \ldots \leqslant c_{\beta_k}$, елементи множини G упорядковані нерівностями (2.46), то

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \|x-c\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{q=1}^{s} c_{\beta_i} g_i - 2\sum_{i=s+1}^{k} c_{\beta_i} g_{\eta-k+i}. \qquad (3.135)$$

Доведення наслідку 3.43 провадиться аналогічно доведенню наслідків 3.41, 3.42.

Розглянемо сильно опуклу функцію $\psi(x)$ з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині X, $E\subset X$. Позначимо w точку, існування і єдиність якої обумовлені в [110], що доставляє мінімум функції $\psi(x)$ на множині X:

$$w=(w_1, \ldots, w_k)=\arg\min_{x\in X} \psi(x). \qquad (3.136)$$

<u>Лема 3.44.</u> Якщо E – евклідова комбінаторна множина простору R^k, яка утворюється з мультимножини $G=(g_1, \ldots, g_\eta)$, функція $\psi(x)$

17-1091

сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то

$$\min_{x\in E} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i, \quad (3.137)$$

де точка w означається формулою (3.136), а переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (3.131).

Доведення. Для функції $\psi(x)$, що задовольняє умовам леми, справедлива [110] $\forall x\in X$ нерівність $\rho\|x-w\|^2\leq\psi(x)-\psi(w)$. А отже, $\min_{x\in E}\psi(x)\geq\psi(w)+\rho\min_{x\in E}\|x-w\|^2$. Мінімум в правій частині оцінимо за допомогою леми 3.40 при $c=w$, з урахуванням якої останнє співвідношення набуде вигляду $\min_{x\in E}\psi(x)\geq\psi(w)+\rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 +\rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2-2\rho\max_{x\in E} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i$, де переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131), а w – (3.136). Що і треба було довести.

Теорема 3.45 [82, 88, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $\bar{S}_n^k(G)\subset X$, то

$$\min_{x\in \bar{S}_n^k(G)} \psi(x)\geq\psi(w)+\rho\left[k\tilde{g}^2+ \sum_{j=1}^{k} w_j^2-2e_1 \sum_{j=1}^{s} w_i-2e_n \sum_{j=s+1}^{k} w_i\right], \quad (3.138)$$

де точка w означається формулою (3.136), стала $\tilde{g}$ – умовою (3.132), константа $s\in J_k^0$ – співвідношеннями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{t} w_{s-j+1}\leq 0 \quad \forall t\in J_s; \\ \sum_{j=1}^{t} w_{s+j}\geq 0 \quad \forall t\in J_{k-s}; \end{cases} \quad (3.139)$$

а e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елементи основи $S(G)$ мультимножини G.

Доведення. Скориставшись лемою 3.44, при $E=\bar{S}_n^k(G)$ з нерівності (3.137) маємо

$$\min_{x\in\bar S_n^k(G)} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x\in\bar S_n^k(G)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i, \quad (3.140)$$

де точка w означається формулою (3.136), а переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (3.131). Як і при доведенні наслідку 3.41 для множини $\bar S_n^k(G)$ одержуємо, що $\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 = k\tilde g$, $\max_{x\in\bar S_n^k(G)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i = e_1 \sum_{i=1}^{s} c_i + e_n \sum_{i=s+1}^{k} c_i$, де $\tilde g$ – означається умовою (3.132), стала $s\in J_k^o$ – співвідношеннями (3.139), а а e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елементи основи $S(G)$ мультимножини G. Підставивши одержані співвідношення в формулу (3.140), отримуємо нерівність (3.138), що і треба було довести.

Теорема 3.46. Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E(G,H)\subset X$, то

$$\min_{x\in E(G,H)} \psi(x) \geq \psi(x) + \rho\left[\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\sum_{q=1}^{s} \sum_{i=1}^{k_q} w_{\alpha_i^q}\, g_{K_{q-i+1}}^{q}\right], \quad (3.141)$$

де точка w означається формулою (3.136), переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131), $\forall q\in J_s$ переставлення $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N_q')$ – нерівностям

$$w_{\alpha_1^q} \geq w_{\alpha_2^q} \geq \ldots \geq w_{\alpha_{k_q}^q}, \quad (3.142)$$

елементи мультимножини G^{K_q} – умові (3.31), $k_1+\ldots+k_s=k$, а N_i' $\forall i\in J_s$ задається співвідношенням (3.32).

Доведення. Скориставшись лемою 3.44, при $E=E(G,H)$ з нерівності (3.137) маємо

$$\min_{x\in E(G,H)} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x\in E(G,H)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i,$$

де точка w означається формулою (3.136), а переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (3.131). Як і при доведенні наслідку 3.42 для множини $E(G,H)$ одержуємо згідно з наслідком

3.7, що $\max\limits_{x\in E(G,H)} \sum\limits_{i=1}^{k} w_i x_i = \sum\limits_{q=1}^{s} \sum\limits_{i=1}^{k_q} w_{\alpha_i^q} g^{K_q}_{k_q-i+1}$, де $\forall q\in J_s$ переставлення $(\alpha_1^q, \dots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N'_q)$ задовольняє умові $w_{\alpha_1^q} \geq w_{\alpha_2^q} \geq \dots \geq w_{\alpha_{k_q}^q}$, елементи мультимножини G^{K_i} – нерівностям (3.131), $k_1+\dots+k_s=k$, а N'_i $\forall i\in J_s$ задається співвідношеннями (3.132). Підставивши одержаний максимум у виписану оцінку отримуємо нерівність (3.141), яку і треба було довести.

<u>Теорема 3.47</u> [82, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E^k_{\eta n}(G)\subset X$, то

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x) \geq \psi(x) + \rho\sum_{i=1}^{k} g^2_{\delta_i} + \rho \sum_{i=1}^{k} w_i^2 -$$

$$- 2\rho\sum_{i=1}^{s} w_{\beta_i} g_i - 2\rho \sum_{i=s+1}^{k} w_{\beta_i} g_{\eta-k+i}, \qquad (3.143)$$

де точка w означається співвідношенням (3.136), а переставлення $(\beta_1, \dots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ і стала $s\in J_k^0$ – нерівностями

$$w_{\beta_1} \leq w_{\beta_2} \leq \dots \leq w_{\beta_s} \leq 0 < w_{\beta_{s+1}} \leq \dots \leq w_{\beta_k}, \qquad (3.144)$$

переставлення $(\delta_1, \dots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – умовою (3.131), а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.46).

<u>Доведення.</u> Скориставшись лемою 3.44, при $E=E^k_{\eta n}(G)$ з нерівності (3.137) маємо

$$\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \psi(x) \geq \psi(w) + \rho\sum_{i=1}^{k} g^2_{\delta_i} + \rho\sum_{i=1}^{k} w_i^2 - 2\rho \max_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i, \qquad (3.145)$$

де точка w означається формулою (3.136), а переставлення $(\delta_1, \dots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ – співвідношенням (3.131). Максимум у правій частині співвідношення (3.145) знайдемо згідно з зауваженням 3.2 при $c_i=-w_i$ $\forall i\in J_k$, тобто $\max\limits_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \sum\limits_{i=1}^{k} w_i x_i = -\min\limits_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \sum\limits_{i=1}^{k} c_i x_i = -\left(\sum\limits_{i=1}^{s} c_{\beta_i} g_i + \sum\limits_{i=s+1}^{k} c_{\beta_i} g_{\eta-k+i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{s} w_{\beta_i} g_i + \sum\limits_{i=s+1}^{k} w_{\beta_i} g_{\eta-k+i}$, де стала $s\in J_s^0$ і переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in E_k(J_k)$ задовольняють нерівності (3.144), яка випливає з умови (3.14) з урахуванням співвідношення між c_i та w_i $\forall i \in J_k$, а елементи мультимножини G упорядковані згідно з умовою (2.46). Підставивши одержаний максимум у нерівність (3.145), одержуємо формулу (3.143), що і треба було довести.

Розглянемо властивості диференційовних сильно опуклих функцій в зв'язку з оптимізацією їх на е-множинах.

<u>Лема 3.48.</u> Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E \subset X$, то

1) $\forall x \in X$

$$\min_{y\in E}\psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i + \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + \rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2 +$$

$$+ \min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i, \qquad (3.146)$$

2) щоб точка $x \in E$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині E, достатньо виконання умови

$$\min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i - \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2, \quad (3.147)$$

де переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta) \in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131).

<u>Доведення.</u> Як відомо [110], для функції $\psi(x)$, яка задовольняє умові теореми, $\forall x,y \in X$ справедлива нерівність

$$\psi(y) - \psi(x) \geq \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}(y_i - x_i) + \rho\|y-x\|^2. \qquad (3.148)$$

Перетворивши нерівність (3.148) і перейшовши до мінімуму по $y \in E$, одержуємо

$$\min_{y\in E}\psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i + \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + \min_{y\in E}\left[\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i\right].$$

Звідси в силу властивості мінімуму маємо

$$\min_{y\in E}\psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i + \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + \rho\min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}y_i^2 +$$

$$+ \min_{y\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i.$$

З урахуванням того, що $\min\limits_{y\in E}\sum\limits_{i=1}^{k}y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2$, де переставлення $(\delta_1,$

$\ldots, \delta_\eta) \in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131), з останньої нерівності маємо оцінку (3.146), що і треба було довести в першій частині леми.

Для доведення другої частини припустимо, що виконується рівність (3.147). Тоді зі справедливого при цьому співвідношення (3.146) маємо $\min\limits_{y \in E} \psi(y) \geqslant \psi(x)$. Так як $x \in E$, то за означенням мінімуму $\min\limits_{y \in E} \psi(y) \leqslant \psi(x)$, тобто $\min\limits_{y \in E} \psi(y) = \psi(x)$, $x = \arg\min\limits_{y \in E} \psi(y)$, що і треба було довести у другій частині леми. Таким чином, лему доведено.

Теорема 3.49 [62, 88, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho > 0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $\bar{S}_n^k(G) \subset X$, то 1) $\forall x \in X$

$$\min_{y \in \bar{S}_n^k(G)} \psi(y) \geqslant \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho k \tilde{g}^2 +$$

$$+ e_1 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) + e_n \sum_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right), \tag{3.149}$$

2) щоб точка $x \in \bar{S}_n^k(G)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $\bar{S}_n^k(G)$, достатньо виконання умови

$$e_1 \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) + e_n \sum_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i - \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \rho k \tilde{g}^2, \tag{3.150}$$

де стала $\tilde{g}$ визначається умовою (3.132), константа $s \in J_k^0$ – системою нерівностей

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{t} \left(\dfrac{\partial \psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1} \right) \geqslant 0 \quad \forall t \in J_s, \\ \sum\limits_{j=1}^{t} \left(\dfrac{\partial \psi(x)}{\partial x_{s+j}} - 2\rho x_{s+j} \right) \leqslant 0 \quad \forall t \in J_{k-s}; \end{cases} \tag{3.151}$$

e_1, e_n – відповідно найменший та найбільший елементи основи $S(G)$ мультимножини G.

Доведення. Скористаємося лемою 3.48, поклавши $E = \bar{S}_n^k(G)$. При цьому врахуємо, що для множини $\bar{S}_n^k(G)$ $g_{\delta_i} = \tilde{g}$ $\forall i \in J_k$, де стала $\tilde{g}$ означається співвідношенням (3.132). За теоремою 3.3 при

$$c_i = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \quad \forall i\in J_k \tag{3.152}$$

визначимо, що $\min\limits_{y\in \bar S_n^k(G)} \sum\limits_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i = e_1 \sum\limits_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right) +$

$+e_n \sum\limits_{i=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)$, де стала $s\in J_k^o$ означається співвідношеннями (3.19), (3.152), а e_1, e_n – найменший та найбільший елементи основи мультимножини G. Це остаточно і доводить теорему, якщо врахувати еквівалентність умови (3.151) та співвідношень (3.19), (3.152).

<u>Теорема 3.50.</u> Якщо функція $\psi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $\bar S_n^k(G)\subset X$, то 1) $\forall x\in X$

$$\min_{y\in E(G,H)} \psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i + \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + \rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2 +$$

$$+ \sum_{q=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_q}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_j^q}} - 2\rho x_{\alpha_j^q}\right)g_j^{K_j}, \tag{3.153}$$

2) щоб точка $x\in E(G,H)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $E(G,H)$, достатньо виконання умови

$$\sum_{q=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_q}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_j^q}} - 2\rho x_{\alpha_j^q}\right)g_j^{K_j} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i - \rho\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - \rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2, \tag{3.154}$$

де переставлення $(g_1, \ldots, g_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ задовольняє умові (3.131), $\forall q\in J_s$ переставлення $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N'_q)$ – нерівностям

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_1^q}} - 2\rho x_{\alpha_1^q} \geq \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_2^q}} - 2\rho x_{\alpha_2^q} \geq \ldots \geq \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_{k_q}^q}} - 2\rho x_{\alpha_{k_q}^q}, \tag{3.155}$$

елементи мультимножини G^{K_i} – умові (3.31), $k_1 + \ldots + k_s = k$, а N'_i $\forall i\in J_s$ задається співвідношенням (3.32).

<u>Доведення.</u> Скористаємося лемою 3.48, поклавши $E=E(G,H)$. При цьому врахуємо, що за теоремою 3.6 при сталих c_i $\forall i\in J_k$, які обчислюються за (3.152),

$$\min_{y\in E(G,H)} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right)y_i = \sum_{q=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_q}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\alpha_j^q}} - 2\rho x_{\alpha_j^q}\right) g_j^{K_j},$$

де $\forall q\in J_s$ переставлення $(\alpha_1^q, \ldots, \alpha_{k_q}^q)\in E_{k_q}(N_q')$ задовольняють умовам (3.30), (3.152), N_i' $\forall i\in J_s$ задається співвідношенням (3.32), $k_1+\ldots+k_s=k$, а елементи мультимножини G^{K_i} упорядковані згідно з нерівностями (3.31). Врахувавши, що співвідношення (3.30), (3.152) еквівалентні нерівностям (3.155), остаточно одержуємо справедливість теореми.

Теорема 3.51 [62, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E_{\eta n}^k(G)\subset X$, то 1) $\forall x\in X$

$$\min_{y\in E_{\eta n}^k(G)} \psi(x) \geq \psi(x) + \rho\sum_{j=1}^{k}(g_{\delta_j}^2 + x_j^2) - \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}x_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_j}} - 2\rho x_{\beta_j}\right)g_j + \sum_{j=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_j}} - 2\rho x_{\beta_j}\right)g_{\eta-k+j}, \quad (3.156)$$

2) щоб точка $x\in E_{\eta n}^k(G)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $E_{\eta n}^k(G)$, достатньо виконання умови

$$\rho\sum_{j=1}^{k}(g_{\delta_j}^2 + x_j^2) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} - 2\rho x_{\beta_j}\right)g_j +$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{k}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_j}} - 2\rho x_{\beta_j}\right)g_{\eta-k+j} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}x_j, \quad (3.157)$$

де переставлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ і стала $s\in J_k^0$ означаються нерівностями

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_1}} - 2\rho x_{\beta_1} \geq \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_2}} - 2\rho x_{\beta_2} \geq \ldots \geq \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_s}} - 2\rho x_{\beta_s} \geq$$

$$\geq 0 > \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_{s+1}}} - 2\rho x_{\beta_{s+1}} \geq \ldots \geq \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_k}} - 2\rho x_{\beta_k}, \quad (3.158)$$

переставлення $(\delta_1, \ldots, \delta_\eta)\in E_\eta(J_\eta)$ - умовою (3.131), а елементи мультимножини G упорядковані згідно з нерівностями (2.46).

Доведення. Скориставшись лемою 3.48, покладемо $E=E_{\eta n}^k(G)$. При цьому врахуємо, що згідно із зауваженням 3.2 при сталих c_i $\forall i\in J_k$, які обчислюються за формулами(3.152), $\min\limits_{y\in E^k_{\eta n}(G)} \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i\right) y_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i}} - 2\rho x_{\beta_i}\right) g_i + \sum\limits_{i=s+1}^{k} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{\beta_i}} - 2\rho x_{\beta_i}\right) g_{\eta-k+i}$, де перестановлення $(\beta_1, \ldots, \beta_k)\in E_k(J_k)$ і стала $s\in J^o_k$ задовольняють умовам (3.14), (3.152), які, очевидно, еквівалентні нерівностям (3.158), а елементи мультимножини G, як і раніше, упорядковані згідно з нерівностями (2.46). Таким чином, одержуємо справедливість теореми.

Зазначимо, що коли видається доцільним і якщо можна знайти

$$g^* = \arg\min_{x\in E} \|x-c\|^2, \quad c\in R^k, \tag{3.159}$$

то оцінки (3.137) та (3.146) можна посилити.

Лема 3.52. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то

$$\min_{x\in E} \psi(x) \geqslant \psi(x) + \rho \|g^*-w\|^2, \tag{3.160}$$

де точка w задовольняє умові (3.136), а g^* - співвідношенню (3.159), в якому $c\equiv w$.

Доведення. Як і при доведенні леми 3.44 одержимо нерівність $\min\limits_{x\in E} \psi(x) \geqslant \psi(x) + \rho \min\limits_{x\in E} \|x-w\|^2$, де точка w означається умовою (3.136). Підставивши в цю нерівність вираз для g^* зі співвідношення (3.159) при $c\equiv w$, одержуємо справедливість формули (3.160), що і треба було довести.

Покажемо, як можна розв'язати задачу знаходження (3.159) у випадку $E=E(G,H)$, звівши її до розв'язування задачі вибору [111]. Останнє, як відомо [112], може бути здійснено поліноміальним алгоритмом з трудомісткістю $O(k^3)$. Для цього подамо функцію $\|x-c\|^2$, $x\in E(G,H)$ у вигляді $\|x-c\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{s} \sum\limits_{j\in N'_i} f_j(x_j)$, де $f_j(x_j)=(x_j-$

18-1091

$-c_j)^2$, множина N'_i означається співвідношенням (3.32). Нехай $d_{jt}=f_j(g_\tau^{K_i})$ $\forall j,t\in N'_i$, $\tau=t-(k_1+\ldots+k_{i-1})$ $\forall i\in J_s$, де елементи $g_\tau^{K_i}$, $\tau\in J_{k_i}$, мультимножини G^{K_i} задовольняють умові (3.31), $k_1+\ldots+k_s=$ $=k$. Розглянемо число d_{ij} $i,j\in J_k$, як елемент квадратної матриці, що розташований в j-му стовпці, i-му рядку. Покладемо $d_{jt}=L>0$ $\forall j\in N'_i$ $\forall t\in N'_m$ при $m\neq i$, $i,m\in J_s$. (Теоретично L - це нескінченність, а при практичній реалізації L можна, як звичайно, вважати достатньо великим числом). Задача вибору, як відомо, полягає в мінімізації функціоналу $F(i_1, \ldots, i_k)=\sum_{j=1}^{k} d_{ji_j}$ на множині $E_k(J_k)$ переставлень $(i_1, \ldots, i_k)$ перших k натуральних чисел. Очевидно, що розв'язавши її указаним вище алгоритмом, ми разом з тим зможемо знайти точку

$$g^* = \arg\min_{x\in E(G,H)} \|x - c\|^2. \tag{3.161}$$

Це дозволяє одержати наступну оцінку.

Теорема 3.53. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E(G,H)\subset X$, то

$$\min_{x\in E(G,H)} \psi(x) \geqslant \psi(w) + \|g^* - w\|^2, \tag{3.162}$$

де точка w задовольняє умові (3.136), а g^* - співвідношенню (3.161).

Доведення. Скористаємося лемою 3.52, в якій $E=E(G,H)$, а точка g^* означається умовою (3.161). Тоді нерівність (3.162) одразу витікає з умови (3.160). Що і треба було довести.

В [62, 89] (дивись також [107]) обгрунтовано, що задачу знаходження

$$g^* = \arg\min_{x\in E^k_{\eta n}(G)} \|x-c\|^2, \quad c\in R^k \tag{3.163}$$

можна розв'язати звівши її до задачі вибору, і показано, як це можна зробити.

Теорема 3.54 [62, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E^k_{\Pi n}(G,H)\subset X$, то

$$\min_{x\in E^k_{\Pi n}(G)} \psi(x) \geq \psi(w) + \|g^* - w\|^2, \qquad (3.164)$$

де точка w задовольняє умові (3.136), а g^* - співвідношенню (3.163).

Доведення. Скористаємося лемою 3.52, в якій $E=E^k_{\Pi n}(G)$, а точка g^* означається умовою (3.163). Тоді нерівність (3.164) одразу випливає з умови (3.160). Що і треба було довести.

Лема 3.55. Якщо функціяψ(x) - сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E\subset X$, то

1) $\forall x\in X$

$$\min_{y\in E} \psi(y) \geq \psi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho\|g^*-c\|, \qquad (3.165)$$

2) щоб точка $x\in E$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині E достатньо виконання умови

$$\|\nabla\psi(x)\|^2 = 2\rho\|g^*-c\|, \qquad (3.166)$$

де точка g^* означається умовою (3.159) при

$$c = x - \frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x). \qquad (3.167)$$

Доведення. Скористаємося справедливою для функції $\psi(x)$, що задовольняє умови леми, нерівністю (3.148). Перетворимо цю нерівність так: $\psi(y)\geq\psi(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i+\rho\left[\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}y_i+\|y-x\|^2\right] = \psi(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}x_i + \rho\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}y_i+y_i^2-2x_iy_i+x_i^2\right)=\psi(x)+\rho\|y-x+\frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x)\|^2-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2$. Звідси $\min_{y\in E}\psi(y)\geq\psi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\psi(x)\|^2+\rho\min_{y\in E}\|y-x+\frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x)\|^2$. Позначивши $g^*=\arg\min_{x\in E}\|x-c\|^2$, $c=x-\frac{1}{2\rho}\nabla\psi(x)$, з останнього співвідношення одержуємо нерівність (3.165), яку і треба було довести в першій частині леми.

Справедливість другої частини леми випливає з об'єднання нерівності $\min_{y\in E}\psi(y)\leq\psi(x)$ $\forall x\in E$ та протилежної нерівності, яка одержується при виконанні рівності (3.166) зі справедливої при цьому умови (3.165). Таким чином, обидві частини леми доведено.

Зазначимо, що аналог леми 3.55 для $E \in (E_{nk}(G), E_n^k(G), \bar{E}_n^k(G), E_n(G))$ розглянуто в [107] (леми 4 та 5).

Теорема 3.56. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E(G,H) \subset X$, то 1) $\forall x \in X$

$$\min_{y \in E(G,H)} \psi(y) \geqslant \psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho\|g^* - c\|^2, \quad (3.168)$$

2) щоб точка $x \in E(G,H)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $E(G,H)$ достатньо виконання умови (3.166), де точка g^* означається рівністю (3.161), точка c - співвідношенням (3.167).

Доведення. Скористаємося лемою 3.55 при $E=E(G,H)$. З нерівності (3.165) одержуємо нерівність (3.168). Умова (3.159) для означення точки g^* перетворюється на співвідношення (3.161), що і завершує доведення теореми.

Теорема 3.54 [62, 89]. Якщо функція $\psi(x)$ - сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$, $E_{\eta n}^k(G) \subset X$, то 1) $\forall x \in X$

$$\min_{y \in E_{\eta n}^k(G)} \psi(y) \geqslant \psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho\|g^* - c\|^2, \quad (3.169)$$

2) щоб точка $x \in E_{\eta n}^k(G)$ була мінімаллю функції $\psi(x)$ на множині $E_{\eta n}^k(G)$ достатньо виконання умови (3.166), де точка g^* означається рівністю (3.164), а точка c - співвідношенням (3.167).

Доведення. Обгрунтування теореми провадиться аналогічно доведенню теореми 3.56 при $E=E_{\eta n}^k(G)$ з використанням леми 3.55.

Зауваження 3.12. Результати, які викладені в теоремах та лемах 3.29-3.57, дають універсальний підхід до оцінки глобальних екстремумів на евклідових комбінаторних множинах відомих опуклих та сильно опуклих функцій. Ці результати дають можливість доводити глобальність і оцінювати похибку одержуваного розв'язку в різних алгоритмах локальної оптимізації [2, 37, 104, 112, 113] на множині E та її конкретних реалізаціях, а також можуть бути використані при практичній реалізації різних комбінаторних методів оптимізації [33].

Зауваження 3.13 [62]. Розглянуті властивості опуклих та сильно опуклих функцій можуть бути використані в релаксаційних підходах розв'язування задач цілочислового програмування, оскільки ці задачі можна розглядати як задачі на загальній множині розміщень. Позначимо Z - множину цілих чисел, Z_k - решітку цілочислових точок у просторі R^k, $f_j(x)$ - функції, що діють з Z_k в R^1 $\forall j \in J_m^o$, $m \in Z$, $m \geq 0$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$. Розглянемо задачу цілочислового програмування: знайти

$$\min_{x \in R^k} f_o(x) \qquad (3.170)$$

при обмеженнях

$$x \in Z_k, \ a \leq x_i \leq b, \ a,b \in Z \ \ \forall i \in J_k; \qquad (3.171)$$

$$f_j(x) \leq d_j, \ d_j \in R^1, \ \forall j \in J_m. \qquad (3.172)$$

Розглянемо загальну множину поліроозміщень $E^k_{\eta n}(G) \subset R^k$. Нехай мультимножина $G=\{g_1, \ldots, g_\eta\}$ з основою $S(G)=\{e_1, \ldots, e_n\}$ і первинною специфікацією $[G]=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, $\eta_1+\ldots+\eta_n=\eta$, має властивість $e_1=a$, $e_{i+1}=e_i+1$, $e_n=b$ $\forall i \in J_{n-1}$, $\eta_j \geq k$ $\forall j \in J_n$, $n=b-a+1$. Розглянемо e-задачу: знайти

$$\min_{x \in R^k} f_o(x) \qquad (3.173)$$

при обмеженнях

$$x \in E^k_{\eta n}(G) \qquad (3.174)$$

і додаткових обмеженнях

$$f_j(x) \leq d_j, \ d_j \in R^1, \ \forall j \in J_m. \qquad (3.175)$$

Легко бачити [62], що в силу того, що обмеження (3.171) задачі цілочислового програмування (3.170)-(3.172) еквівалентні при описаному вище виборі мультимножини G обмеженням (3.174) e-задачі оптимізації (3.173)-(3.175), то і самі ці задачі еквівалентні, бо цільові функції (3.170), (3.173) та обмеження (3.172), (3.175) збігаються.

3.4. Задачі з угнутими цільовими функціями і з довільними нелінійними цільовими функціями

Нехай $\psi(x)$ - деяка угнута функція $\psi: R^k \to R^1$, а M - деякий опуклий многогранник, $M \subset R^k$, $\mathrm{vert}M$ - множина його вершин. Нехай далі $f(x)$ - функція $f: \mathrm{vert}M \to R^1$ та $f(x)=\psi(x)$ $\forall x \in \mathrm{vert}M$. Як відомо [114], для будь-якої функції $f: \mathrm{vert}M \to R^1$ існує опукла функція $\varphi: \mathrm{vert}M \to R^1$ така, що $\varphi(x)=f(x)$ $\forall x \in \mathrm{vert}M$. Отже,

$$\forall f: \mathrm{vert}M \to R^1 \ \exists \psi: \mathrm{vert}M \to R^1;\ \psi(x)=f(x) \ \forall x \in \mathrm{vert}M. \qquad (3.176)$$

Розглянемо задачу знаходження

$$\min_{x \in M} \psi(x), \qquad (3.177)$$

де M - опуклий невироджений многогранник, для якого відомі критерії вершини, ребра, суміжності вершин, а також розв'язок задач оптимізації на ньому лінійних функцій.

<u>Зауваження 3.14.</u> Як M в задачі (3.177) можна розглядати досліджені вище загальний переставний многогранник, загальний многогранник розміщень, поліпереставний многогранник, многогранник сполучень з повтореннями, їх окремі випадки та інші.

Зазначимо, що якщо існує (3.177), то

$$\arg\min_{x \in M} \psi(x) \in \mathrm{vert}M. \qquad (3.178)$$

Розглянемо задачу визначення $\min\limits_{x \in \mathrm{vert}M} f(x)$. Очевидно, що з урахуванням співвідношень (3.176), (3.178) ця задача еквівалентна задачі (3.177). Розглянемо метод її розв'язку.

На першому етапі цього методу, скориставшись критерієм вершини, виберемо довільну вершину $x \in \mathrm{vert}M$. Обчислимо $f(x)$. Застосувавши критерій суміжності вершин многогранника M, перейдемо до сусідньої вершини з меншим значенням функції $f(x)$. Продовжимо цей процес переходу до суміжної вершини до моменту одержання вершини $x^o \in \mathrm{vert}M$ такої, що $f(x) \geq f(x^o) = f^o$ для всіх вершин x, суміжних з x^o.

Для спрощення викладу перенесемо початок системи координат в точку x^o. Другий етап методу складається з кількох кроків, на кожному з яких треба дослідити розв'язок однієї чи кількох задач лінійного программування на M. Позначимо ці задачі z_{ij}, де i - номер кроку, j - номер задачі на кроці i з множини $J = \{1, 2, \ldots, |J|\}$ всіх номерів задач на цьому кроці. Зазначимо, що геометрично розв'язування задачі z_{ij} означає знаходження точки $x^{ij} \in \mathrm{vert}M$, найбільш віддаленої з боку протилежного початку координат x^o, від деякої гіперплощини

$$c(x) \equiv c_0^{ij} + \sum_{n=1}^{k} c_n^{ij} x_n = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_k), \quad c_n^{ij} \in R^1 \ \forall n \in J_k^o, \qquad (3.179)$$

тобто для точки x^{ij} має виконуватися співвідношення

$$\mathrm{sign}\, c(x^o)\ \mathrm{sign}\, c(x^{ij}) < 0. \qquad (3.180)$$

Таким чином, якщо без втрати спільності міркувань покласти $c(x^o) < 0$, для знаходження x^{ij}, або визначення, що $x^{ij} \in \emptyset$, необхідно визначити

$$\arg \max_{x \in M} c(x) \qquad (3.181)$$

і перевірити виконання умови $c(x^{ij}) > 0$, еквівалентної умові (3.180). Задача (3.181), як зазначено раніше, для M розв'язується просто, наприклад обчисленням деякого виразу.

На першому кроці цього методу розглядається тільки одна задача z_{11}, для якої гіперплощина вигляду (3.179) є гіперплощиною, що проходить через k точок:

$$y^{m11} = \lambda^m x^m \quad \forall m \in J_k, \qquad (3.182)$$

де x^m - довільна фіксована точка, яка належить ребру многогранника M під номером m, $m\in J_k$, яке виходить з вершини x^o. Ребро многогранника легко вибрати за допомогою критерію ребра і таких ребер, що виходять з вершини x^o рівно k, бо многогранник M невироджений. Величина λ^m, якщо вона обмежена, визначається як розв'язок задачі $\lambda^m = \max\limits_{\lambda\in R^1} \lambda$ при умові

$$\psi(\lambda x^m) \geqslant f^o. \tag{3.183}$$

У випадку необмеженості величини λ, яка задовольняє нерівності (3.183), параметр λ^m обирається довільно великим.

Теорема 3.58. Якщо задача Z_{11} не має розв'язку, то точка x^o дає розв'язок задачі (3.177).

Доведення. З одного боку, $f^o=f(x^o)$ - мінімум функції $\psi(x)$ на симплексі з вершинами: x^o; y^{m11} $\forall m\in J_k$; вершина $x^o\in \mathrm{vert}M$, а з іншого - немає ні однієї вершини $x\in \mathrm{vert}M$, яка б лежала зовні цього симплексу (бо задача Z_{11} не має розв'язку). Таким чином, x^o - точка мінімуму задачі (3.177), що і треба було довести.

Якщо задача Z_{11} має розв'язок (x^{11}), то переходимо на другий крок, поклавши $f^1=\min(f^o, f(x^{11}))$. Опишемо q-й крок $(q>1)$. Розглянемо розв'язки $x^{(q-1)j}$ задач, якщо вони є, попереднього кроку, $j\in J$. Для кожної точки $x^{(q-1)j}$ сформуємо множину задач $Z_j=(z_{qt})_{t=1}^{t=k}$ вигляду (3.181) так. Для задачі $z_{qt}\in Z_j$ гіперплощина (3.180) проводиться через k точок y^{mqj}, $m\neq t$, $m\in J_k$ з множини $(y^{mqj},\ m\in J_k^o)$, яка визначається так: $y^{mqj}=\lambda^{mqj}y^{m(q-1)j}$ $\forall m\in J_k^o$, де $y^{o(q-1)j}=x^{(q-1)j}$, а величина λ^{mqj} (якщо вона обмежена) - розв'язок задачі: $\lambda^{mqj}=\max\limits_{\lambda\in R^1}\lambda$ при умові

$$\psi(\lambda y^{m(q-1)j}) \geqslant f^{q-1}. \tag{3.184}$$

У випадку необмеженості величини λ, що задовольняє умові (3.184), параметр λ^{mqj} вибирають довільно великим.

Таким чином, на кроці q сформовано і просто розв'язується задача з множини $z=\bigcup_{j\in J} z_j$ вигляду (3.181) (при умові (3.180)).

Теорема 3.59. *Якщо жодна із задач множини z не має розв'язку, то* f^{q-1} *є розв'язком задачі* (3.177).

Доведення. *Те, що жодна із задач множини z не має розв'язку*, означає, що многогранник M повністю міститься в |z| симплексах з (k+1)-ю вершиною: x^o, y^{mqj} $\forall m\in J_k^o\setminus(t)$ $(\forall t\in J_m$ $\forall j\in J)$. Величина f^{q-1} за побудовою- це, з одного боку, значення функції $f(x)$, $x\in vertM$, а з другого, - це величина, яка не більша мінімуму функції $\psi(x)$ на кожному із названих вище симплексів. Таким чином, f^{q-1} - мінімум задачі (3.177), що і треба було довести.

Якщо принаймні одна із задач множини z має розв'язок, то обчислюють

$$f^q = \min\{f^{q-1}, \min_{\substack{t(j)\in J_k \\ j\in J}} (x^{qt(j)})\},$$

де $x^{qt(j)}$ позначено розв'язок задачі $z_{qt}\in z_j$. Після цього переходять на наступний крок другого етапу методу. Неважко бачити, що справедливе наступне твердження.

Теорема 3.60. Розв'язок задачі (3.177) викладеним методом знаходиться за скінченну кількість кроків.

Доведення. Дійсно, щоб продовжити на наступний крок формування нових задач з множини z, треба знайти принаймні одну точку $x^{ij}\in vertM$, яка ще не була б у розгляді. Величина |vertM| - обмежена, і на кожному кроці розглядається не менше однієї точки $x^{ij}\in vertM$, тому це і доводить скінченність процесу розв'язування задачі (3.177). Що і треба було довести.

Зауваження 3.15. *Якщо для многогранника M невідомий той чи інший зазначений критерій - вершини, ребра, суміжності вершин, або розв'язок задачі оптимізації лінійної функції на ньому, то розглянутий метод може бути застосований і в цьому випадку, якщо* скористатися при потребі загальними методами лінійного програмування у випадку, коли многогранник M задано системою лінійних обмежень. Зазначимо, що у розглянутому методі такого задання для многогранника не потрібно. Многогранники з потрібними властивостями відомі також по працях [65, 115] та інших.

Зауваження 3.16. Розглянутий метод дозволяє розв'язувати e-задачі оптимізації на множині $E\subset R^k$ з довільною цільовою функцією $f:E\to R^1$, якщо множина E має властивість $\mathrm{vert\,conv}E=E$, тобто E – множина вершин многогранника $M=\mathrm{conv}E$. У противному разі, коли $\mathrm{vert\,conv}E\subset E$, для застосування розглянутого методу цільова функція $f:E\to R^1$ повинна мати властивість $f(x)=\psi(x)\ \forall x\in E$, де $\psi(x)$ – угнута на деякій множині X функція, $E\subset X\subset R^k$.

При викладі матеріалу цього параграфу використані результати праць [62, 116]. Звернемо увагу також на пов'язані з цим [117, 118].

4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

4.1. Задача розкрою напівнескінченної смуги на прямокутники однакової ширини, задача теорії розкладів, яка зводиться до неї, та задача розміщення устаткування

Задача 4.1. Нехай є досить довгий рулон матеріалу шириною H. Цей рулон розрізується на q рулонів заданої ширини h. Необхідно з одержаних рулонів вирізати заданий набір p прямокутних викрійок шириною h і довжиною $a_1, \ldots, a_p$. Припускається, що одержані рулони шириною h можуть мати зони по всій ширині, з яких викрійки робити не можна. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати довжину використаної частини рулона шириною H.

Сформульована задача - одна із задач гільотинного розкрою [119]. Якщо ширина H вихідного рулона не кратна h, то очевидно, частина матеріалу йде у відходи.

<u>Задача 4.2.</u> Є цех шириною H, набір обладнання шириною h і довжиною $a_1, \ldots, a_p$. Необхідно розташувати це устаткування в q рядів шириною h, що розміщуються уздовж цеху (припускаємо, що $qh \leq H$). Припускається, що для деякого устаткування може бути наперед відомо місце його розташування і що можуть бути зони, де обладнання за якимись причинами розташовувати не можна. Необхідно визначити мінімально можливу довжину цеху.

Зазначимо, що в розміри обладнання включається і необхідна площа для його використання та обслуговування.

<u>Задача 4.3.</u> Нехай є будь-яка система обслуговування (парк верстатів, каси продажу білетів тощо), яка містить q рівнопродуктивних обслуговуючих приборів. На обслуговування надходить замовлення, що складається з p різних елементів з номерами $1, \ldots, p$. Кожний елемент з номером i замовлення виконується яким-небудь одним приладом j обслуговуючої системи за час a_i $\forall i \in J_p$ $\forall j \in J_q$. Замовлення вважається виконаним, якщо кожний елемент i $i \in J_p$ замовлення без перерв виконаний одним з приладів j, $j \in J_q$ системи обслуговування. Припускається, що прилади системи обслуговування можуть в наперед визначені проміжки часу бути в неробочому стані. Необхідно мінімізувати час виконання замовлення.

Задача 4.3 - узагальнення відомої задачі про розподіл завдань по процесорах [120] та задачі Форда-Фалкерсона про організацію паралельних робіт при нульовому часі переходу до роботи (дивись, наприклад, [121]).

Задачі 4.1 - 4.3, не зважаючи на їх відмінність, можуть бути сформульовані як наступна задача розміщення геометричних об"єктів.

19[x]

Задача 4.4. Нехай є набір p прямокутників шириною H і довжиною $a_1, \ldots, a_p$ і досить довга смуга шириною H, довжиною L, розділена на q смужок шириною h кожна. Припускається, що i-та смужка шириною h може мати m_i зон заборони ($\forall i \in J_q$). Задані відстані від початку смуги шириною H до початку і кінця j-ї зони заборони в i-й смужці шириною h: c_{ij} та d_{ij} відповідно, $0 \le c_{ij} \le d_{ij}$ $\forall j \in J_{m_i}$ $\forall i \in J_k$.

Необхідно упакувати даний набір прямокутників так, щоб мінімізувати довжину зайнятої частини смуги шириною H. При цьому припускається, що зони заборони розташовані так, що до розв'язування задачі можна вважати: $d_{im_i} < \lambda$, де λ – мінімум довжини зайнятої частини смуги шириною H.

Очевидно, що задачу 4.4 досить легко узагальнити на багатовимірний випадок.

Побудуємо математичну модель задачі 4.4 у вигляді е-задачі на загальній множині переставлень.

Не порушуючи спільності подальших міркувань, можна вважати, що $a_1 \le \ldots \le a_p$. Будемо вважати $c_{i1} = 0$, $c_{i(m_i+1)} = L$, а якщо не задана довжина L, то величину L задамо досить великою (розглядається напівнескінченна смуга), $\forall i \in J_q$.

Нехай K_{ij} – максимальна кількість прямокутників, які можуть бути упаковані після зони заборони j в смужці i, $\forall j \in J_m$, $\forall i \in J_q$, до наступної зони заборони в цій смужці (якщо вона є). Значення K_{ij} визначається із систем

$$\begin{cases} K_{ij} \leqslant p; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij}} a_t \leqslant c_{i(j+1)} - d_{ij}; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij}+1} a_t > c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j \in J_{m_i} \quad \forall i \in J_q . \end{cases} \tag{4.1}$$

Можливо також попереднє завдання значень K_{ij}, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$ (не має сенсу задавати значення K_{ij} більше, ніж визначаються з системи (4.1)). Зокрема, при цьому можлива ситуація, коли $\sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{j=1}^{m_i} K_{ij} = p$. Позначимо $k = \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{j=1}^{m_i} K_{ij}$. Якщо $p \neq k$, то припустимо, що крім p заданих *прямокутників упаковується* ще $k-p$ *прямокутників* нульової довжини. Тоді можна вважати, що після заборони j у смужці i упаковується рівно K_{ij} прямокутників $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$, з яких $k-p$ мають довжину 0, а решта – $a_1, \ldots, a_p$. Позначимо довжину цих k прямокутників g_j $\forall j \in J_k$ так, щоб виконувалися співвідношення (2.2). Нехай $P_{kn}(G)$, як і раніше, – множина переставлень з повтореннями з *дійсних чисел, які складають мультимножину* $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Якщо позначити $\varkappa_{\gamma_{ij}+t} \in G$ – довжину прямокутника, що стоїть в смужці i після зони заборони j на місці $t+1$, $t \in J^0_{K_{ij}-1}$, тоді математична модель задачі 4.4 має наступний вигляд: знайти

$$\min_{\varkappa \in P_{kn}(G)} \max_{i \in J_q} \left(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} \varkappa_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \right); \tag{4.2}$$

$$\varkappa^* = \arg \min_{\varkappa \in P_{kn}(G)} \max_{i \in J_q} \left(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} \varkappa_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \right); \tag{4.3}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} \varkappa_{\gamma_{ij}+t} \leqslant c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j \in J_{m_i-1}, \ \forall i \in J_q, \tag{4.4}$$

де γ_{ij} обчислюються за формулами(3.55) та (3.56). Після описаного занурення множини $P_{kn}(G)$ в простір R^k задачу (4.2)-(4.4) можна записати також у вигляді наступної е-задачі оптимізації. Знайти

$$\min_{x\in E_{kn}(G)} \max_{i\in J_q} \Big(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} x_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \Big); \tag{4.5}$$

$$x^* = \arg \min_{x\in E_{kn}(G)} \max_{i\in J_q} \Big(\sum_{t=0}^{K_{im_i}-1} x_{\gamma_{im_i}+t} + d_{im_i} \Big); \tag{4.6}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} x_{\gamma_{ij}+t} \le c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j\in J_{m_i-1},\ \forall i\in J_q, \tag{4.7}$$

де γ_{ij} обчислюються за формулами(3.55) та (3.56).

Зведемо задачу (4.5)-(4.7) до вигляду (3.37)-(3.40), що дозволить застосувати метод розв'язування цієї задачі, який описано у третьому розділі.

Покладемо $m=k+1$, $x_i=y_i$ $\forall i\in J_k$ і обмежемо кожну суму у співвідношеннях (4.5),(4.6) змінною y_m. Тоді задача (4.5)-(4.7) набуде вигляду(3.5І)-(3.54).

При реалізації на ЕОМ першого етапу розв'язування задач вигляду (3.37)-(3.40) виникає необхідність оптимізації ресурсів, що використовуються, - часу, пам'яті тощо. При цьому важливо використання будь-яких можливостей зменшення кількості вершин многогранника обмежень, змінних, обмежень тощо. В цьому аспекті становлять інтерес наступні властивості задачі (3.5І)-(3.54).

Теорема 4.І. Значення y_m^*, що обчислюється за формулою(3.5І) при умовах (3.52)-(3.54), не зміниться при будь-якому переставленні індексів у змінних $y_{\gamma_{ij}+t}$ $\forall t\in J^0_{K_{ij}-1}$, $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$, де числа γ_{ij} обчислюються за формулами (3.55), (3.56).

Доведення. У співвідношеннях (3.53), (3.54) змінні $y_{\gamma_{ij}+t}$ $\forall t\in J^{o}_{K_{ij}-1}$, $j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$, де числа γ_{ij} обчислюються за формулами (3.55), (3.56), входять до суми з однаковими (одиничними) коефіцієнтами, що і дає справедливість теореми.

Теорема 4.2. Якщо існують такі числа $i_1, i_2\in J_q$, $j_1\in J_{m_{i_2}-1}$, що $c_{i_1(j_1+1)}=c_{i_2(j_2+1)}=c$ та $d_{i_1j_1}=d_{i_2j_2}=d$, то значення y^*, що обчислюється за формулою (3.51) при умовах (3.52)-(3.54), не зміниться при заміні $\sum\limits_{t=0}^{K_{i_1j_1}-1} y_{\gamma_{i_1j_1}+t}$ на $\sum\limits_{t=0}^{K_{i_2j_2}-1} y_{\gamma_{i_2j_2}+t}$ і навпаки, де число γ_{ij} обчислюється за формулами (3.55), (3.56).

Доведення. Нагадаємо, що задача розв'язується в припущенні, що $d_{im_i}<\lambda$, де λ – мінімум довжини зайнятої частини смуги шириною н. З цього і випливає, що значення цільової функції при заміні $\sum\limits_{t=0}^{K_{i_1j_1}-1} y_{\gamma_{i_1j_1}+t}=c-d$ на $\sum\limits_{t=0}^{K_{i_2j_2}-1} y_{\gamma_{i_2j_2}+t}=c-d$ не зміниться. Що і треба було довести.

Зазначимо, що при виконанні умови теореми 4.2 з системи (4.1) випливає, що $K_{i_1j_1}=K_{i_2j_2}$.

Ці властивості задачі (3.51)-(3.54) дозволяють шукати y^*_m не на всій допустимій області, а на її частині, що задовольняє, наприклад, наступним обмеженням:

$$\sum_{t=0}^{K_{i_1j_1}-1} y_{\gamma_{i_1j_1}+t} \geqslant \sum_{t=0}^{K_{i_2j_2}-1} y_{\gamma_{i_2j_2}+t}; \qquad (4.8)$$

$$y_t \geqslant y_{t+1},\ \forall t\in J_k\setminus\{\sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{j} K_{\alpha\beta}\ \forall j\in J_{m_i}\ \forall i\in J_q\}. \qquad (4.9)$$

При цьому треба враховувати таке. Точка $\tilde{y}$ – розв'язок задачі (3.51) при умовах (2.5), (3.53), (3.54), (4.8), (4.9) – може не належати вершині допустимої області, що задається умовами (2.5), (3.53), (3.54). Щоб цього не трапилося, змінимо функцію цілі, зобразивши її у вигляді

$$\tilde{y} = \arg\min_{y \in R^m} f_m(y), \tag{4.10}$$

тут

$$f_m(y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^o y_i, \tag{4.11}$$

де сталі коефіцієнти α_i^o задовольняють умові

$$0 < \alpha_1^o < \ldots < \alpha_m^o. \tag{4.12}$$

Неважко бачити, що при досить великому α_m^o в розв'язку задачі (3.51) при обмеженнях (2.5), (3.53), (3.54) та задачі (4.10) при умовах (2.5), (3.53), (3.54), (4.8), (4.9), (4.11), (4.12) значення змінної $\tilde{y}_m$ збігається.

При розв'язуванні задач лінійного программування вигляду (3.37) при обмеженнях (2.5), (3.39), (3.40) важливо дослідити можливість зменшення параметра k (якщо $k=p$), який суттєво визначає кількість обмежень в системі (2.5).

Розглянемо одну таку можливість зменшення k для задачі 4.4 при відсутності зон заборони. Нехай відомо $\lambda^* \geq \lambda$, де λ - мінімум довжини зайнятої частини смуги шириною H. Тоді величину K_{i1} можна визначити з таких співвідношень:

$$\sum_{t=1}^{K_{i1}} a_t \geq \lambda^*; \quad \sum_{t=1}^{K_{i1}-1} a_t < \lambda^* \quad \forall i \in J_q. \tag{4.13}$$

Зрозуміло, що величина $k = \sum_{i=1}^{q} K_{i1}$ буде тим менша, чим менша різниця $\lambda^* - \lambda$, тобто менше λ^*. Очевидно, що можна покласти $\lambda^* = \max(a_p, a_{p-1}, \ldots, a_{p-k+2}, \sum_{t=1}^{p-q+1} a_t)$. Інші, в тому числі менші, ніж раніше одержане, значення λ^* можна знайти, використавши будь-який спосіб чи правило упакування, наприклад спосіб послідовнопоодинокого розміщення [123] або правило упакування, що основане на BL-алгоритмі [124], оптимальний алгоритм порядку 2,5 [125] та інші.

Величини k_{i1} $\forall i \in J_q$ можна обчислити і так. Вибрати λ^* довільно, скориставшись (4.13), обчислити k_{i1} $\forall i \in J_q$. Розв'язати задачу. Нехай $\tilde{\lambda}$ – довжина зайнятої частини, одержана при цьому. Якщо $\tilde{\lambda} > \lambda^*$, то як λ^* вибрати одержане $\tilde{\lambda}$, застосувати співвідношення (4.13) для обчислення k_{i1} $\forall i \in J_q$ і так далі. Якщо немає зон заборони, в яких $c_{i1}=0$ і невідома величина λ^*, то природньо вважати $k_{i1}=p-q+1$ $\forall i \in J_q$.

Далі наводиться результат розв'язування одного з числових прикладів. Задано $H=120$, $h=30$, $p=30$, $\{a_i\}_{i=1}^p=\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 15, 16, 19, 21, 27, 29, 32, 35, 38, 39, 40, 55, 61, 66, 73, 74, 76, 77, 81, 82, 91, 94, 95, 97\}$, $k_{11}=k_{21}=7$, $k_{31}=k_{41}=8$. Використовувалися і перший, і другий способи переставного округлення. В обох випадках одержано один і той же розв'язок (дивись рис. 5) з $\tilde{x}^*_{k+1}=342$. Враховуючи, що відомо $\lambda=341$, маємо відносну похибку близько 0,3%.

Інші результати розрахунків, проведені одним з авторів, можна подивитися в [61, 122], а також в [4].

4.2. Задача розміщення прямокутників однакової довжини в напівнескінченній смузі та задачі, які до неї зводяться

Задача 4.5. Нехай є досить довгий рулон матеріалу шириною H і набір p прямокутників довжиною h і шириною $a_1, \ldots, a_p$. Від рулона відрізаються смужки шириною H і довжиною h. Необхідно з одержаних смужок вирізати заданий набір прямокутників. Припускається, що одержані смужки можуть мати зони заборони по всій довжині, з яких вирізати прямокутники не можна. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати використану довжину смуги матеріалу шириною H.

Задача 4.5 - одна із задач гільотинного розкрою [119]. Вона також може розглядатися як узагальнення відомої задачі упаковування по скринях (дивись, наприклад, [120]).

Задача 4.6. Є цех ширини H, набір p одиниць устаткування довжиною h і шириною $a_1, \ldots, a_p$. У розміри обладнання включається площа, необхідна для його використання і обслуговування. Необхідно розташувати це устаткування рядами довжиною h і шириною H, які розміщуються впоперек цеху. Припускається, що для деякого обладнання може бути відоме місце його розташування і можуть бути зони, де устаткування згідно з деякими причинами розташовувати не можна. Необхідно визначити мінімально можливу кількість рядів обладнання.

Задача 4.7. Нехай формується система обслуговування, що містить рівнопродуктивні обслуговуючи прибори. На обслуговування надходить замовлення, що складається з p елементів з номерами $1, \ldots, p$. Елемент замовлення з номером i $i \in J_p$ виконується якимсь одним приладом обслуговуючої системи за час a_i. Замовлення вважається виконаним, якщо кожний його елемент без перерв оброблено на одному з приладів системи обслуговування. Припускається, що прилади системи можуть в наперед визначені проміжки часу бути в неробочому стані. Необхідно виконати замовлення за час, що не перевищує H. Задача полягає в мінімізації кількості приладів в системі обслуговування.

Задача 4.7 може розглядатися як узагальнення однієї відомої задачі про складання роскладу для багатопроцесорних систем [120].

Задачі 4.5-4.7 можуть бути сформульовані як наступна задача розміщення геометричних об'єктів.

Задача 4.8. Нехай є набір p прямокутників довжиною h і шириною $a_1, \ldots, a_p$ та досить довга смуга шириною H, розділена на стовпчики довжиною h і шириною H. Припускається, що i-й стовпчик з перших ξ може мати m_i зон, в яких упакування неможливе, - зон заборони $\forall i \in J_\xi$. Задані відстані від нижнього краю смуги до початку і кінця j-ї зони заборони в i-м стовпчику: c_{ij} та d_{ij} відповідно, $0 \leq c_{ij} \leq d_{ij}$ $\forall j \in J_{m_i}$, $\forall i \in J_\xi$. Необхідно упакувати заданий набір прямокутників так, щоб мінімізувати довжину зайнятої частини смуги. При цьому припускається, що зони заборони розташовані так, що до початку розв'язування задачі можна вважати, що $\xi h < \lambda$, де λ - мінімум довжини зайнятої частини смуги.

Очевидно, що задачу 4.8 досить легко узагальнити на багатовимірний випадок.

Побудуємо математичну модель задачі 4.8 у вигляді е-задачі на множині переставлень з повтореннями. Не порушуючи спільності подальших міркувань, можна вважати, що $a_1 \leq \ldots \leq a_p$. Припустимо, що $c_{i1}=0$, $c_{i(m_i+1)}=H$ для будь - яких значень i, $m_i=1$; $c_{i1}=d_{i1}=0$ для $i>\xi$.

Визначимо кількість стовпчиків q $(q \geq \xi)$, явно достатнє для упакування заданого набору прямокутників, з наступної системи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{Q_{ij}} a_{p-t+1} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij}, \\ \sum\limits_{t=1}^{Q_{ij}+1} a_{p-t+1} > c_{i(j+1)} - d_{ij}, \\ \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \geq p, \\ \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij} < p, \\ \forall j \in J_{m_i} \quad \forall i \in J_q. \end{cases} \tag{4.14}$$

Тут Q_{ij} – кількість прямокутників ширини a_{p-t+1}, яка може бути упакована після зони заборони j (до наступної зони заборони, якщо вона є) в стовпці i ($\forall t\in J_{Q_{ij}}$, $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$). Зрозуміло, що $Q_{ij}<p$ для будь-яких можливих i та j.

Нехай K_{ij} максимальна кількість прямокутників, яка може бути упакована після зони заборони j (до наступної зони заборони, якщо вона є) у стовпці i $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$. Значення величини K_{ij} визначаються з системи (4.I). Зрозуміло, що $K_{ij}\geqslant Q_{ij}$ $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$. Можливе також попереднє завдання значень q та K_{ij} ($j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$). Зрозуміло, що немає сенсу задавати значення K_{ij} та q, ($j\in J_{m_i}$, $i\in J_q$) більші, ніж визначаються із співвідношень (4.I), (4.I4) відповідно. Позначимо $k=\sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{m_i} K_{ij}$. Якщо $k\neq p$, то припустимо, що крім p заданих прямокутників упаковується $k-p$ прямокутників нульової ширини. Тоді можна вважати, що після зони заборони j в стовпці i упаковується рівно K_{ij} прямокутників $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$. Позначимо довжину цих k прямокутників g_i $\forall i\in J_k$ так, щоб виконувалося співвідношення (2.2). Як і раніше, $P_{kn}(G)$ будемо позначати загальну множину переставлень з дійсних $g_1, \ldots, g_k$, що утворюють мультимножину G. Позначимо довільний елемент множини $P_{kn}(G)$ через $\varkappa=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$. Тоді математична модель задачі 4.8 має такий вигляд: визначити

$$\min_{\varkappa\in P_{kn}(G)} \tilde{k}\,h; \tag{4.I5}$$

$$\varkappa^* = \arg\min_{\varkappa\in P_{kn}(G)} \tilde{k}\,h; \tag{4.I6}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} \varkappa_{\gamma_{ij}+t} \leqslant c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j\in J_{m_i}, \quad \forall i\in J_q, \tag{4.I7}$$

де $\tilde{k}$ ($\xi+1\leqslant\tilde{k}\leqslant q$) – кількість стовпчиків, в яких упаковані задані в задачі 4.8 прямокутники, а величини γ_{ij} обчислюються за формулами (3.55), (3.56) $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$.

Запишемо е-задачу на множині $E_{kn}(G)\subset R^k$, що відповідає задачі (4.15)-(4.17). Визначити

$$\min_{x\in E_{kn}(G)} \tilde{k}\, h; \tag{4.18}$$

$$x^* = \arg \min_{x\in E_{kn}(G)} \tilde{k}\, h; \tag{4.19}$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{t=0}^{K_{ij}-1} x_{\gamma_{ij}+t} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j\in J_{m_i}, \quad \forall i\in J_q, \tag{4.20}$$

де величини γ_{ij} обчислюються за формулами (3.55), (3.56) $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$.

Задача (4.18)-(4.20) хоч і не є задачою вигляду (3.37)-(3.40), бо цільова функція $\tilde{k}h$ - не лінійна функція в R^k, однак до її розв'язування можна застосувати підхід, що аналогічний розглянутому раніше для задачі (3.37)-(3.40). На першому етапі розглянемо задачу, яка одержується із задачі (4.18)-(4.20) заміною вимоги $x\in E_{kn}(G)$ на $x\in\Pi_{kn}(G)$; знайти

$$\min_{x\in\Pi_{kn}(G)} \tilde{k}\, h; \tag{4.21}$$

$$x^* = \arg \min_{x\in\Pi_{kn}(G)} \tilde{k}\, h; \tag{4.22}$$

де многогранник $\Pi_{kn}(G)$ визначається системою обмежень (2.5), при додаткових обмеженнях (4.20).

Для розв'язування задачі (4.21)-(4.22) при обмеженнях (2.5), (4.20) досить не більше $q-\xi$ разів (для різних значень $\tilde{k}$) перевірити сумісність обмежень (2.5), (4.20) і вибрати мінімальне із значень $\tilde{k}$ і відповідну точку $\tilde{x}$, для яких ця система сумісна. Проте без цього можна обійтися, якщо прийняти до уваги наступне твердження, справедливість якого легко перевірити.

Теорема 4.3. Якщо $m=k$, $x=y$, x - множина розв'язків задачі (4.22) при обмеженнях (2.5), (4.20), Y - множина розв'язків задачі (4.10) при тих же обмеженнях, то $X \supset Y \neq \emptyset$.

В силу теореми 4.3 для одержання розв"язку задачі (4.21)-(4.22) при обмеженнях (2.5), (4.20) можна скористатися розв'язком задачі (4.10) при тих же обмеженнях - задачі лінійного програмування вигляду (3.37) при обмеженнях (3.39), (3.41). Метод їх розв"язування описано в третьому розділі. Там же обгрунтовані способи формування по точці $\tilde{x}$ точки $\tilde{x}^{o} \in E_{kn}(G)$, які складають другий етап розв'язування задачі (4.18)-(4.20). Розглянемо третій етап наближеного розв'язування цієї задачі - формування по точці $\tilde{x}^{o}$ точки $\tilde{x}^{*} \in E_{kn}(G)$, яка задовольняє обмеження (4.20).

Нехай величини i та j такі, що відповідні їм нерівності з (4.20) в точці $\tilde{x}^{o}$ не виконуються, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. Визначимо $\tilde{x}^{o}_{\gamma_{ij}+t^{*}} = \min\limits_{t \in J^{0}_{K_{ij}-1}} \{\tilde{x}^{o}_{\gamma_{ij}+t} \mid \sum\limits_{\substack{\tau=0 \\ \tau \neq t}}^{K_{ij}-1} \tilde{x}^{o}_{\gamma_{ij}+\tau} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij}\}$. Далі визначимо $t^{**} = \min\limits_{t' \in J_k} \{t' \mid \sum\limits_{t=t'}^{k} \tilde{x}^{o}_{t} = 0\}$. Покладемо $\tilde{x}^{*}_{t} = \tilde{x}^{o}_{t}$ $\forall t \in J_k \setminus \{\gamma_{ij}+t^{*}, t^{**}\}$, $\tilde{x}^{*}_{\gamma_{ij}+t^{*}} = \tilde{x}^{o}_{t^{**}}$; $\tilde{x}^{*}_{t^{**}} = \tilde{x}^{o}_{\gamma_{ij}+t^{*}}$. Потім позначимо $\tilde{x}^{o}_{t} = \tilde{x}^{*}_{t}$ $\forall t \in J_k$. Перебравши можливі значення $j \in J_{m_i}$ та $i \in J_q$, одержимо точку $\tilde{x}^{*}$, по якій знаходимо, взагалі кажучи наближене, значення $\tilde{k}^{*}$ параметру $\tilde{k}$ з розв'язку задачі (4.18)-(4.20): $\tilde{k}^{*} = \min\limits_{i \in J_q} \{i \mid \gamma_{i1} \geq \tau, \sum\limits_{t=\tau}^{k} \tilde{x}^{*}_{t} = 0\}$.

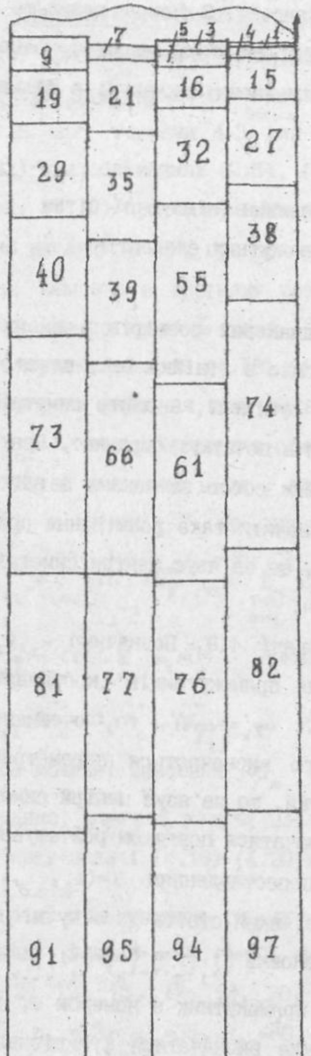
Далі наводиться результат розв'язування одного числового прикладу. Задано $H=60$, $h=20$, $p=15$, $\{a_i\}_{i=1}^{p} = \{9, 9, 9, 9, 9, 9, 11, 12, 12, 12, 15, 17, 18, 20, 32\}$, $c_{22}=d_{22}=30$, $c_{32}=10$, $d_{32}=22$, $c_{41}=0$, $d_{41}=52$, $c_{52}=35$, $d_{52}=60$. Виходячи з чисельних данних одержуємо $q=7$. Застосовуючи на другому етапі $\tilde{x}^{*}$, яка доставляє мінімальне значення цільової функції, що дорівнює 6. Це значення збігається з глобальним мінімумом (дивись рис.6). З іншими результатами числових експериментів, що проведені одним з авторів, можна ознайомитися по працях [61, 122], пізніше вони викладені в більш доступній праці [4].

4.3. Задача мінімізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутних елементів

Задача 4.9. Є k прямокутників однакових розмірів $a \times b$, які розташовані на площині уздовж осі абсцис в лінійку так, що сторони довжини a сусідніх прямокутників суміщені, а центр симетрії самого лівого прямокутника знаходиться в початку координат. Центри симетрії прямокутників сполучені між собою зв'язками з вагою c_{ij}, $i \neq j$, $i,j \in J_k$, $c_{ij} \geq 0$. Потрібно визначити таке розміщення прямокутників, щоб зважена довжина сітки, що зв'язує центри симетрії прямокутників, мала найменше значення.

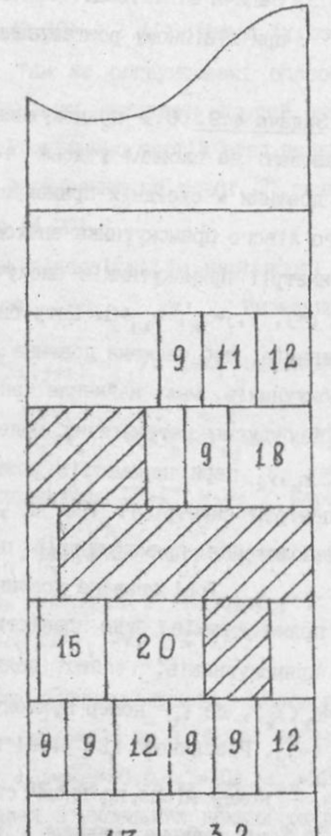
Побудуємо математичну модель задачі 4.9. Позначимо x_1, y_1; ...; x_k, y_k пари параметрів розміщення прямокутників (координати їх центрів симетрії). Так як $y_1 = \ldots = y_k = const$, то, очевидно, місцеположення прямокутників повністю визначається параметрами $x_1, \ldots, x_k$. Тоді зважена довжина сітки, що зв'язує центри симетрії прямокутників, буде повністю визначатися порядком розташування прямокутників, тобто деяким переставленням $i = (i_1, \ldots, i_k) \in P_k(J_k)$, де i_t – номер прямокутника, який стоїть на t-му місці, i_t, $t \in J_k$. Розглянемо дві рівні підстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$, де j_t – номер місця, на якому стоїть прямокутник з номером t, j_t, $t \in J_k$. Тоді зважена довжина сітки буде визначатися функціоналом від переставлення $j = (j_1, \ldots, j_k) \in P_k(J_k)$, а саме:

$$F(j) = \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{q=t+1}^{k} c_{tq} \, |x_{j_t} - x_{j_q}|. \qquad (4.23)$$



9
19
29
40
73
81
91
7
21
35
39
66
77
95
5
3
16
32
55
61
76
94
4
1
15
27
38
74
82
97
0

Рис. 5



9
11
12
9
18
15
20
9
9
12
9
9
12
17
32
0

Рис. 6

Параметри розміщення можуть приймати лише значення, що дорівнюють 0, b $2b$, ..., $(k-1)b$. Це дозволяє з урахуванням співвідношення $x_{j_t}=b(j_k-1)$ записати формулу (4.23) так:

$$F(j) = b \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{q=t+1}^{k} c_{tq} \, |j_t - j_q| . \tag{4.24}$$

Співвідношення (4.24) дає можливість записати модель задачі 4.9 у вигляді наступної задачі комбінаторної оптимізації.

Знайти

$$F(j^*) = \min_{j \in P_k(J_k)} F(j); \tag{4.25}$$

$$j^* = \arg\min_{j \in P_k(J_k)} F(j), \tag{4.26}$$

де $F(j)$ визначається формулою (4.24).

Нехай, як і раніше, $E_k(J_k)=f(P_k(J_k))\subset R^k$, $z=(z_1, \ldots, z_k)\in E_k(J_k)$, тоді можна записати е-задачу, еквівалентну задачі (4.25), (4.26).

Знайти

$$\Psi^* = \min_{z \in E_k(J_k)} b \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=j+1}^{k} c_{jq} \, |z_j - z_q| , \tag{4.27}$$

$$j^* = \arg\min_{z \in E_k(J_k)} b \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{q=j+1}^{k} c_{jq} \, |z_j - z_q| . \tag{4.28}$$

Ця задача збігається з задачою (3.74), (3.75), дослідженою і розв'язаною в третьому розділі. Зазначимо, що описаний там алгоритм розв"язування задачі (3.74), (3.75) дозволяє використовувати розпаралелювання обчислень і на першому етапі, і на другому (при побудові ребер різних типів), і на третьому (при доповненні підсистем). Тобто розв"язання задачі (3.74), (3.75) за допомогою описаного алгоритму може здійснюватися на паралельних обчислювальних системах.

Деякі задачі вигляду (4.27), (4.28) дозволяють провести їх декомпозицію на аналогічні задачі з меншою кількістю прямокутників, тобто меншого розміру. Очевидно, що якщо матриця зв'язків

c_{ij} може бути подана у вигляді, зображеному на рис. 5, то задачу можна розкласти на дві задачі меншого розміру з матрицями, що складені: перша матриця - з елементів, що стоять на перетині рядків і стовпців з номерами від 1 до $i-1$; друга матриця - відповідно рядків і стовпців з номерами від i до n.

Виникає питання: як перевірити, чи можна вихідну матрицю подати в описаному вище вигляді. Відповіддю на це запитання є наступний алгоритм.

Вибираємо найменший додатний елемент α_{ij} вихідної матриці, $i,j\in J_k$. Виберемо ненульові елементи α_{qt} матриці, один з індексів яких є i або j, об'єднаємо їх в множину C_0. Якщо $|C_0|<k-2$, то вибраний елемент α_{ij} не підходить, вибираємо замість нього найменший додатний елемент без урахування розглянутого елемента, формуємо множину C_0.

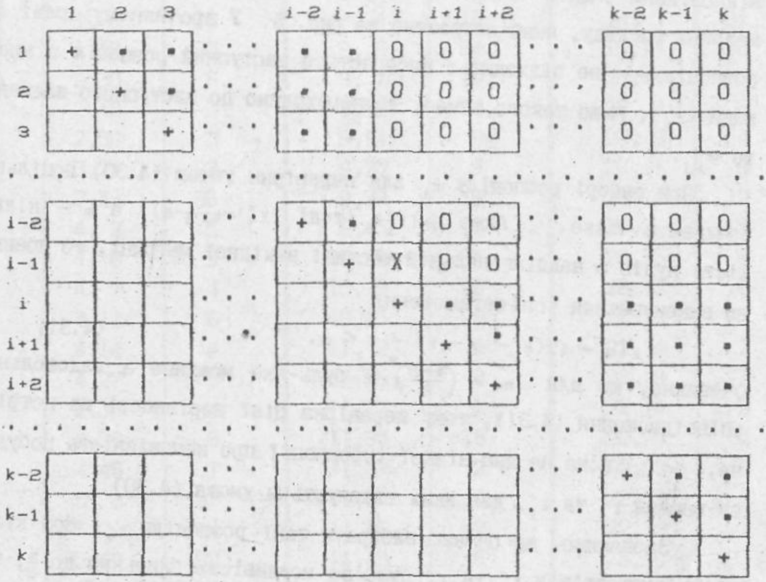
Після одержання множини C_0 формуємо множину $C_1\subset J_k$, яка складається з індексів $q\notin\{i,j\}$ таких, що якщо $\alpha_{qi}\in C_0$, то $\alpha_{jq}\in C_0$, або якщо $\alpha_{iq}\in C_0$, то $\alpha_{qj}\in C_0$. Далі утворюємо множину I_i, яка містить індекси q елементів $\alpha_{qi}\in C_0$, які не ввійшли в C_1. Позначимо $I_j=J_k\setminus(\{i,j\}\cup C_1\cup I_i)$. Перевіряємо виконання умови

$$\alpha_{pq}=0 \quad \forall p\in I_i,\ q\in I_j \ . \tag{4.29}$$

Якщо ця умова не виконується, то вибраний раніше елемент α_{ij} не може бути елементом матриці, позначеним на рис. 7 знаком X, тобто з його допомогою декомпозиція неможлива. Вибираємо наступний елемент α_{ij}, якщо таких немає, то задача не може бути піддана описуваній декомпозиції.

Якщо умова (4.29) виконана, то вибирається довільно розподіл r_t з множини $\{r_t\}$ можливих розподілів множини C_1 на дві частини C_1' та C_1'', одна з яких може бути пустою, $C_1'\cup C_1''=C_1$. Позначимо $I_i'=I_i\cup C_1'$; $I_j'=I_j\cup C_1''$. Перевіряємо виконання умови

СТРУКТУРА МАТРИЦІ, ЩО ДОПУСКАЄ ДЕКОМПОЗИЦІЮ ЗАДАЧІ



▣ - довільний елемент матриці;

0 - нульовий елемент матриці;

X - найменший додатний елемент матриці;

\+ - діагональний елемент матриці;

□ - поідіагональний елемент матриці;

i - номер рядка (стовпця) матриці, i=1, 2, ..., k.

Рис. 7

$$\alpha_{pq} = 0 \ \forall p \in I'_i,\ q \in I'_j. \qquad (4.30)$$

Якщо умова (4.30) виконана, то множини I'_i та I'_j дають номера відповідних рядків (від 1 до $i-2$ та від $i+1$ до k відповідно) в матриці вигляду, який зображено на рис. 5. У противному разі розподіл r_t не підходить, вибирається наступний розподіл з множини $\{r_t\}$, якщо такого немає, то переходимо до наступного елемента α_{ij}.

При виборі розподілу r_t для перевірки умови (4.30) доцільно врахувати таке. Якщо $q=|I'_i|$ (тоді $|I'_j|=k-q-2$), а m – кількість нулів в наддіагональній частині вихідної матриці, то повинно виконуватися співвідношення

$$(q + 1)(k - q - 1) - 1 \leq m. \qquad (4.31)$$

Очевидно, що для $m \geq \left(\frac{k-2}{2}\right)^2-2$ будь-яке можливе q задовольняє співвідношення (4.31), тому перевірка цієї нерівності не потрібна, бо вона не дає ніякої інформації про неможливість побудови множин I'_j та I'_i, для яких виконується умова (4.30).

Зазначимо, що бажано вибирати такі розподіли r_t, щоб кількість елементів в I'_i та I'_j була за можливістю близьким до $\frac{k}{2}$, так бо в цьому випадку (якщо знайдеться декомпозиція) розміри обох задач після декомпозиції будуть менше $\frac{k}{2}$. Якщо ж потужністі множин I'_i та I'_j сильно різняться, то вимірність однієї із задач буде незначно відрізнятися від k, а виграш від декомпозиції буде малим. Очевидно, що це зауваження є вірним в припущенні, що декомпозиція конкретної задачі не єдина.

Наведемо результати одного числового експерименту. Дано $k=50$, $b=1$. Ненульові елементи матриці зв'язків обмежені числами 1 та 99. Вони наведені в таблиці . Одержано розв'язок $\psi^*=14136$, $j^*=(22,\ 14,\ 20,\ 4,\ 2,\ 27,\ 7,\ 9,\ 6,\ 50,\ 11,\ 48,\ 45,\ 37,\ 39,\ 42,\ 46,\ 30,\ 35,\ 32,\ 25,\ 23,\ 34,\ 17,\ 10,\ 15,\ 1,\ 36,\ 18,\ 8,\ 49,\ 40,\ 26,$

Таблиця

Номера елементів	Вага зв'язку	Номера елементів	Вага зв'язку	Номера елементів	Вага зв'язку
1,18	97	8,49	96	19, 3	92
1,36	96	9, 4	16	19, 5	91
1,49	90	9, 6	94	19,13	90
2,30	6	9, 7	19	20, 4	3
2,48	3	9,11	24	20, 7	8
2,50	5	9,14	9	20, 9	4
3,29	93	9,35	9	20,11	6
3,43	96	9,39	6	20,14	12
4, 2	5	9,45	12	20,27	9
4, 6	3	10, 1	94	20,35	6
4, 7	4	10, 8	95	20,45	6
4,11	6	10,15	98	21,33	15
4,14	4	11, 2	6	22, 4	2
4,27	3	11, 6	3	22, 9	3
4,35	4	11, 7	2	22,14	3
4,39	6	11,30	18	22,20	4
4,45	1	11,37	2	22,27	2
5, 3	97	11,42	1	22,35	1
5,29	94	11,46	2	22,39	1
5,43	92	11,48	6	23,10	93
6, 2	10	12,41	1	23,17	92
6,30	1	13, 3	90	23,34	98
6,37	10	13, 5	91	24,31	2
6,42	10	13,29	99	25,17	93
6,46	8	14, 7	4	25,23	99
6,48	8	14,11	6	25,34	98
6,50	64	15, 1	92	26,13	93
7, 2	2	15,18	94	26,19	91
7, 6	2	15,36	99	27, 2	1
7,30	4	16,44	5	27, 6	25
7,37	8	17, 1	98	27, 7	5
7,42	4	17,10	93	27,11	5
7,46	2	17,34	99	27,14	1
7,48	8	18, 8	91	27,30	1
7,50	8	18,40	97	27,37	1
8,40	90	18,49	95	27,42	5

Закінчення таблиці I

Номера елементів	Вага зв'язку	Номера елементів	Вага зв'язку	Номера елементів	Вага зв'язку
28,I2	99	35,46	I5	43,28	96
28,38	90	36, 8	98	43,47	94
29,28	98	36,I8	90	44,2I	I0
29,43	97	37,42	3	45, 2	4
29,47	95	37,46	2	45, 6	29
30,37	6	37,48	6	45, 7	2
30,42	I	37,50	I2	45,II	I5
30,46	6	38,I2	9I	45,I4	I2
30,48	6	39, 2	6	45,27	I
30,50	2	39, 7	3	45,30	2
3I,4I	I	39,II	I2	45,37	67
32,23	97	39,I4	3	45,39	I6
32,25	92	39,27	I6	45,42	45
33,24	25	39,30	8	45,46	43
34,I0	9I	39,37	9	45,48	96
34,I5	99	39,42	57	46,48	3
35, 6	6	40,I9	96	46,50	4
35,II	5	40,26	95	47,28	92
35,27	2	40,49	9I	47,38	93
35,30	7	4I,I6	3	48,50	5
35,39	I	42,46	2	49,I9	94
35,42	7	42,48	3	49,26	90
35,45	4	42,50	6	50,32	I

19, 13, 5, 3, 29, 43, 47, 28, 38, 12, 42, 16, 44, 21, 33, 24, 31). Цей приклад розв'язано за допомогою декомпозиції вихідної задачі на три задачі меншого розміру. Інші результати числових експериментів, одержаних одним з авторів, дивись в [122], пізніше вони викладені в більш доступному виданні [4].

4.4. Задача кольорового упаковування прямокутників однакової ширини в напівнескінченній смузі

Врахування різного роду умов, що висуває практика, при розв'язку задач теорії розкладу та упакування приводять до необхідності розглядати задачі розташування так званих різнокольорових геометричних об'єктів [126, 127]. Розглянемо наступну задачу розташування різнокольорових прямокутників.

Задача 4.10. Нехай є набір p прямокутників шириною h, довжинами $a_1, \ldots, a_p$ s різних кольорів ($s \leq k$) і досить довга смуга шириною H_o, яка розділена на q смужок шириною h кожна. Припускається, що смужка i шириною h може мати m_i зон заборони, тобто зон, в яких упаковування неможливе, $i \in J_q$. Задані відстані від початку смуги шириною H_o до початку і кінця зони заборони j в смужці i шириною h: c_{ij} та d_{ij} відповідно, $0 \leq c_{ij} \leq d_{ij}$, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. Заданий розподіл набору прямокутників з довжинами $a_1, \ldots, a_p$ на набори, в яких прямокутники тільки одного кольору, позначимо їх довжини $a_1^{\lambda}, \ldots, a_{p_\lambda}^{\lambda}$, $\lambda \in J_s$, $p_1 + \ldots + p_s = p$.

Необхідно упакувати заданий набір прямокутників так, щоб мінімізувати довжину зайнятої частини смуги шириною H_o, задовольнивши при цьому обмеження одного з двох наступних типів. У смужці i після зони заборони j до наступної (якщо вона є) розташовано прямокутників кольору λ 1) не більше $Q_{ij\lambda}$; 2) рівно $Q_{ij\lambda}$, $j \in J_{m_i}$,

$i \in J_q$, $\lambda \in J_s$, $(Q_{ij\lambda} \leq k)$. Будемо припускати, не порушуючи спільності подальших міркувань, що $c_{i1}=0$, $c_{i(m_i+1)}=L$, якщо задана довжина L смуги шириною H_o; у противному разі замість L можна брати $\sum_{i=1}^{p} a_i + \max_{i \in J_q} \sum_{j=1}^{q} (d_{ij}-c_{ij})$. Також припустимо, що виконується умова

$$a_1^{\lambda} \leq \ldots \leq a_{p_\lambda}^{\lambda}. \tag{4.32}$$

Припускається, що зони заборони розташовані так, що до розв'язування задачі можна вважати, що $d_{im_i} < \lambda^* \; \forall i \in J_q$, де λ^* – мінімальна довжина зайнятої частини смуги шириною H_o.

Побудуємо математичну модель поставленої задачі. Нехай $K_{ij\lambda}$ – максимальна кількість прямокутників кольору λ, $\lambda \in J_s$, яка може бути упакована після зони заборони j (до наступної, якщо вона ще є) у смужці i; $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. Значення величин $K_{ij\lambda}$ визначаються з системи

$$\begin{cases} K_{ij\lambda} \leq Q_{ij\lambda}; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}} a_t^{\lambda} \leq c_{i(j+1)} - d_{ij}; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_{ij\lambda}+1} a_t^{\lambda} > c_{i(j+1)} - d_{ij}; \quad j \in J_{m_i}, \; i \in J_q, \; \lambda \in J_s, \end{cases} \tag{4.33}$$

або задаються рівними $Q_{ij\lambda}$ залежно від умов задачі. Позначимо $\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda} = k_\lambda$, $\lambda \in J_s$, та $k_1 + \ldots + k_\lambda = k$. Якщо $k_\lambda \neq p_\lambda$, $\lambda \in J_s$, то припустимо, що крім p_λ заданих прямокутників кольору λ упаковується ще $k_\lambda - p_\lambda$ прямокутників нульової довжини. Тоді можна вважати, що після зони заборони j (до наступної, якщо вона ще є) в смужці i упаковується рівно $K_{ij\lambda}$ прямокутників кольору λ, $\lambda \in J_s$, $j \in J_{m_i}$, $i \in J_q$. З урахуванням цього позначимо довжину упаковуваних прямокутників через g_i, $i \in J_k$. Позначимо G мультимножину, що складається з елементів g_i, $i \in J_k$.

$G=\{g_1, \ldots, g_k\}=\{g_1^{K_1}, \ldots, g_{k_1}^{K_1}, \ldots, g_1^{K_s}, \ldots, g_{k_s}^{K_s}\}$, (4.34)

де через $g_i^{K_\lambda}$, $i\in J_{k_\lambda}$, позначена так, що виконуються нерівності (3.64), довжина прямокутника кольору λ, який упаковується. Нехай $E(G,H)$, як і раніше, – загальна поліпереставна множина, сформована з дійсних чисел, які складають мультимножину чисел G, за допомогою множини переставлень H. Побудуємо множину $E(G,H)$ для задачі, що розглядається.

Розглянемо упорядковане розбиття множини J_k на s множин K_1, ..., K_s, $K_i \cap K_j=\emptyset$, $K_i \neq \emptyset$ $\forall i,j\in J_s$, $k_\lambda=|K_\lambda|$, $\lambda\in J_s$. Нехай $K_\lambda=\{\gamma_{ij\lambda}, \gamma_{ij\lambda}+1, \ldots, \gamma_{ij\lambda}+K_{ij\lambda}-1 \mid \forall j\in J_{m_i}, \forall i\in J_q\}$ $\forall\lambda\in J_s$, де величини $\gamma_{ij\lambda}$ обчислюються за формулами (3.60)-(3.62), а сталі $K_{ij\lambda}$ визначаються з системи (4.33). Позначимо $H\subset E_k(J_k)$ – множину переставлень $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_k)$, а $\pi_{\gamma_{ij\lambda}+t}$ – елемент переставлення – номер з множини J_k прямокутника кольору λ, $\lambda\in J_s$, що стоїть серед прямокутників цього кольору на місці $t+1$, $t\in K^o_{ij\lambda}-1$, в смужці i, $i\in J_q$, після зони заборони j, $j\in J_{m_i}$, перед наступною (якщо вона є). Числа $\pi_{\gamma_{ij\lambda}+t}$ $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$, $\lambda=\mathrm{const}$, $\lambda\in J_s$ – це елементи деякого переставлення $\pi^\lambda\in E_{k_\lambda}(K_\lambda)$. Якщо, не обмежуючи спільності подальших міркувань, в мультимножині $G=\{g_1, \ldots, g_k\}$ на місцях з номерами з множини K_λ розташувати прямокутники кольору λ, тоді математична модель задачі 4.10 може бути представлена у вигляді знаходження елемента $\pi^*\in H$, щоб на ньому досягався

$$\min_{\pi\in H}\max_{i\in J_q}\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} g_{\pi_{\gamma_{im_i\lambda}+1}} + d_{im_i}\right), \qquad (4.35)$$

при додаткових обмеженнях

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} g_{\pi_{\gamma_{im_i\lambda}+1}} \le c_{i(j+1)} - d_{ij} \quad \forall j\in J_{m_i-1}, \forall i\in J_q, \qquad (4.36)$$

де $\gamma_{ij\lambda}$ - величина, на одиницю більша максимальної сумарної кількості прямокутників кольору λ, $\lambda\in J_s$, які можна поставити в смужку i, $i\in J_q$, до зони заборони j та в смужки з номерами менші i. Вони обчислюються за формулами (3.60)-(3.62). Зануримо множину H в k-вимірний арифметичний простір R^k, тобто здійснимо відображення f множини H на множину $E(G,H)\subset R^k$ за наступним правилом. Нехай $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_k)\in H$, $x=(x_1, \ldots, x_k)\in E(G,H)$ $f: H\to E(G,H)$: $x_i=g_{\pi_i}$ $\forall i\in J_k$, $\forall\pi\in H$. Як ми бачимо, $E(G,H)$ - загальна поліпереставна множина, за допомогою якої модель задачі 4.10 може бути записана у вигляді: знайти точку $x=(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})\in R^{k+1}$, на якій досягається

$$x^*_{k+1} = \arg\min_{x\in R^{k+1}} x_{k+1} \tag{4.37}$$

при обмеженнях (3.42) та при додаткових обмеженнях

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} x_{\gamma_{im_i\lambda}+1} + d_{im_i} \leq x_{k+1} \quad \forall i\in J_q, \tag{4.38}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{t=0}^{K_{im_i\lambda}-1} x_{\gamma_{im_i\lambda}+1} + d_{im_i} \leq c_{i(j+1)} \quad \forall j\in J_{m_i}, \ \forall i\in J_q, \tag{4.39}$$

де величини $\gamma_{ij\lambda}$ $\forall\lambda\in J_s$, $\forall j\in J_{m_i}$, $\forall i\in J_q$ обчислюються за формулами (3.60)-(3.62). Задача (4.37) при обмеженнях (3.42), (4.38), (4.39) збігається з задачею (3.57) при обмеженнях (3.42), (3.58), (3.59), і метод її наближеного розв'язування розглянуто в третьому розділі. Там же обгрунтована апріорна оцінка відносної точності її розв'язку. Висновки відносно числових експериментів наведені в [128].

ЗАКІНЧЕННЯ

На завершення роботи автори вважають за доцільне зробити ряд зауважень.

Зважаючи на існуючі обмеження на об'єм цієї праці автори не мали змоги (і тому не ставили такої задачі) навести вичерпну бібліографію. Це стосується як вітчизняних, так і зарубіжних авторів. Тому деякі грунтовні праці відсутні в списку літератури.

Із зрозумілих причин не були заторкнуті як складнісний аспект так і інші аспекти, які автори не вважали пов'язаними з основним матеріалом праці. Залишається рекомендувати читачам праці, що раніше вказані та [129-137] і бібліографію до них, а також інші праці з комбінаторної оптимізації.

Зазначимо, що як у вступі, так і в роботі в цілому автори не ставили за мету дати повний виклад методів та задач комбінаторної оптимізації. Це стосується зокрема і задач оптимізації на евклідових комбінаторних множинах. Виклад грунтувався виключно на працях авторів (як на зазначених вище, так і на [138-141] та інших), результати інших авторів з відповідними посиланнями на першоджерела згадувалися лише в міру необхідності.

Автори усвідомлюють, що відносно невеликий об"сяг книги обумовив сильну насиченість викладу, можливо з деякими збитками для швидкого розуміння, читабельності. Є усвідомлення і того, що ніяка книга подібного роду не може бути цілком вільною від похибок та друкарських помилок. Не зважаючи на великі зусилля багатьох людей, які брали участь в її оформленні та підготовці до друку, яким автори висловлюють свою глибоку вдячність. БеспеCречно, в тексті залишились похибки. Ми будемо вдячні, якщо читачі доведуть їх до відома авторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование.- М.: Наука, 1969.- 368 с.

2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.- К.: Наук.думка, 1981.- 288 с.

3. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей.- К.: Наук. думка, 1980.-208 с.

4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.- К.: Наук.думка, 1986. - 268 с.

5. Супруненко Д.А., Айзенштейн В.С., Лепешинский Н.А. Экстремальные значения функций на множестве подстановок // В кн.: Тезисы докл. I Всес. конфер. по исслед. операций. - Минск, 1972. - С. 61-67.

6. Сарванов В.И. К оптимизации на подстановках // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1979. - №4. - С. 9-11.

7. Демиденко В.М. Об экстремальных задачах на подстановках : Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук (01.01.09). - Минск, 1980.- 14 с.

8. Андреев Г.В., Шафранский Я.М. Минимизация приоритетопорождающих функций на множестве перестановок при древовидном частичном порядке // В кн.: Алгоритмы и программы решения задач оптимизации. - Минск: АН БССР. Ин-т технич. кибернетики, 1980.- С. 6-16.

9. Гордон В.С., Шафранский Я.М. К вопросу минимизации функций на множестве перестановок частично упорядоченных элементов // Изв. Ан БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1979. - №2. - С. 122-124.

10. Гордон В.С., Сотсков Ю.Н. Пакет программ решения задач оптимального упорядочения // В кн.: Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. Седьмой всесоюзный симпозиум (Нарва-Йыэссу, 16-24 апреля 1982 г.): Краткие тезисы докладов. - М., 1982. - С.69-70.

11. Гордон В.С., Янова О.В. Минимизация приоритето-порождающих функций на множестве перестановок при последовательно-параллельном частичном порядке // В кн.: Алгоритмы и программы решения задач оптимизации. - Минск.: АН БССР, Ин-т технической кибернетики, 1980. - С. 29-35.

12. Левин Г.М. К оптимизации функций, рекуррентно заданных на слабонормированных множествах перестановок // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1980. - №5. - С. 9-114.

13. Левин Г.М., Танаев В.С. К теории оптимизации на множествах перестановок // Докл. АН БССР. - 1970. - Т.14, №7. - С. 588-590.

14. Танаев В.С. О числе перестановок n частично упорядоченных элементов // Докл. АН БССР. - 1967. - Т.11, №3. - С. 208.

15. Шафранский Я.М. Об одном свойстве приоритето-порождающих функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1981. - №6. - С. 15-18.

16. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. - М.: Наука, 1975. - 256 с.

17. Шкурба В.В. Задача трех станков. - М.: Наука, 1976. - 96 с.

18. Михалевич В.С., Шкурба В.В. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ // Кибернетика. - 1966. - №2. - С. 34-40.

19. Бурдюк В.Я., Шкурба В.В. Теория расписаний. Задачи и ме-

тоды решений // Кибернентика. - 1971. - №1. - С. 89-102.

20. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. - М.: Наука, 1986. - 264 с.

21. Айзенштат В.С., Максимович Е.П. Некоторые классы задач о бродячем торговце // Кибернетика. - 1978. - №4. - С. 80-83.

22. Бурков В.Н., Ловецкий С.Е. Методы решения экстремальных задач комбинаторного типа (обзор) // Автоматика и телемеханика. - 1968. - Т.29, №11. - С. 68-93.

23. Бурков В.Н., Ловецкий С.Е. Методы решения экстремальных комбинаторных задач (обзор) // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1968. - №4. - С. 82-93.

24. Бурдюк В.Я., Рева В.Н. Об одном методе оптимизации функционалов от перестановок при наличии ограничений // Кибернетика.- 1980. - №1. - С. 99-103.

25. Ковалев М.М., Кочкаров А.М. Дискретное гиперболическое программирование // В кн.: Математические модели и методы оптимального планирования. - Минск: НИИЭМП, 1980. - С. 63-73.

26. Пономаренко Л.Д., Макмак П.М. Новые подходы к минимизации на перестановках при упаковке геометрических объектов // Вычислительная техника в машиностроении. - 1980. - №4. - С. 8-14.

27. Рубинштейн М.И. Обобщенная комбинаторная задача оптимального размещения. (Методы решения и области приложений): Автореф. дисс.... канд. техн. наук (05.13.01). - М., 1973. - 25 с.

28. Сигал И.Х. Метод последовательного анализа вариантов для решения задач о коммивояжере // В кн.: Системы распределения ресурсов на графах. - М.: ВЦ АН СССР, 1970. - С. 63-68.

29. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Метод сужающихся окрестностей для минимизации функционалов, заданных на перестановках // Автоматика и вычислительная техника. - 1979. - №3. - С. 44-48.

30. Лихтенштейн В.Е. Модели и методы дискретного программирования.- М.: Наука, 1971 - 240 с.

31. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач.- М.: Наука, 1977. - 352 с.

32. Журавлев Ю.И., Финкельштейн Ю.Ю. Сфера применения методов дискретного программирования // В кн.: Применение исслед. операций в экономике. - М., 1977. - С. 29-69.

33. Современное состояние теории исследования операций. - М.: Наука, 1979. - 464 с.

34. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. - М.: Наука, 1976. - 264 с.

35. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений / В.С.Михалевич, Н.З.Шор, Л.А.Галустова и др. - К.: Наук. думка, 1977. - 178 с.

36. Емеличев В.А. Дискретная оптимизация. Последовательные схемы решения I,II // Кибернетика.-1971. - №6. - С. 109-121; - 1972. - №2. - С. 92-103.

37. Журавлев Ю.И. Локальные алгоритмы вычисления информации I,II // Кибернетика.- 1965. - №1. - С. 12-19. - 1966. - №2. - С. 1-11.

38. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. - 400 с.

39. Черенин В.П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов // В кн.: Материалы конференций по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. - Новосибирск: СО АН СССР, 1962. - С. 41-54.

40. Хачатуров В.Р. Апроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // Журнал вычислит. математ. и математич. физики. - 1974. - Т.14, №6. - С. 1964-1987.

41. Little J.D.C., Murly K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operat. Res. – 1963.– V.11, №6. – P.972–989.

42. Bellman R. Dynamic programming treatment of traveling salesman problem // J. Assoc. Comput. Math. – 1962. – V.9. №1. – P.61–63.

43. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1962. – V.10, №1. – P.196–210.

44. Дейнеко В.Г. Некоторые методы и алгоритмы решения задач комбинаторной оптимизации: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. (01.01.09) – Минск, 1981. – 11 с.

45. Супруненко Д.А. К задаче о бродячем торговце // Кибернетика. – 1975, №5. – С. 121–124.

46. Михалевич В.С., Шор Н.З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // В кн.: Научно-методические материалы экономико-математического семинара.– М.: ЛЭМИ и ВЦ АН СССР, 1962. – Вып.1. – С. 3–15.

47. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

48. Емеличев В.А., Комлик В.И. Применение динамического программирования к решению задач размещения // Докл. АН БССР. – 1966. – Т.10. – С. 721–725.

49. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация.– Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 192 с.

50. Стиранка А.И., Каспшицкая М.Ф. О взаимном размещении точечных множеств // В кн.: III Республиканская конференция "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". Канев: 14–16 сентября 1982 г.: Тезисы докладов. – Киев: ИК АН УССР, 1982. – С. 103–105.

51. Рубинштейн М.И. Задачи и методы комбинаторного программирования. – М., 1976. – 71 с. – (Препринт/Ин-т проблем управления (автоматики и телемеханики) АН СССР).

52. Генс Г.В., Левнер Е.В. Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач. – М., 1981. – 66 с. – (Препринт/АН СССР, ЦЭМИ).

53. Аристова И.В., Литвинов В.Н. Формализация и алгоритмизация компоновки машинного зала энергоблока // В кн.: III Республиканская конференция "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". Канев, 14–16 сентября 1982 г.: Тезисы докладов. - Киев: ИК АН УССР, 1982. – С. 79–80.

54. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Исследование сходимости и эффективности метода сужающихся окрестностей. – Харьков, 1981. – 44 с. - (Препринт АН УССР/Ин-т проблем машиностр.; 168).

55. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ (обзор теории, алгоритмов, программ и приложений) // Math. Operationforsch. Statist., Ser. Optimization. – 1977. – Bb.8, №2. – S.253–280.

56. Татаров В.А. Методы поиска эффективных эвристических алгоритмов решения экстремально-комбинаторных задач // В кн.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством. Сб. тезисов докладов Всесоюзной конференции (17–19 окт. 1979 г.). – М., 1980. – С. 285–287.

57. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981. – 368 с.

58. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 160 с.

59. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980. – 22 с. – (Препринт АН УССР/Ин-т проблем машиностр.; 85).

60. Емец О.А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства / Полт. инж.-строит. ин-т. - Полтава, 1983. - 20 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.83, №616 - УкД83.

61. Стоян Ю.Г., Емец О.А. О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. - 1985. - Т.21, вып.5. - С. 868-881.

62. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. - Киев.: УМК ВО, 1992. - 92 с.

63. Стоян Ю.Г., Емец О.А. Одна задача оптимизации на графах, алгоритм и программа ее решения // В кн.: Методы и прогр. решения оптимиз. задач на графах и сетях. Ч.1. - Новосибирск, 1982. - С. 202-204.

64. Емец О.А. Один способ решения задач оптимизации на перестановках с повторениями // В кн.: III Респ. конф. "Вычислит. математика в соврем. науч.-техн. прогрессе". Канев, 14-16 сент. 1982 г. - Киев: ИК АН УССР, 1982. - С. 175-176.

65. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. - М.: Наука, 1981. - 344 с.

66. Ковалев М.М., Исаченко А.Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации // Докл. АН БССР. - 1978. - Т.22, №10. - С. 869-872.

67. Gaiha P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutohedron // SIAM J. Appl. Math.- 1977. - V.32, №2. - P.323-327.

68. Емец О.А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах / Полт. инж.-строит. ин-т. - Полтава, 1989. - 11 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89, №2362Ук-89.

69. Емец О.А. О геометрических свойствах множества перестановок // В кн.: Тезисы докладов 42 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов

института / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1990. – С. 215.

70. Бондаренко В.А., Шуникова Е.В. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки / Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М., 1985. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ №7454-В85.

71. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 648 с.

72. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. – Харьков, 1982. – 33 с. – (Препринт АН УССР/Ин-т проблем машиностр.; 173).

73. Исаченко А.Н., Емеличева Е.В. Многогранник одной задачи теории расписаний // В кн.: Вопросы планирования и экономико-математического моделирования. – Минск, 1980. – С. 117-119.

74. Klee V.H., Walkup D.W. The d-step copjecture for polyhedra of dimension d<6 // Acta Math. – 1967. – V.117, №1-2. – P. 323-327.

75. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Властивості опуклих функцій на переставному многограннику // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – №3.– С. 69-72.

76. Емец О.А. Задачи оптимизиции на евклидовом полиперестановочном множестве с повторениями: свойства допустимого множества // В кн.: Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем: Сб. научн. тр. / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; Редкол.: Сергиенко И.В. (отв. ред.) и др. – Киев, 1990. – С. 22-24.

77. Емец О.А. Свойства некоторых математических моделей в оптимизационных задачах геометрического проектирования // В кн.: Математическое и имитационное моделирование в системах проектирования и управления / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушко-

ва. – Чернигов, 1990. – С. 108–111.

78. Исаченко А.Н. Выпуклый многогранник размещений / Белорус. гос. ун-т. Редколлегия журнала "Вестник БГУ". – Минск, 1978.– 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.78, № 942-78Деп.

79. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства. – Харьков, 1990. – 38 с. – (Препринт АН УССР/Ин-т проблем машиностр.; 342).

80. Александров П.С. Комбинаторная топология. – М.: ОГИЗ, – 1947. – 192 с.

81. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. – М.: Наука. – 1986. – 118 с.

82. Ковалев М.М. Полиэдральные полумитроиды // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – №3. – С. 25–27.

83. Padberg M. A note on the total unimoularity of matrices // Discr. Math. – 1976. – V. 14, №3. – P. 211-217.

84. Camion P. Characterization of totally unimodular matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 16. – P. 78–83.

85. Chandrasekaran R. Total unimodularity of matrices // SIAM J. Appl. Math. – 1969. – V. 17, №6. – P. 118–125.

86. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

87. Горунович С.А. Полиэдральная структура некоторых задач комбинаторной оптимизации. Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук. – Минск: Ин-т математики АН БССР, 1982. – 16 с.

88. Емец О.А. Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нем // Докл. АН УССР. – 1991. – №4. – С. 69–72.

89. Емец О.А. Свойства целевых функций на сочетаниях и размещениях // В кн.: Тезисы докладов 43 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава,

1991. – С. 283.

90. Емец О.А. Оптимизация на перестановках: класс задач, решаемых точно с помощью погружения // В кн.: "VII Всесоюзн. конференция "Проблемы теоретической кибернетики": Тез. докл., II ч. / АН СССР, ИПМ, ИрВЦ, МИНВУЗ РСФСР, МГУ, ИрГУ. – Иркутск, 1985. – С. 48–49.

91. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения: Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук (01.01.09). – М.: ВЦ АН СССР, 1985. – 16 с.

92. Емец О.А. Оптимизация на полиперестановочном множестве: класс задач, решаемых точно с помощью погружения // В кн.: Системы программного обеспечения решения задач оптим. планир. Одиннадцатая всесоюз. школа (г. Кострома, 21–29 мая 1990 г.): Крат. тез. докл. – М., 1990. – С. 106–107.

93. Емец О.А. О расширении возможностей МО АСУ при решении задач ЛП с большим количеством ограничений посредством применения МППО // В кн.: Всесоюз. науч.-практич. семинар "Прикл. аспекты упр. слож. системами" (г. Кемерово, 22–24 марта 1983 г.): Тез. докл. – М., 1983 г. – С. 228.

94. Емец О.А. О решении задач линейного программирования с большим количеством ограничений / Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1983. – 11 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 19.7.83, №744Ук-Д83.

95. Емец О.А. Оптимизация на перестановках: методы с погружением для некоторых задач / Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1983. – 18 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 3.8.1984, №1359Ук-84Деп.

96. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Выща шк., 1979. – 312 с.

97. Емец О.А. К комбинаторным задачам размещения прямоугольников // В кн.: Математическое обеспечение рационального раскроя

в системах автоматизированного проектирования.– Уфа: УАИ, 1987. – С. 63.

98. Емец О.А. Приближенный метод и его априорная оценка для решения линейных оптимизационных задач на перестановках / Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1987. – 10 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 15.9.87, №2532-Ук87.

99. Емец О.А. Приближенный метод решения линейных задач оптимизации на перестановках // В кн.: Дискретная оптимизация и компьютеры. – М.: ЦЭМИ АН СССР, 1987. – С. 51-52.

100. Емец О.А., Пичугина О.С. Приближенный метод решения условных задач на погруженном в R^k множестве сочетаний // В кн.: Тезисы докладов 44 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минобразования Украины. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1992. – С. 283.

101. Емец О.А., Пичугина О.С. Приближенный метод решения условных линейных задач на множестве размещений // В кн.: Тези доповідей 45 наук. конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів інституту. Частина 2 / Мінсвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. – Полтава, 1993. – С. 204.

102. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рощин В.А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1980. – 276 с.

103. Артеменко В.И. О двух подходах к приближенному решению задач частично целочисленного линейного программирования // В кн.: Вычислительные аспекты в ППП. – К.: ИК АН УССР, 1980. – С. 15-25.

104. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1985. – 381 с.

105. Емец О.А. Об оптимизации выпуклых недифференцируемых функций на евклидовых комбинаторных множествах // В кн.: Тезисы докладов 44 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минобразования Украины. Полт. инж.-строит. ин-т. - Полтава, 1992. - С. 281.

106. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. - М.: Наука, 1981. - 384 с.

107. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Гребенник И.В. Экстремальные задачи на множестве размещений. - Харьков, 1991. - 35 с. - (Препринт АН УССР/Ин-т проблем машиностр.; 347).

108. Емец О.А. Экстремальные свойства недифференцируемых выпуклых функций на общем евклидовом множестве размещений // В кн.: Системы программного обеспечения решения экономических задач / РАН, ЦЭМИ, ВЦ РАН. - 1992. - С. 7-8.

109. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1980. - 256 с.

110. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986. - 328 с.

111. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы нелинейного программирования. - М.: Наука, 1964. - 736 с.

112. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. - М.: Мир, 1985. - 512 с.

113. Журавлев Ю.И., Финкельштейн Ю.Ю. Локальные алгоритмы для задач линейного целочисленного программирования // Проблемы кибернетики. - Вып. 14. - М.: Наука, 1965. - С. 289-295.

114. Яковлев С.В. Теория и оптимизационные методы геометрического проектирования в системах управления, наблюдения и контроля: Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. - Томск, 1989. - 27 с.

115. Демиденко В.М. Критерий смежности вершин на выпуклой

оболочке матриц подстановок (многогранник задачи о коммивояжере).– Минск, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; 28(388)).

116. Емец О.А. Оптимизация на двух типах множеств // В кн.: Тезисы докладов 43 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1991. – С. 281.

117. Емец О.А. Валуйская О.А. Построение выпуклой в R^k функции, совпадающей на гиперсфере с заданной функцией // В кн.: Тезисы докладов 44 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минобразования Украины. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1992. – С.282.

118. Емец О.А., Валуйская О.А. К вопросу об оптимизации выпуклых функций на перестановочном многограннике // В кн.: Тези доповідей 45 наук. конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів інституту. Частина 2 / Мін-освіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. – Полтава, 1993. – С. 205.

119. Микстуров В.Н. Комбинаторика укладок. – Киев, 1975. – 54 с. – (Препринт АН УССР / Ин-т кибернетики: 75-14).

120. Вайнштейн А.Д. Задачи об упаковке прямоугольников в полосу // Управляем. системы. – 1984. – №25. – С. 17–37.

121. Юдин Д.Б., Горяшко А.П., Немировский А.С. Математические методы оптимизации устройств и алгоритмов АСУ. – М.: Радио и связь, 1982. – 288 с.

122. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения. Дисс.... канд. физ.-мат. наук (01.01.09). – Харьков, 1984. – 155 с. / Минвуз УССР. Харьков. ин-т радиоэлектроники.

123. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения

плоских геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1976. – 248 с.

124. Brown Donna J. An improved BL Lower bound // Inform. Process. Lett. – 1980. – V. 11, №1. – P. 37–39.

125. Sleator D. 2.5 times optimal algorithm for paking in two dimentions // Inform. Process. Lett. – 1980. – V. 10, №1. – P. 37–40.

126. Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Э.Г. Кофмана. – М.: Мир, 1984. – 312 с.

127. Morihara I., Ibaraki T., Hasegawa T. Bin packing and multiprocessor scheduling problems with side sonstraints on job types // Discr. Appl. Math. – 1983. – V. 6, №2. – P. 130–138.

128. Емец О.А. Цветная упаковка как оптимизация на полиперестановках // В кн.: Тезисы докладов 43 научн. конференции профессоров, преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов института / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1991. – С. 282.

129. Горбунцов В.В. Алгебраїчний підхід до розв'язку одного класу екстремальних задач // Доп. АН УССР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1980. – №3. – С. 43–46.

130. Дедиков Ю.А., Панишев А.В., Тильчин О.Т., Шумеев В.В. Об одной задаче оптимального размещения массивов на магнитной ленте // АСУ и приборы автоматики. – 1975. – Вып. 35. – С. 32–35.

131. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. О статистически эффективном подходе к решению задач комбинаторного типа // Вопросы кибернетики. – 1975. – Вып. 15. – С. 23–30.

132. Перепелица В.А. Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах // Проблемы кибернетики. – 1973. – Вып. 26. – С. 291–314.

133. Леонтьев В.И. Устойчивость решений в дискретных экстре-

мальных задачах: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1982.

134. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

135. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний: Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

136. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний: Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989. – 327 с.

137. Червак Ю.Ю., Головач И.И., Кузка А.И. Решение некоторых классов задач дискретной оптимизации // В кн.: III Республиканская конференция "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". Канев, 14–16 сентября 1982 г.: Тезисы докладов. – Киев: ИК АН УССР, 1982. – С. 106–107.

138. Стоян Ю.Г., Емец О.А. Об оптимизации на перестановках с использованием больших задач линейного программирования: модели, способы и алгоритмы // В кн.: Системы программного обеспечения решения задач оптим. планир. Седьмой всесоюз. симпоз. (г. Нарва-Йыэссу, 16–24 апр. 1982 г.): Крат. тез. докл. – М., 1982.

139. Емец О.А. Свойства специальных комбинаторных задач оптимизации, методы и алгоритмы их решения // В кн.: Теоретические проблемы кибернетики. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.

140. Емец О.А. Комбинаторное множество полиразмещений и оптимизация на нем // В кн.: Тези доповідей 45 наук. конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів інституту. Частина 2 / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. – Полтава, 1993. – С. 206.

141. Емец О.А. Минимизация взвешенной длины связующей сети линейно расположенных элементов как оптимизация линейной функции // В кн.: Тези доповідей 45 наук. конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів інституту. Частина 2 / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. – Полтава, 1993.

ЗМІСТ